PREFACE.

A SUFFICIENT account has been already given in the preface of my Differential Calculus* of the gradual development of Differential and Integral Calculus in Europe, and also in whose mind the notion of this science first arose in India. Therefore here I only wish to say that the learned public may not think it to be a mere translation or an abstract of some European book, but as a new treatise on the subject. I have shown, as far as possible, all the important theorems together with numerous examples, so that the students may be able to grasp the methods thoroughly and thereby solve problems without the least doubt.

Many new methods are described in different portions of this book, which will be found simpler than those of Europeans. For instance, Mr Todhunter in his Integral Calculus, article 14, for the integration of $\frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$ assumed $\sqrt{x^2 \pm a^2} = z - x$. The same assumption was described by Mr Williamson. Mr Hymers putting $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ into the form $\frac{(\sqrt{x^2 \pm a^2})\ (x + \sqrt{x^2 \pm a^2})}{x + \sqrt{x^2 \pm a^2}}$ deduced the integral.

Professor De Morgan worked thus.

Let $\sqrt{x^2 \pm a^2} = y$, then $x^2 \pm a^2 = y^2$

$\therefore 2x\,dx = 2y\,dy$ or $x\,dx = y\,dy$

Therefore, $x\,dx + y\,dx = y\,dy + y\,dx$,

$$dx = \frac{y\,(dy + dx)}{x + y}, \text{ by substituting } \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm y^2}} =$$

$$\int \frac{y\,(dy + dx)}{y\,(x + y)} = \int \frac{dx + dy}{x + y} = \text{Log}\,(x + y) = \text{Log}\,(x + \sqrt{x^2 \pm a^2})$$

Professor De Morgan deduced a second method of $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}}$ also, by employing an imaginary quantity, thus

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int \frac{dx\sqrt{-1}}{\sqrt{a^2 - (x\sqrt{-1})^2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-1}}\ \text{Sin}^{-1} \frac{x\sqrt{-1}}{a}$$

But by De Moivre's Theorem

$\text{Cos}\,\theta - \text{Sin}\,\theta\,\sqrt{-1} = e^{-\theta\sqrt{-1}}$

---

* Named Chalana-Kalan, which is dedicated to His Honor Sir Alfred Lyall, K. C. B., C. I. E. late Lieutenant-Governor of the North-Western Provinces and Chief Commissioner of Oudh, and published by the order of Government in 1886.

Extracts from newspapers and journals.

Let $\sin\theta = \frac{x}{a}\sqrt{-1}$, $\cos\theta = \sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}}$, $-\sqrt{-1} = \frac{1}{\sqrt{-1}}$,

$$\theta = \sin^{-1}\frac{x\sqrt{-1}}{a} \quad \text{or} \quad \frac{1}{\sqrt{-1}}\sin^{-1}\frac{x\sqrt{-1}}{a} =$$

$$\log\left\{\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}} - \frac{x}{a}(\sqrt{-1})^2\right\} = \log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$$

where we omit the constant quantity Log a

The learned Pandit makes use of these and other facts to interweave Western with Eastern science, and to lead his country-men to move onward from the basis of truth they already possess Pandit Sudhakara Dvivedi has done something to advance scientific knowledge in India, and it is to be hoped that he will be encouraged to redeem his promise and complete a series of work on Analytical Geometry, the Integral Calculus, and Quaternions The Indian Government would do wisely by circulating this admirable book among the native students at colleges, and especially among private students in the Hindi area of Northern India —*The Overland Mail, Feb 1, 1887*

A REALLY remarkable book on the differential Calculus has just been published at Benares, which ought to be made known to Europe It is called *Chalana Kalana*, and it is written by Pandit Sudhakara Dvivedi, of the Sanskrit College, Benares

It is the first forward step that India has made in independent scientific research in modern times, and the author deserves the highest praise for the masterly manner in which he has dealt with his difficult subject He has placed it in the power of Indian mathematicians to carry their studies to a very high point in their native Hindi, and he has done this not by merely translating an English mathematical work, but by writing an entirely new treatise, deduced from the discoveries of Descartes, Newton, Leibnitz, Bhaskaracharya and others The methods of these authorities are transfused into Indian processes, thereby enabling native scholars to follow Western methods and reasoning with confidence and intelligence He utilises a method of dealing with variables, devised by Bhaskaracharya, which is practically identical with that of the differential calculus, and he cites other correct processes which that admirable old astronomer was able to formulate In this skilful way the author grafts Western science on to the Indian mind, while, in the general plan of his work, he follows Todhunter's well-known treatise Originality is likewise shown by the author's simplification of Todhunter's method of treating vanishing fractions, and in the sections he has appended on analytical geometry and conic sections—additions rendered necessary by the fact that no treatise on them exists in the Hindi language

The Pandit promises a series of works on the higher branches of mathematics, dealing fully with analytical geometry, the integral calculus, and quaternions He has shown in the present work that he thoroughly understands his subject, and it is to be hoped, for the advancement of science, that he will succeed in directing the acute reasoning powers of Indians to the mathematical and scientific problems of the Western world —*The Academy Feb* 12, 1887 F P

In view of the aptitude for numerical calculation which the Hindus are acknowledged to possess in a marked degree, it seems singular that India, in modern days,

if $f(x)\, f'(x) = x$,

$$\int \frac{dx - dy}{x - y} = \int \frac{dx}{f(x)} \text{ i e } \operatorname{Log}(x - y) = \operatorname{Log}\left\{ f(x) + y \right\},$$

$$\therefore \; x - y = f(x) + y \text{ or } y = \frac{x - f(x)}{2} \text{ and } \int \frac{dx}{f(x)} \operatorname{Log}\left\{ f(x) + y \right\}$$

$$= \operatorname{Log}\left\{ \frac{f(x) + x}{2} \right\} = \operatorname{Log}\left\{ f(x) + x \right\},$$

where the constant Log 2 is omitted

Thus a theorem has been framed that when $f(x) \times f'(x) = x$ then

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \operatorname{Log}\left\{ f(x) + x \right\},$$

In $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, $f(x) = \sqrt{x^2 \pm a^2}$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \text{ and } f(x)\, f'(x) = x$$

$$\int \frac{dx}{f(x)} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$$

$$= \operatorname{Log}\left\{ f(x) + x \right\} = \operatorname{Log}\left(\sqrt{x^2 \pm a^2} + x \right), \text{ by my method}$$

In like manner many other new methods have been described

I have added many important theorems with numerous interesting examples regarding the Calculus of Variation and Dynamics of a Particle at the end of this book

It is advisable for the beginners first to read carefully the Differential Calculus, then to begin the Integral Calculus, otherwise it is impossible for them to understand the latter

In conclusion, I earnestly request all learned gentlemen to understand, that the book is not written to show off talent, but to encourage and incite our own countrymen towards the cultivation of Western science Why should we not improve our own language and advance our own countrymen with the aid of Western science to the attainment of which we are applying our heart and soul ?

Now-a-days there being more mutual communication between Europeans and Indians, the Europeans are very much interested in the study of Sanskrit and Hindi Therefore this treatise will be also useful to those Europeans who are interested in the history and development of Indian Mathematics

I shall consider my labour not to have been in vain, even if my treatise should have no other result than to incite others to criticise my work and to produce more perfect treatises on the subject

SUDHÁKARA DVÍVEDÍ

किञ्चिन्निवेदनम्

वाराणसेयराजकीयसंस्कृतपरीक्षायां गणितपरीक्षापाठ्यग्रन्थेषु गुरुवर म. म. सुधाकरद्विवेदिनश्चलराशिकलनस्य निर्धारणं जातम्। १९९५ ईशवीये वर्षे राजकीयाज्ञया मुद्रितस्यास्य ग्रन्थरत्नस्यालभ्यत्वेन पुनर्मुद्रणस्यावश्यकत्वात् सरस्वतीभवनसिरीजाध्यक्षैस्तत्रैवास्य मुद्रणं समाज्ञप्तम्। गणितविषये प्रतिदिनं समुन्नतिर्दृश्यते, अतः १९९५ ईशवीये मुद्रिते पुस्तके या शैली स्वीकृता तत्रेदानीं बहुत्र परिवर्त्तनं जातम्। तथापि परमविद्वद्भिर्महामहोपाध्यायैः स्वीकृतां शैलीं परिरक्ष्यैवास्य मुद्रणं संपादितम्। ग्रन्थान्ते प्राचीननवीनपरिपाट्योर्भेदं ग्रन्थग्रन्थिमोचनं च यथामति प्रदर्शयिष्ये। अतिशीघ्रतया संमुद्रितेऽस्मिन् दृष्टिदोषात्कण्टकदोषाद्वा यदि कुत्रापि त्रुटिः संलक्षिता भवेत्तत्कृपया क्षमणीयोल्लेख्या च कृपालुभिर्विद्वद्भिः। अत्र हृदयतः काशिकराजकीयसंस्कृत महाविद्यालयाध्यक्षेभ्यः परमविद्यारसिकेभ्यो विद्वद्वरेभ्यो डा० श्रीमङ्गलदेवशास्त्रिवर्येभ्यो धन्यवादान् वितरामि येषां कृपालवेनैवेदानीं गणितशास्त्रस्याभ्युदयो दृश्यते संस्कृतविद्याजगति।

इति निवेदयते

बलदेवमिश्रः

विषयसूचनिका (Contents)

अध्याय	पृष्ठ
१—चलराशिफलन का अभिप्राय और साधारण चलानयन	१ – ४१
२—अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन (Rational Fraction)	४२ – ८१
३—लघूकरण परम्परा (Formulae of Reduction)	८२ –१०६
४—प्रकीर्णक (Miscellaneous Remarks)	१०७ –१४४

भूमिका।

चलनकलन (Differential calculus) की भूमिका में विशेष रूप से लिख आये है कि यूरप में यह विद्या कैसे फैली और भारतवर्ष मे सब से पहले किस विद्वान् के ग्रन्थ मे चलनकलन (Differential Calculus) और चलराशिकलन (Integral Calculus) संवन्धी सिद्धान्त पाये जाते है। यहां पर इतना ही आवश्यक समझ कर लिखा जाता है कि विद्वान् लोग यह न समझे कि यह ग्रन्थ किसी अङ्गरेज़ी ग्रन्थ का अनुवाद और संक्षिप्त रूप है किन्तु जिसमे पढ़ने वालों को सब सिद्धान्तो से भली भांति परिचय हो जाय और उदाहरणों के उत्तर निकालने मे संशय न हो इस लिये इसमे थोड़ा बहुत जहां तक हो सका है चलराशिकलन (Integral Calculus) संवन्धी सभी सिद्धान्तों को उदाहरण समेत यूरप की युक्ति और अपनी कल्पना के वल से नूतन लघु प्रकार से दिखलाया है।

जैसे $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$ इसकी सिद्धि के लिये टाडहण्टर (Todhunter) साहब और विलियम्सन (Williamson) साहब ने $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{ल} - \text{य}$, यह कल्पना किया। हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}$

$= \frac{(\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2})}{\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$ ऐसा कर तब चलराशि को सिद्ध किया। प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने पहले $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{र}$ तय $\text{य}^2 \pm \text{अ}^2 = \text{र}^2$, २य ताय = २र तार वा यताय = रतार इस लिये यताय + रताय = र तार + र ताय $\therefore$ ताय = $\frac{\text{र (तार + ताय)}}{\text{य} + \text{र}}$

इसका उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{र (तार + ताय)}}{\text{र (य + र)}} = \int \frac{\text{ताय + तार}}{\text{य + र}} = \text{ला (य + र)}$$

प्रोफेसर डिमार्गन (Demorgan) ने असंभव संख्या का भी उत्थापन दे कर $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2 + \text{अ}^2}$ इस का मान इस प्रकार से सिद्ध किया है कि

$$\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2+अ^2}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{अ^2-(य\sqrt{-१})^2}} = \frac{१}{\sqrt{-१}} \int \frac{ताय\sqrt{-१}}{\sqrt{अ^2-(य\sqrt{-१})^2}}$$

$= \frac{१}{\sqrt{-१}} ज्या^{-१} \frac{य\sqrt{-१}}{अ}$ परन्तु डेमाइवर के सिद्धान्त से

$कोज्याप - ज्याप\sqrt{-१} = इ^{-प\sqrt{-१}}$

वा, $-प\sqrt{-१} = ला\,(कोज्याप - ज्याप\sqrt{-१})$

कल्पना करो कि

$ज्याप = \frac{य}{अ}\sqrt{-१}$, $कोज्याप = \sqrt{१-\frac{य^2}{अ^2}}$ । $-\sqrt{-१} = \frac{१}{\sqrt{-१}}$, $प = ज्या^{-१}\frac{य\sqrt{-१}}{अ}$

वा, $\frac{१}{\sqrt{-१}} ज्या^{-१}\frac{य\sqrt{-१}}{अ} = ला\left(\sqrt{१+\frac{य^2}{अ^2}} - \frac{य}{अ}(\sqrt{-१})\right)^2$

$= ला\,(\sqrt{अ^2+य^2}+य) - ला\,अ$ स्थिराङ्क को निकाल देने से पहिले ही के ऐसा फल उत्पन्न हुआ ।

ऊपर जितनी युक्तियाँ दिखलाई गई हैं वे कभी मन में नहीं आ सकतीं जब तक यह मान न लो कि $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}} = ला(\sqrt{य^2 \pm अ^2}+य)$ इस लिये यहाँ पर हमने नया यह प्रकार ९वें प्रक्रम में लिखा है कि

कल्पना करो कि $\int \frac{ताय}{फ(य)} = ला\,\{फ(य)+र\}$ जहां र, य का कोई फल है तो तात्कालिक गति से $\frac{ताय}{फ(य)} = \frac{फ'(य)ताय + तार}{फ(य)+र}$ ∴ $फ(य)ताय + तायर = फ'(य)ताय\,फ(य) + तार\,फ(य)$ पक्षान्तरानयन और परस्पर भाग देने से $\frac{ताय-तार}{फ'(य)फ(य)-र} = \frac{ताय}{फ(य)}$ यहां यदि $फ'(य)फ(य) = य$ तो

$\frac{ताय-तार}{य-र} = \frac{ताय}{फ(य)}$ ∴ $\int \frac{ताय-तार}{य-र} = \int \frac{ताय}{फ(य)}$

वा $ला\,(य-र) = ला\,\{फ(य)+र\}$

∴ $य - र = फ(य) + र$

$र = \frac{य-फ(य)}{२}$ और $फ(य)+र = \frac{य+फ(य)}{२}$

इसलिये $\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला}\left(\frac{\text{य}+\text{फ(य)}}{२}\right) = \text{ला}\left\{\text{य}+\text{फ(य)}\right\} - \text{ला } २$

ला २ स्थिराङ्क को निकाल देने से

$\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला}\left\{\text{य}+\text{फ(य)}\right\}$ यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हुआ अर्थात् $\int\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$ इसका मान अवश्य ला $\{\text{य}+\text{फ(य)}\}$ इसके तुल्य होगा यदि $\text{फ(य)}\text{फ}'\text{(य)} = \text{य}$ हो तो।

गणितज्ञों के वीच स्पष्ट है कि मेरा प्रकार एक प्रकार का सिद्धान्त है जो कि नियम से दिखलाता है कि जहाँ जहाँ $\text{फ(य)}\,\text{फ}'\text{(य)} = \text{य}$ ऐसा होगा तहाँ तहाँ ही चलराशि का मान ला $\{\text{य}+\text{फ(य)}\}$ यह होगा।

इसी प्रकार इस ग्रन्थ में वहुत नई युक्तियाँ दिखलाई गई हैं।

इस के अन्त मे वैशेषिकलन (Calculus of variations) और एक परमाणु की गतिविद्या (Dynamics of a particle) के भी अनेक सिद्धान्त लिखे गये है जिनके वल से अनेक चमत्कृत उदाहरण के उत्तर सहज में निकल आते हैं।

विद्यार्थियों के अभ्यास के लिये इसमे अनेक उदाहरण लिखे गये हैं जिनके अभ्यास से सव सिद्धान्तों से भली भाँति परिचय हो सकता है।

विद्यार्थियों को चाहिये कि पहले चलनकलन (Differential Calculus) को अच्छी तरह से सीखकर तव इसको पढ़ें अन्यथा इसका आना अत्यन्त दुर्घट है।

अन्त में विद्वानों से यह सविनय प्रार्थना है कि मैंने अपनी पाण्डित्य दिखलाने के लिये इस ग्रन्थ को नहीं वनाया है किन्तु अपने देशवासियों के हृदय में यूरोप की विद्या का विशेष उत्साह दिलाने के लिये कि आप लोग कठिन परिश्रम से तन धन मन देकर जो यूरोप की विद्या सीखी उससे क्यो नहीं अपनी भाषा की पुष्टि कर अपने देश भाइयों का उपकार करते।

भारतवर्ष में यूरप के लोगो का अव विशेष संवन्ध होने से यूरप के विद्वान् लोग भी संस्कृत और हिन्दी की ओर विशेष ध्यान देने लगे इसलिये यूरप के लोगों को भी हिन्दी में यह नया ग्रन्थ यूरोपियन रीति से कहाँ कहाँ विशेष वातें प्रकाश करता है इसका परिचय करने के लिये इस ग्रन्थ को पढ़ने से विशेष उपकार होगा।

यदि विद्वान् लोग खण्डन की बुद्धि से भी मेरे ग्रन्थ को एक वार आद्यन्त पढ़ेंगे तो भी मैं अपने परिश्रम को सफल समझूंगा।

दोहा।

गणित पयोनिधि सविधि मथि काढ़ी सुधा सुहीर।
भणित सुधाकर नहिं मुधा वसुधा मधि हे धीर ॥ १ ॥
कल[1] न परत निज कलन[2] सो कलन[3] विना जौ तात।
कल[4] न कहहु कल[5] कलन[6] हित कलन[7] देहु येहि प्रात ॥ २ ॥

सुधाकर द्विवेदी।



---

१ कल = विश्राम, = आराम = चैन।
२ कलन = करन = कर (हाथ) का बहुवचन।
३ कलन = कलना = गणना = हिसाब करना।
४ कल दूसरा आनेवाला दिन।
५ कल = सुन्दर = बढ़ियाँ।
६ कलन = चलराशिकलन = यह ग्रन्थ।
७ कलन = करन = कर्ण = कान ।

विशेष वर्णन ।

अध्याय १ ।

प्रक्रम ।		पृष्ठ ।
१ ।	चलनकलन और चलराशिकलन में सम्बन्ध	१
२ ।	$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फा}(\text{य})\ \text{ताय}$ इस का अर्थ	१—२
३ ।	$\int_{0}^{\text{य}} \text{फा}(\text{य})\ \text{ताय}$ इस का रूपान्तर	२—३
४ ।	$\int \text{फा}(\text{य})\,\text{ताय}$ इस को दिखाना कि फ (य) के समान है	३
५ ।	चलराशिकलन का अभिप्राय	३—५
६ ।	फ + स्थि इस में स्थिर का मान जानने के लिये प्रकार	५
७ ।	साधारण गतियों से चलानयन	५—६
८ ।	चलानयन के स्मरण के लिये श्लोक और दोहे	६—७
८ ।	अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण	८—१४
९ ।	$\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ}(\text{य})}$ इस का मान जानना जहां $\text{फ}'(\text{य})\ \text{फ}(\text{य}) = \text{य}$,	१४—१६
१० ।	खण्डचलानयन (Integration by parts) और उस के उदाहरण	१६—१८
११ ।	दूसरे प्रकार का खण्डचलानयन ..	१८
१२ ।	चलानयन में विशेष, खण्डचलानयन का श्लोक और दोहा, व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण और अभ्यासार्थ प्रश्न	१८—३४

द्वितीयाध्याय २ ।

१३ ।	अकरणीगत भिन्नसंवन्ध का चलानयन यदि तात्कालिक संवन्ध $\frac{\text{अ}' + \text{क}'\text{य} + \text{ख}'\text{य}^{2} + \cdots + \text{प}'\text{य}^{\text{म}}}{\text{अ} + \text{कय} + \text{खय}^{2} + \cdots + \text{पय}^{\text{न}}}$ ऐसा हो .	३५—३६
१४ ।	यदि संवन्ध का मान $\frac{\text{फ}(\text{य})}{(\text{य}-\text{क}_{1})^{\text{त}}\,\text{फा}(\text{य})}$ ऐसा हो तो चलानयन	३६—३७

प्रक्रम। पृष्ठ।

१५। लाघव से आ$_1$,का$_1$ इत्यादि के मान और कुछ उदाहरण . ३७—३९

१६। यदि फा(य) = $(\text{य}—\text{क}_1)^{\text{न}}$ फि(य) यदि ऐसा हो तो चलानयन और उदाहरण ... ३९—४१

१७। हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो तब चलानयन और उदाहरण . ४१—४४

१८। यदि भिन्न के हर मे एक जोड़ा असम्भव मान त वार हो तो चलानयन और उदाहरण .. ४४—४८

१९। अकरणीगत भिन्न संबन्ध में विशेष . ४९

२०। ऊपर के प्रक्रमों से अनेक चलानयन ४९—५०

२१। $\frac{\text{ताय}}{(\text{य}-\text{अ})^{\text{म}}(\text{य}-\text{क})^{\text{न}}}$ इस का सहज में चलानयन .. ५०—५१

२२। $\frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{गय})^{\text{न}}}$ का चलानयन जहां म और न अभिन्न है . ५१

२३। $\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}—१}$ का चलानयन जहां न धन और अभिन्न है ५१—५३

२४। $\int\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}—१}$ का मान जहां न > म ५३—५५

२५। $\int\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}+१}$ का मान जहां न > म ५५

२६। $\frac{\text{फ(य)}}{\text{य}^{\text{न}}—१}$ का मान खण्डभिन्नों मे ५५—५६

२७। $\frac{\text{फ(य)}}{\text{य}^{\text{न}}+१}$ का मान खण्डभिन्नों में ५६

२८। उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न ५७—६५

तृतीयाध्याय ३।

२९। $\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{न}}}$ का लघूकरण (Reduction) ... ६६—६७

३०। $\int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{य})^{\text{न}}}$ का लघूकरण ६७—६९

३१। $\int$ य$^{\text{म}}$त$^{\text{न}}$ ताय का लघूकरण जहां

प्रक्रम । पृष्ठ ।

$त = आय^{अ} + काय^{क}$, . ६९—७०

३२ । $\int य^{म} त^{न} ताय$ का लघूकरण जहां $त = अ + कय + गय^{२}$. ७०—७१

३३ । ३१वें प्रक्रम में विशेष .. ७१—७२

३४ । लघूकरण के कुछ उदाहरण ... ७२—७५

३५ । लघूकरण से त्रिकोणमिति संबन्धिफलों का चलानयन, ७५—७७

३६ । ३१वें प्रक्रम में और विशेष .. ७७—७८

३७ । लघूकरण से सहज मे सान्तचलानयन, कुछ उदाहरण, ..
और अभ्यास के लिये प्रश्न . ७८—८५

चतुर्थाध्याय ४ ।

३८ । $\int_{अ}^{क} फ(य)$ ताय का मान २ प्र० से तथा श्रेढी के योग से
जानना ... ८६—८७

३९ । $\int फ(य)$ ताय इस पर से श्रेढी का योग जानना ... ८७—८९

४० । श्रेढी के योग में विशेष . . ८९—९०

४१ । सान्तचल के कुछ सिद्धान्त ... ९०—९२

४२ । सान्तचल के सिद्धान्त में विशेष ... ९२—९३

४३ । $\int_{अ}^{क} फ(य)$ ताय के मान में विशेष ९३

४४ । $\int_{अ}^{क} फ(य)$ ताय के मान में दूसरा विशेष .. ९३—९४

४५ । $\int \frac{ताय}{अ^{२} + य^{२}}$ के मान में विशेष ९४—९७

४६ । तीन चलों में न्यूनाधिकता का विचार .. ९८

४७ । $फ(अ) + फ(अ + १) + फ(अ + २) + $. इस श्रेढी और
$\int_{अ}^{\infty} फ(य)$ ताय के मान का विचार ... ९८—९९

४८ । लाय पर से कुछ श्रेढी का विचार .. ९९—१००

४९ । जिस श्रेढी का कोई पद $\frac{१}{फा(य)}$ हो उस के मान का

प्रक्रम ।		पृष्ठ
	विचार ...	१००—१०३
५० ।	टेलर के सिद्धान्त मे न से ऊपर के पदो का योग जानना	१०३—१०४
५१ ।	एक ही गति का प्रकारान्तर से चलानयन करने मे विशेष	१०४—१०५
५२ ।	सान्तचलज्ञान के लिये वर्नली (Bernoulli) की श्रेढी	१०५—१०६
५३ ।	वार वार चलज्ञान करने का नियम और सङ्केत	१०६—१०७
५४ ।	वर्नली के श्रेढी की मूल श्रेढी .	१०७
५५ ।	५४वे प्रक्रम मे विशेष	१०८—१०९
५६ ।	$\int$ ज्या^{न}य ताय इत्यादि के मान मे विशेष .	१०९
५७ ।	क्रिया समेत कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	१०९—१२०

श्रीः ।

श्रीजानकीवल्लभो विजयते ।

चलराशिकलन ।

श्लोक ।

यल्लीला विमला विलोक्य विपुलप्रालेयबालालये
भूपालेन्द्रललाटलालनकलालेपाङ्कितक्ष्मातले ।
उल्लङ्घ्य स्वकुलालिकूलकलितां लज्जानदीं मैथिली
यल्लोकाऽऽकुलिता चचाल चलवद्रामाय तस्मै नमः ॥१॥

१ प्र० । जैसे चलनकलन में स्वतन्त्रराशि के फलो पर से उनकी तात्कालिकी गति जानने के लिये अनेक प्रकार का वर्णन है उसी प्रकार से इस चलराशि-कलन में फलों की तात्कालिकी गति पर से उन फलों के जानने के लिये अनेक प्रकार लिखे है। ऐसी दशा मे चलराशिकलन को चलनकलन का उलटा कह सकते हैं ॥

२ । कल्पना करो कि फ(य) का तात्कालिक संबंध फा(य) है तो चलनकलन से $\frac{\text{फ}(\text{य}+\text{च})-\text{फ}(\text{य})}{\text{च}}=\text{फा}(\text{य})+\text{अ}_{१}$ (यहां जब च = ० = ताय तो $\text{अ}_{१} = ०$) इस लिये

$$\text{फ}(\text{य}+\text{च})-\text{फ}(\text{य})=\text{च}\{\text{फा}(\text{य})+\text{अ}_{१}\}$$

$$\text{फ}(\text{य}+२\text{च})-\text{फ}(\text{य}+\text{च})=\text{च}\{\text{फा}(\text{य}+\text{च})+\text{अ}_{२}\}$$

$$\text{फ}(\text{य}+३\text{च})-\text{फ}(\text{य}+२\text{च})=\text{च}\{\text{फा}(\text{य}+२\text{च})+\text{अ}_{३}\}$$

$$\cdot \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$\text{फ}(\text{य}+\text{न च})-\text{फ}\{\text{य}+(\text{न}-१)\text{च}\}=\text{च}[\text{फा}\{\text{य}+(\text{न}-१)\text{च}\}+\text{अ}_{\text{न}}]$$

दोनों पक्षों को जोड़ने से

$$\text{फ}(\text{य}+\text{न च})-\text{फ}(\text{य})=\text{च}\{\text{फा}(\text{य})+\text{फा}(\text{य}+\text{च})+\quad\}$$
$$+\text{च}(\text{अ}_{१}+\text{अ}_{२}+\text{अ}_{३}+\quad\}$$

इस मे य, य+च, य+२ च,· ·य+नच, इत्यादि के स्थान मे अ, इ, उ,·· ·क इत्यादि का उत्थापन देने से

फ (क)−फ(अ) = च { फा(अ) + फा(इ) + फा(उ) + } + च(अ$_1$ + अ$_2$ +)
अव यहाँ यदि च = ० अर्थात् ताय के समान कल्पना करो तो

फ (क)—फ(अ) = फा (अ) ताय + फा (इ) ताय + फा (उ) ताय + ··

ऐसा होगा। यहां जव य + नच = क और य = अ, · $\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$ = च इससे यह सिद्ध होता है कि फल के तात्कालिक संवंध मे स्वतन्त्र राशि के स्थान मे क्रम से अ, अ + $\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$, अ + २ $\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$, अ + ३$\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{न}}$, .क—च, का उत्थापन देकर अलग अलग मान ले आवो फिर उन मानो को च से गुणकर जोड़ दो, योग मे च के स्थान मे शून्य अर्थात् ताय का उत्थापन दो तो योग, फल के उन दो मानो के अन्तर के तुल्य होगा जो कि स्वतन्त्रराशि के स्थान में अ, और क के उत्थापन से उत्पन्न होगे। इस योग को संस्कृत मे आढ्य भी कहते है इस लिये लाघव से आढ्य के आदि अक्षर को लुप्ताऽकार के रूप मे लिखने से पूर्व योग को $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$ फा (य) ताय ऐसे लिख सकते हैं। यहां $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$फा (य) ताय इस से यह समझना चाहिये कि फा(य)ताय के य के स्थान मे अ, अ + ताय, अ + २ ताय, अ + ३ ताय, क—च, का उत्थापन देने से, जितने मान हैं उन सव का योग है। इस लिये प्रकारान्तर से जो योग पहले सिद्ध हुआ है इसे उसके समान करने से

फ(क)—फ(अ) = $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$फा(य)ताय ऐसा हुआ। इस मे यदि क के स्थान मे य, और अ के स्थान मे शून्य का उत्थापन दे तो फ(य)—फ(०) = $\int_{0}^{\text{य}}$ फा(य)ताय (१)

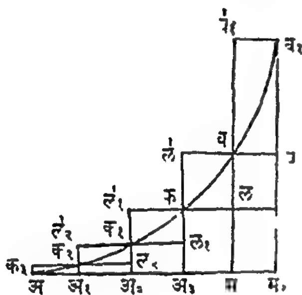
३। चलनकलन से सिद्ध है कि फ(य) में केवल य चलराशि है और स्थिराङ्क है इस लिये फ(य) मे य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से फ (०) यह अवश्य शून्य वा किसी स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इस स्थिराङ्क को यदि स्थि

कहो तो दूसरे प्रक्रम का (१) समीकरण $\text{फ(य)} - \text{स्थि} = \int_0^{\text{य}} \text{फा(य)ताय}$ ऐसा हुआ इस में पक्षान्तरानयन से $\text{फ(य)} = \int_0^{\text{य}} \text{फा(य)ताय} + \text{स्थि}$ इसे लाघव से $\text{फ(य)} = \int \text{फा(य) ताय} + \text{स्थि}$ ऐसा लिखते हैं।

४। जब $\text{फ(य)} = \int \text{फा(य)ताय} + \text{स्थि}$ तो दोनों की तात्कालिकी गति निकालने से $\text{ता}\{\text{फ(य)}\} = \text{फा(य)ताय} = \text{ता}\{\int \text{फा(य)ताय} + \text{स्थि}\}$ $= \text{ता}\{\int \text{फा(य)ताय}\} + \text{तास्थि} = \text{ता}\{\int \text{फा(य) ताय}\}$ इस लिये $\int \text{फा(य) ताय}$ यह अवश्य फ(य) के समान हुआ। इस पर से यह भी कह सकते हो कि जिस फल की तात्कालिकी गति फा(य)ताय है वह फल $\int \text{फा(य) ताय}$ के समान है वा $\int \text{फा(य)ताय} + \text{स्थि}$ इसके समान है।

चलराशिकलन का अभिप्राय।

५। नीचे लिखे हुए उदाहरण से विद्यार्थियों को स्पष्ट जान पड़ेगा कि चलनकलन और चलराशिकलन में क्या भेद है।



कल्पना करो कि अक२क१कव एक ऐसा वक्र है (जिसमें अ म = य, और व म = र,) कि जिसके भुज, कोटि और चापसे जो वक्र त्रिभुज उत्पन्न होता है उस का क्षेत्रफल सर्वदा इ गुणित भुजघन के समान होता है तो बतावो कि य भुज में कोटि का क्या मान है? यहाँ इ कोई स्थिर संख्या है।

कल्पना करो कि अम = य, वम = र, तो अवम वक्रत्रिभुज का फल प्रश्न के अनुसार इय^3 और $\text{अव}_1\text{म}_1$ का क्षेत्रफल $\text{इ}(\text{य} + \text{मम}_1)^3$ होगा इस लिये इन दोनो का अन्तर, तुल्य हुआ व_1 व म म_1 के, अधिक हुआ $\text{वव}'\text{म}_1\text{म}$ आयत से और अल्प हुआ $\text{व}'_1\ \text{व}_1\text{म}_1$ म आयत से तब

$$\text{इ}(\text{य} + \text{म म}_1)^3 - \text{इ.य}^3 > \text{वम} \times \text{मम}_1 \text{ और} < \text{व}_1\text{म}_1 \times \text{मम}_1$$

$$\text{म म}_1 \text{ का भाग दे देने से } \text{व}_1\text{म}_1 > \text{इ}\left\{\frac{(\text{य} + \text{म म}_1)^3 - \text{य}^3}{\text{म म}_1}\right\} < \text{वम, इसमें}$$

$$\text{यदि मम}_1 = 0 \text{ तो } \text{व}_1\text{म}_1 = \text{वम और इ}\left\{\frac{(\text{य} + \text{मम}_1)^3 - \text{य}^3}{\text{म म}_1}\right\} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}(\text{इय}^3)$$

चलनकलन से । इस लिये चलनकलन से यह बात सिद्ध होती है कि फल के तात्कालिकसंबंध के समान र का मान है अर्थात् र = ३ इ $य^2$ । इस प्रकार इस प्रश्न का उत्तर चलनकलन से सिद्ध हुआ ।

अब इसी वक्र मे यदि ऐसा प्रश्न किया जाय कि एक वक्रक्षेत्र की कोटि गुणित त्रिगुणितभुजवर्ग के तुल्य है तो भुज, कोटि और वक्र के चाप से जो त्रिभुज होगा उसका क्या क्षेत्रफल होगा? ।इस का क्षेत्रफल जानने के लिये अ म = य, का न तुल्य समान विभाग करो और मानो कि उन विभागो का मान क्रम से अ $अ_1$, $अ_1$ $अ_2$ $अ_2$ $अ_3$, $अ_3$ म, है जहाँ $\frac{य}{न}$ = अ $अ_1$ = $अ_1$ $अ_2$ = $अ_2$ $अ_3$ = $अ_3$म, तो वक्रक्षेत्र के लक्षण से $क_1$ $अ_1$ = ३ इ $\left(\frac{य}{न}\right)^2$, $क_2$ $अ_2$ = ३इ $\left(\frac{२य}{न}\right)^2$, , व म = ३ इ $\left(\frac{न.य}{न}\right)^2$,

इन सब को $\frac{य}{न}$ से गुण कर जोड़ देने से, $क_1$ $अ_1$, $ल'_2$ $अ_2$, इत्यादि आयतो के क्षेत्रफल का योग

$$= ३ इ \frac{य}{न}\left(\frac{य}{न}\right)^2 + ३इ \frac{य}{न}\left(\frac{२य}{न}\right)^2 + \quad + ३ इ \frac{य}{न}\left(\frac{नय}{न}\right)^2$$

$$= ३इ\frac{य^3}{न^3}\left(१+४+९+ \quad + न^2 \right) = ३ इ \frac{य^3}{न^3} \frac{न}{२} (न+१) \frac{(२न+१)}{३}$$

$$= ३इ\frac{य^3}{२न^2} \left(\frac{२ न^2 + ३न + १}{३}\right) = इ \frac{य^3}{२} \left(२+\frac{३}{न}+\frac{१}{न^2}\right)$$

इस समीकरण मे ज्यो ज्यो न की संख्या बढ़ाते जायँगे त्यों त्यों $क_1$, $ल'_1$, $ल'_2$ इत्यादि वक्र के पास पास आते जायँगे इस लिये यदि न = $\frac{१}{०}$ तो ठीक वक्रत्रिभुज का फल = इ$य^3$ हुआ परन्तु यदि इस का तात्कालिक संबंध निकालो तो $\frac{ता}{ताय}$ (इ $य^3$) = ३ इ $य^2$ यह तात्कालिक संबंध वक्र की कोटि के समान होता है इस लिये ४ प्रक्रम से इ$य^3$ = $\int$ ३ इ $य^2$ ताय ऐसा हुआ ।

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि तात्कालिक संबंध को उस वक्र की कोटि कल्पना करें जो कि मूलविन्दु मे होकर जाता हो तो जिस फल का यह तात्कालिक संबंध है वह फल उस वक्र त्रिभुज का फल होगा जो कि भुज, कोटि और वक्र के चाप से बनता है । अब जिस प्रकार से—

३ इ $य^2$ ताय पर से इ$य^3$ का मान निकले उस प्रकार का जो वर्णन करे उसको चलराशिकलन कहते हैं । इस उदाहरण से स्पष्ट है कि यदि चलनकलन,

और चलराशिकलन का लक्षण लाघव से कहें तो ऐसा होगा कि स्वतन्त्रराशि के फल पर से उसकी तात्कालिकी गति ले आवे उसे चलनकलन और तात्कालिकी गति पर से जो स्वतन्त्रराशि का फल ले आवे उसे चलराशिकलन कहना चाहिये।

६। चलनकलन से सिद्ध है कि ता { फ(य) + स्थि } = ताफ (य) इस लिये $\int$ ताफ(य) = फ(य), वा फ (य) + स्थि इस से यह समझना चाहिये कि तात्कालिकी गति पर से जो फल निकलता है उसमें यदि स्थिर संख्या जोड़ दें तो जोड़े हुए फल की भी वही तात्कालिकी गति आवेगी परन्तु चलराशिकलन से तात्कालिकी गति पर से जो फल आते हैं वे शुद्ध विना स्थिर के जोड़े आते हैं। विद्यार्थियों को चाहिये कि सर्वत्र जहां तात्कालिकी गति पर से चलराशिकलन के प्रकार से फल सिद्ध हो वहां उस फल में कोई स्थिरसंख्या भी जोड़े जिस स्थिर का मान, फल मे स्वतन्त्रराशि के स्थान में शून्य का वा किसी विशेष संख्या का उत्थापन देने से, ज्ञात हो सकता है। जैसे ५ प्रक्रम के उदाहरण में फल = $\int$ ३ इय^{२} ताय = फ + स्थि = इय^{३}। अब फ + स्थि = इय^{३} इस समीकरण मे यदि य = ० तो क्षेत्र देखने से स्पष्ट है कि क्षेत्रफल शून्य होगा

∴ ० + स्थि = इ (०)^{३} ∴ स्थि = ०, इसी प्रकार स्वतन्त्रराशि मे ऐसी संख्या का उत्थापन देना चाहिये जिसमे फल का मान व्यक्त हो फिर उस मान पर से स्थिराङ्क का ज्ञान शीघ्र हो जायगा।

७। चलनकलन की विपरीत क्रिया से स्पष्ट है कि,

$$\int \text{स्थिफ(य)ताय} = \text{स्थि} \int \text{फ(य) ताय}$$

$$\int \{ \text{फ(य)ताय} + \text{फा(य) ताय} \} = \int \text{फ(य) ताय} + \int \text{फा(य) ताय}$$

$$\int \text{य}^{\text{म}}\text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \text{लाय}।$$

$$\int \text{अ}^{\text{य}}\text{ताय} = \frac{\text{अ}^{\text{य}}}{\text{ला}_{\text{इ}}\text{अ}}, \int \text{इ}^{\text{य}}\text{ताय} = \text{इ}^{\text{य}}।$$

$$\int \text{ज्याय ताय} = -\text{कोज्याय}, \int \text{कोज्यायताय} = \text{ज्याय}।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्या}^{२}\text{य}} = \text{स्प य}, \int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्या}^{२}\text{य}} = -\text{कोस्पय}।$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^{२} - \text{य}^{२}}} = \text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ वा} = -\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^2+\text{य}^2} = \frac{1}{\text{अ}}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}} \text{ वा } = -\frac{1}{\text{अ}}\text{कोस्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

८। इनका स्मरण होने के लिये श्लोक और दोहे।

श्लोक।

चलः स्थिरघ्नविहृतश्चलोऽन्यो यदि तद्गतिः।
तुल्याऽऽद्यचलगत्या स्यात् स्थिरघ्नहृतया तया॥ १॥
यद्गतिर्भुक्तियोगेन समा स्याद्यत्र तन्मितिः।
भुक्त्युत्थचलयोगेन समाना चलकोविद॥ २॥
सैकघातश्चलस्यातः सैकतद्घातसंख्यया।
चलोऽन्यो यद्गती राशिघातराशिजवाहतिः॥ ३॥
यस्य भुक्तौ हरगतिर्लवमानं भवेद्धि सः।
हरस्य लघुरिक्थेन समानो भवति ध्रुवम्॥ ४॥
चलराशिसमः स्थिराङ्कघातः
प्रथमस्तद्धतराशिभुक्तिरस्ति।
अपरस्य गतिस्तदा स्थिराङ्क—
लघुरिक्थाप्त इहाऽऽद्य एव चान्यः॥ ५॥
चलज्या गुणिता भुक्तिर्यद्गतिस्तन्मितिर्भवेत्।
चलकोटिज्यया तुल्या क्षयगा चलयुक्तितः॥ ६॥
चलकोटिज्यया निघ्नी भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत्।
चलजीवासमानं तन्मानं ज्ञेयं मनीषिभिः॥ ७॥
चलकोटिज्यकावर्गभक्ता भुक्तिर्हि यद्गतिः।
चलजस्पर्शरेखैव तन्मानं स्याच्चलोक्तितः॥ ८॥
चलज्याकृतिसंभक्ता भुक्तिर्यस्य गतिर्भवेत्।
तन्मानं चलजा कोटिस्पर्शरेखा क्षयात्मिका॥ ९॥
राशिवर्गोनितस्थैर्यवर्गमूलहृता गतिः।
यद्गतिस्तन्मितिः स्थैर्यभक्तराशेर्धनुर्भवेत्॥ १०॥
स्थिरचञ्चलवर्गयोगभक्ता
गतिरस्तीह गतिर्यदान्यराशेः।
स्थिरभक्तचलस्य यद्धनुर्भा—
श्शकलैस्तत्स्थिरभक्तमन्यमानम्॥ ११॥

दोहा।

जौं चल थिर से गुणित वा भाजित हो चल आन।
आदि गती स्थिरगुणित वा भाजित ता गति जान॥ १॥
कइ गति के युति तुल्य हो जाकी गति ता मान।
सब गति के चल योगसम जानहु सकल सुजान॥ २॥
राशिघातहत राशिगति जाकी गति सो जान।
सैकघात हत राशि को सैकघातसम मान॥ ३॥
जाकी गति में हर गती अंशमान जौं होय।
ई अधार लघुरिक्थ जो हर को है वह सोय॥ ४॥

चौपाई।

चलराशी सम थिर को घाता। आदि सो गुणित राशिगति ताता॥
जाकी गति सो आदि प्रमाना। थिर लघुरिक्थ विभाजित जाना॥ ५॥

दोहा।

चलजीवा से गुणित चलगति जाकी गति होय।
चलकोटिज्या के करहु ऋण तुम जानहु सोय॥ ६॥
चलकोटिज्यागुणित चलगति जाकी गति होय।
चलजीवा के तुल्य तेहि कहहु युक्ति जिय जोय॥ ७॥
चलकोटिज्यावर्गहृत चलगति जाकी भुक्ति।
स्पर्शरेखिका चलहि को ताहि कहहु लखि सूक्ति॥ ८॥
चलजीवाकृतिभक्त जो चलगति जाकी भुक्ति।
चल को कोटिस्पर्श ऋण रेखा कहु लखि युक्ति॥ ९॥
स्थिरकृति में चलवर्ग ऋण तेहि पदहृत गति होय।
जाकी स्थिरहृत चलहि को चाप कहहु तुम सोय॥ १०॥

चौपाई।

स्थिरचञ्चलकृतियोगविभाजित।
चलगति जाकी गति सो साधित॥
स्थिरहृत चलको चाप बनावहु।
स्पर्शखण्ड से सो स्थिर भाजहु॥ ११॥

८। इस प्रक्रम में पूर्व प्रकारों का अभ्यास होने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

उदाहरण।

(१) $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}}}$ इस गति की चलराशि ले आवो ?।

यहाँ $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}}} = \text{ताय य}^{-\frac{1}{2}} \cdot \int \text{ताय य}^{-\frac{1}{2}} = 2\text{य}^{\frac{1}{2}}$, (३ सूत्र से)

२। ताय $(\text{क} + \text{अ य}^{\text{न}})^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}}$, इस की चलराशि ले आवो ?।

यहाँ छियुक्पदसिद्धान्त से

$$(\text{क}+\text{अ य}^{\text{न}})^{\text{म}} = \text{क}^{\text{म}} + \text{मक}^{\text{म}-1}(\text{अय}^{\text{न}}) + \frac{\text{म}(\text{म}-1)}{\lfloor 2}\text{क}^{\text{म}-2}(\text{अ य}^{\text{न}})^2 +$$

$$\cdot\ \text{ताय}(\text{क}+\text{अ.य}^{\text{न}})^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}} = \text{क}^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}}\text{ताय} + \text{अमक}^{\text{म}-1}\text{य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय}$$

$$+ \text{ अ}\frac{\text{म}(\text{म}-1)}{\lfloor 2}\text{क}^{\text{म}-}\text{ य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय} + \cdot$$

$$\therefore \int\text{ताय}(\text{क}+\text{अ य}^{\text{न}})^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}} = \int\text{क}^{\text{म}}\text{य}^{\text{ग}}\text{ताय} + \int\text{अमक}^{\text{म}-1}\text{य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय} + \cdot$$

$$= \text{क}^{\text{म}}\int\text{य}^{\text{ग}}\text{ताय} + \text{अ म क}^{\text{म}-1}\int\text{य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय}$$

$$+ \text{अ}\frac{\text{म}(\text{म}-)1}{\lfloor 2}\text{क}^{\text{म}-\cdot}\int\text{य}^{\text{न}+\text{ग}}\text{ताय} +$$ (२ सूत्र से)

$$= \frac{\text{क}^{\text{म}}}{\text{ग}+1}\text{य}^{\text{ग}+1} + \frac{\text{अ म क}^{\text{म}-1}}{\text{न}+\text{ग}+1}\text{य}^{\text{न}+\text{ग}+1} +$$

$$\frac{\text{अ}^2\text{ म }(\text{म}-1)\text{ क}^{\text{म}-2}}{(2\text{न}+\text{ग}+1)\lfloor 2}\text{य}^{\text{न}+\text{ग}+1} +$$ (३सूत्र से

३। $\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{क य})^{\text{न}}}$ इस की चलराशि वतावो ? यहाँ म और न दोनो अभिन्न और धन संख्या है।

यहाँ कल्पना करो कि अ + क य = ल य = $\frac{\text{ल}-\text{अ}}{\text{क}}$, और ताय = $\frac{\text{ताल}}{\text{क}}$।

इन का उत्थापन देने से $\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{कय})^{\text{न}}} = \frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताल}}{\text{क ल}^{\text{न}}} = \frac{(\text{ल}-\text{अ})^{\text{म}}\text{ता ल}}{\text{क}^{\text{म}+1}\text{ल}^{\text{न}}}$

$$\therefore \int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ता य}}{(\text{अ}+\text{कय})^{\text{न}}} = \int\frac{(\text{ल}-\text{अ})^{\text{म}}\text{ता ल}}{\text{क}^{\text{म}+1}\text{ल}^{\text{न}}} = \frac{1}{\text{क}^{\text{म}+1}}\int\frac{(\text{ल}-\text{अ})^{\text{म}}\text{ताल}}{\text{ल}^{\text{न}}},$$

अब इस पर से (छियुक्पदसिद्धान्त से) चलराशि जान सकते हो।

४। कोज्या^{2}य ताय, ज्या यताय इन की चलराशि क्या है ?

यहाँ त्रिकोणमिति से कोज्या^{2}य = $\frac{1+\text{कोज्या २ य}}{2}$, इस लिये

$$\text{कोज्या}^2\text{य ताय} = \frac{१ + \text{को ज्या २ य}}{२}\text{ताय},\ \text{यहाँ यदि २य = र, तो ताय} = \frac{\text{तार}}{२}$$

$$\therefore \int \text{कोज्या}^2\text{य ताय} = \int\left(\frac{१ + \text{को ज्या२य}}{२}\text{ताय}\right) = \int\left(\frac{\text{तार}}{४} + \frac{\text{कोज्या र}}{४}\text{तार}\right)$$

$$= \tfrac{१}{४}\int \text{तार} + \tfrac{१}{४}\int \text{कोज्यारतार} = \frac{\text{र + ज्यार}}{४} = \frac{\text{२ य + ज्या२य}}{४}(\text{७ सूत्र से})$$

इसी प्रकार

$$\text{ज्या}^2\text{य ताय} = \frac{१ - \text{कोज्या २ य}}{२}\text{ताय} \therefore \int \text{ज्या}^2\text{य ताय} = \frac{\text{२य} - \text{ज्या२य}}{४}$$

५। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{२अ य} - \text{य}^2}}$ इस की चलराशि क्या है?

कल्पना करो कि $\text{य} = \text{अ} - \text{ल} \therefore \text{ताय} = -\text{ताल}$,
और $\sqrt{\text{२ अ य} - \text{य}^2} = \sqrt{\text{२ अ (अ} - \text{ल)} - (\text{अ} - \text{ल})^2} = \sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}$

$$\therefore \int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{२ अय} - \text{य}^2}} = \int -\frac{\text{ताल}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{ल}^2}} = \text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{ल}}{\text{अ}} = \text{को ज्या}^{-१}\frac{\text{अ} - \text{य}}{\text{अ}}$$

$$= \text{उ ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\ (\text{१० सूत्र से})$$

६। $\frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}}$ इस की चलसंख्या बतावो?

कल्पना करो कि $\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} = \text{ल} - \text{य} \therefore \text{य}^2 - \text{२ य ल} + \text{ल}^2 = \text{य}^2 + \text{अ}^2$

$$\text{और य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{\text{२ ल}} \therefore \text{ताय} = \frac{\text{४ ल}^2\text{ताल} - \text{२ ताल (ल}^2 - \text{अ}^2)}{\text{४ ल}^2}$$

$$= \frac{\text{२ता ल}^2\ (\text{ल}^2 + \text{अ}^2)}{\text{४ ल}^2} = \frac{\text{ताल (ल}^2 + \text{अ}^2)}{\text{२ ल}^2},\ \text{और जब य} = \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{\text{२ ल}}$$

$$\therefore \text{ल} - \text{य} = \text{ल} - \frac{\text{ल}^2 - \text{अ}^2}{\text{२ ल}} = \frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{\text{२ ल}}\ \text{इनका उत्थापन देने से}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2}} = \int \frac{\frac{\text{ताल (ल}^2 + \text{अ}^2)}{\text{२ल}^2}}{\frac{\text{ल}^2 + \text{अ}^2}{\text{२ ल}}} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}} = \text{लाल}$$

$$= \text{ला}(\sqrt{\text{य}^2 + \text{अ}^2} + \text{य})\ \ (\text{४ सूत्र से})$$

७। $\frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}}$ इस की चलसंख्या बतावो?

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\text{कोज्यायताय}}{\text{कोज्या}^2\text{य}} = \int \frac{\text{कोज्यायताय}}{१—\text{ज्या}^2\text{य}} = \int \frac{\text{ताल}}{१—\text{ल}^2} (\text{यदि ल} = \text{ज्याय})$$

$$= \int \frac{१}{२}\left[\frac{\text{ताल}}{१—\text{ल}} + \frac{\text{ताल}}{१+\text{ल}}\right] = \frac{१}{२}\left[\int \frac{\text{ताल}}{१+\text{ल}} — \int \frac{—\text{ताल}}{१—\text{ल}}\right]$$

$$= \frac{१}{२}\left\{\text{ला}(१+\text{ल}) — \text{ला}(१—\text{ल})\right\} = \text{ला}\sqrt{\frac{१+\text{ज्याय}}{१—\text{ज्याय}}}$$

$$= \text{लाकोस्प}\left[\frac{\pi}{४} — \frac{\text{य}}{२}\right]$$

इसी प्रकार $\int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्याय}} = \text{लास्प}\frac{\text{य}}{२}$,

८। $\frac{\text{ताय}}{१^2—\text{य}^2}$ इसकी चलसंख्या क्या है?

$$\frac{\text{ताय}}{१^2—\text{य}^2} = \frac{१}{२}\left[\frac{\text{ताय}}{१—\text{य}} + \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}}\right] \therefore \text{ ७ उदाहरण के ऐसा}$$

$$\int \frac{\text{ताय}}{१^2—\text{य}^2} = \frac{१}{२}\text{ला}\frac{१+\text{य}}{१—\text{य}}, \text{ इस मे यदि य} = \text{य}\sqrt{—१}$$

तो $\int \frac{\text{ताय}\sqrt{—१}}{१+\text{य}^2} = \frac{१}{२}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}}$ वा $\int \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^2} = \frac{१}{२\sqrt{-१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{-१}}{१—\text{य}\sqrt{-१}}$

परन्तु ११ सूत्र से $\int \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^2} = \text{स्प}^{-१}\text{य}$

$$\therefore \text{स्प}^{-१}\text{य} = \frac{१}{२\sqrt{-१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}}$$

$$\text{वा, स्प}^{-१}\text{य} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}} + \text{स्थि}$$

यहा कल्पना करो कि $\text{य} = \text{स्प प} \therefore \text{स्प}^{-१}\text{य} = \text{प}$

इस लिये $\text{प} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}} + \text{स्थि}$, यदि $\text{प} = ०$, तो $\text{य} = ० \therefore \text{स्थि} = ०$

$$\text{तब प} = \frac{१}{२\sqrt{—१}}\text{ला}\frac{१+\text{य}\sqrt{—१}}{१—\text{य}\sqrt{—१}}$$

$$\text{वा इ}^{२\text{प}\sqrt{—१}} = \frac{१+\text{स्प प}\sqrt{—१}}{१—\text{स्पप}\sqrt{—१}} = \frac{\text{कोज्या प} + \text{ज्या प}\sqrt{—१}}{\text{कोज्या प} — \text{ज्या प}\sqrt{—१}}$$

$= \left(\text{कोज्या ष} + \text{ज्या ष}\sqrt{-१} \right)^२$

$\therefore$ $इ^{प\sqrt{-१}} = \text{कोज्याष} + \text{ज्याप}\sqrt{-१}$, वा $इ^{-प\sqrt{-१}}$

$= \text{कोज्याष} - \text{ज्याप}\sqrt{-१}$ (चलनकलन में डेमाइवर का सिद्धान्त देखो)

९। $\dfrac{\text{ताय}}{य\sqrt{२ अ य - अ^२}}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

कल्पना करो कि $२ अ य - अ^२ = ल^२ \therefore \dfrac{ल^२ + अ^२}{२ अ} = य$

और $\text{ताय} = \dfrac{२ \text{लताल}}{२ अ} = \dfrac{\text{लताल}}{अ}$

इस लिये $\displaystyle\int \frac{\text{ताय}}{य\sqrt{२ अ य - अ^२}} = \int \frac{\frac{\text{लताल}}{अ}}{\frac{ल^२ + अ^२}{२ अ} ल.} = \int \frac{२\text{ताल}}{अ^२ + ल^२}$

$\displaystyle = २\int \frac{\text{ताल}}{अ^२ + ल^२} = \frac{२}{अ} \text{स्प}^{-१} \frac{ल}{अ} = \frac{२}{अ} \text{स्प}^{-१} \frac{\sqrt{२अय - अ^२}}{अ}$ (११ सूत्र से)

१०। $\dfrac{\text{ताय}}{अ + क य^२}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\displaystyle\int \frac{\text{ताय}}{अ + कय^२} = \frac{१}{अ}\int \frac{\text{ताय}}{१ + \frac{क}{अ} य^२}$, यहाँ यदि $ल = य\sqrt{\frac{क}{अ}}$ तो $य = ल\sqrt{\frac{अ}{क}}$

$\text{ताय} = \text{ताल}\sqrt{\frac{अ}{क}}$

इस लिये $\displaystyle\frac{१}{अ}\int \frac{\text{ताय}}{१ + \frac{क}{अ} य^२} = \frac{१}{अ}\int \frac{\text{ताल}\sqrt{\frac{अ}{क}}}{१ + ल^२} = \frac{\sqrt{अ}}{अ\sqrt{क}}\int \frac{\text{ताल}}{१ + ल^२} =$

$\displaystyle\frac{१}{\sqrt{अ क}} \text{स्प}^{-१} ल = \frac{१}{\sqrt{अ क}} \text{स्प}^{-१} \left(य\sqrt{\frac{अ}{क}} \right)$

११। $\dfrac{\text{ताय}.य^५}{१ + य^२}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

$\dfrac{य^५}{१ + य^२} = य^३ - य + \dfrac{य}{१ + य^२}$

इस लिये $\displaystyle\int \frac{य^५ \text{ताय}}{१ + य^२} = \int य^३ \text{ताय} - \int य\text{ताय} + \int \frac{य\text{ताय}}{१ + य^२}$

$$= \frac{य^४}{४} + \frac{य^२}{२} + \frac{१}{२} ला(१ + य^२)$$

१२ । $\frac{(अ+क) \, ताय}{अ \, य^४ + क \, य^२}$ इस की चलसंख्या क्या है ?

कल्पना करो कि $य = \frac{१}{र} \therefore \; ताय = -\frac{तार}{र^२}$

इस लिये $\frac{(अ+क)ताय}{अ \, य^४ + क \, य^२} = -\frac{(अ+क)तार}{र^२ य^२(अ \, य^२ + क)} = -\frac{(अ+क) \, तार}{(अ \, य^२ + क)}$

$$= -\frac{(अ+क)तार}{\frac{अ+कर^२}{र^२}} = -\frac{(अ+क)र^२ \, तार}{अ+कर^२}$$

$$\therefore \int \frac{ताय(अ+क)}{अ \, य^४ + कय^२} = -(अ+क)\int \frac{र^२तार}{अ+क.र^२} = -\frac{अ+क}{क}\int \frac{र^२तार}{\frac{अ}{क}+र^२}$$

$$= -\frac{अ+क}{क}\int\left(ता \, र - \frac{\frac{अ}{क}तार}{\frac{अ}{क}+र^२} \right) = -\frac{अ+क}{क}\left(\int तार - \frac{अ}{क}\int \frac{तार}{\frac{अ}{क}+र^२}\right)$$

$$= -\frac{अ+क}{क}\left\{ र - \frac{अ}{क}\sqrt{\frac{क}{अ}}स्प^{-१}\left(\frac{र\sqrt{क}}{\sqrt{अ}}\right)\right\} = -\frac{अ+क}{क}\left(र - \sqrt{\frac{अ}{क}}स्प^{-१}र\sqrt{\frac{क}{अ}}\right)$$

$$= -\frac{अ+क}{क}\left(\frac{१}{य} - \sqrt{\frac{अ}{क}}स्प^{-१} \frac{\sqrt{क}}{य\sqrt{अ}}\right)$$

अभ्यास के लिये और प्रश्न ।

(१) $\int \frac{ज्यायताय}{कोज्याय}$, उ० लाछेय ।

(२) $\int \frac{ताय}{अय + क\sqrt{य}}$ . . उ० $\frac{२}{अ}ला\left(अ\sqrt{य}+क\right)$

(३) $\int ताय \left(\sqrt{य} + \sqrt[३]{य}\right)$ . . . . उ० $\frac{२ \, य^{\frac{३}{२}}}{३} + \frac{३}{४}य^{\frac{४}{३}}$

(४) $\int ताय(य^{-३} + य^{-१} + अ)$ उ० $\frac{२अ \, य^३ + २य^२ला \, य - १}{२य^२}$

(५) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}^{२}-\text{य}^{२}}$. उ०, $\frac{१}{२\text{अ}}\,\text{ला}\frac{\text{अ}+\text{य}}{\text{अ}-\text{य}}$,

(६) $\int \frac{\text{ताय.क}}{\text{यलाय}}$ .. .. उ०, क ला (लाय)

(७) $\int$ कोस्पयताय .. उ० लाज्याय

(८) $\int \frac{\text{लाय}}{\sqrt{४-\text{य}^{२}}}$ . . उ० $\text{ज्या}^{-१}\frac{\text{य}}{२}$

(९) $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{८-२\text{य}-\text{य}^{२}}}$ . . उ० $\text{ज्या}^{-१}\,\frac{१+\text{य}}{२}$

(१०) $\int \frac{\text{ताय}}{१०+२\text{य}+\text{य}^{२}}$ .. . उ०, $\frac{१}{३}\text{स्प}^{-१}\,\frac{\text{य}+१}{३}$

(११) $\int \frac{\text{ताय य}^{७}}{\text{य}^{२}+४}$ उ०, $\frac{\text{य}^{६}}{६}-\text{य}^{४}+८\text{य}^{२}-३२\text{ला}\,(\text{य}^{२}+४)$

(१२) $\int \frac{५\ \text{ताय}}{४\text{य}^{४}+\text{य}^{२}}$. उ० $५(२\text{स्प}^{-१}\,\frac{१}{२\,\text{य}}-\frac{१}{\text{य}})$

(१३) $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{क य}}$ उ० ला $(\text{क}\sqrt{\text{अ}+\text{क य}})$

(१४) $\int \frac{(१०\text{य}^{९}+९\text{य}^{८})\text{ता य}}{(\text{य}^{१०}+\text{य}^{९})^{\frac{४}{७}}}$ उ० $\frac{७}{३}(\text{य}^{१०}+\text{य}^{९})^{\frac{३}{७}}$

(१५) $\int \frac{\left\{\frac{\text{न.य}^{\text{न}-१}+(\text{न}-१)\text{य}^{\text{न}-२}}{\text{न}}\right\}\text{ताय}}{(\text{य}^{\text{न}}+\text{य}^{\text{न}-१})^{\frac{\text{अ}}{\text{क}}}}$ उ० $\frac{\text{क}(\text{य}^{\text{न}}+\text{य}^{\text{न}-१})^{\frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{क}}}}{\text{न}\,(\text{क}-\text{अ})}$

(१६) $\int \frac{(\sqrt{\text{य}^{२}+९}+\text{य})^{२}\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^{२}+९}}$, उ० $\frac{१}{२}\left(\text{य}+\sqrt{\text{य}^{२}+९}\right)^{२}$

(१७) $\int \frac{२\text{य ताय}}{(\text{य}^{२}+१)^{२}}$. उ०, $-\frac{१}{\text{य}^{२}+१}$

(१८) $\int \frac{\text{क.य}^{५}\text{ता य}}{\text{य}^{२}+१}$ . . उ०, $\text{क}\left(\frac{\text{य}^{४}}{४}-\frac{\text{य}^{२}}{२}+\text{ल}\sqrt{\text{य}^{२}+१}\right)$

(१९) $\int (\text{अ}+\text{य}^{२})\,(\text{अ}+\text{य})\ \text{ताय}$. उ०, $\text{अ}^{२}\text{य}+\frac{\text{अ य}^{२}}{२}+\frac{\text{अ य}^{३}}{३}+\frac{\text{य}^{४}}{४}$

(२०) $\int (\text{अ}^{२} + \text{य}^{२})(\text{अ} + \text{य})\text{य ताय}$, उ०, $\frac{\text{अ}^{३}\text{य}^{२}}{२} + \frac{\text{अ}^{२}\text{य}^{३}}{३} + \frac{\text{अ य}^{४}}{४} + \frac{\text{य}^{५}}{५}$

(२१) $\int \frac{(१ + \text{य})^{२}(१ - \text{य})\text{ता य}}{\text{य}^{२}}$, .. उ०, $\text{लाय} - \text{य} - \frac{\text{य}^{२}}{२} - \frac{१}{\text{य}}$।

(२२) $\int \frac{\text{य}^{२}\sqrt{\text{य}}\ \text{ताय}}{१ + \text{य}}$, उ०, $\frac{२}{५}\text{य}^{\frac{५}{२}} - \frac{२}{३}\text{य}^{\frac{३}{२}} + २\text{य}^{\frac{१}{२}} - २\ \text{स्प}^{-१}\ \text{य}^{\frac{१}{२}}$,

(२३) $\int (\text{अ} + \text{क य}^{\text{न}})^{\text{म}}\text{न क य}^{\text{न}-१}\text{ताय}$, उ०, $\frac{(\text{अ} + \text{क य}^{\text{न}})^{\text{म}+१}}{\text{म} + १}$,

उदाहरण

(२४) एक चोर अ स्थान से एक हीरे को चुरा कर भागा। जब अ स्थान से पौन मील दूर जा चुका तब उस को पकड़ने के लिये एक सिपाही अ स्थान से दौड़ा इस सिपाही के प्रतिक्षण की गति चोर की गति से अ स्थान से चोर की दूरी जो हो उतनी गुणित है तो बतावो कि अ स्थान से कितनी दूर पर चोर पकड़ा गया ?। उत्तर, $२\frac{१}{४}$ मील।

(२५) एक हीरे के मोल की बाढ़ एक राजा के आमदनी की बाढ़ से आमदनी के वर्ग को गुणने से जो हो सो होती है तो बताओ कि जब राजा की आमदनी तीन लाख हो तो हीरे का क्या मोल होगा ?

उत्तर, ९×१०^{१५} हीरे का मोल।

९। कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \text{ला}\{\text{फ(य)} + \text{र}\}$ जहाँ र, य का कोई फल है तो तात्कालिक गति बनाने से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} = \frac{\text{फ}'(\text{य})\text{ताय} + \text{तार}}{\text{फ(य)} + \text{र}} \cdot \quad \text{फ(य)ताय} + \text{ताय र}$$

$= \text{फ}'(\text{य})\text{ताय फ(य)} + \text{तारफ(य)}$, पक्षान्तरानयन से और परस्पर भाग देने से

$$\frac{\text{ताय-तार}}{\text{फ(य) फ(य)-र}} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$$ यहाँ यदि $\text{फ}'(\text{य})\text{फ(य)} = \text{य}$, तो

$$\frac{\text{ताय-तार}}{\text{य-र}} = \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}} \cdot \int \frac{\text{ताय-तार}}{\text{य-र}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{फ(य)}}$$

$$\therefore \text{ला(य-र)} = \text{ला}\{\text{फ(य)} + \text{र}\} \cdot \quad \text{य} - \text{र} = \text{फ(य)} + \text{र}$$

$$\text{तब र} = \frac{\text{य-फ(य)}}{२} \text{ और फ(य)} + \text{र} = \frac{\text{य} + \text{फ(य)}}{२}$$

इस लिये $\int \frac{ताय}{फ(य)} = ला\left(\frac{य + फ(य)}{२}\right) = ला \{य + फ(य)\} - ला२$

स्थिराङ्क को छोड़ देने से $\int \frac{ताय}{फ(य)} = ला \{य + फ(य)\}$।

जैसे (१) उदाहरण, $\int \frac{ताय}{य}$ यहां $फ(य) = य$, और $फ'(य) = १$

$\therefore$ $फ(य)\, फ'(य) = य$, इस लिये $\int \frac{ताय}{य} = ला \{य + फ(य)\} = ला\, २य$

$= लाय + ला२$ स्थिराङ्क को निकाल लेने से $\int \frac{ताय}{य} = लाय$।

ऐसा ही पहले भी सिद्ध है।

(२) उदाहरण, $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^२ \pm अ^२}}$ यहां $फ(य) = \sqrt{य^२ \pm अ^२}$

इस लिये $फ'(य) = \frac{य}{\sqrt{य^२ \pm अ^२}}$ और $फ(य)\, फ'(य) = य$, इस लिये

ऊपर की युक्ति से $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^२ \pm अ^२}} = ला\left(य + \sqrt{य^२ \pm अ^२}\right)$ यही पहले भी सिद्ध हुआ है।

(३) उदाहरण, $\int \frac{ताय}{\sqrt{य^२ \pm २अय}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{(य \pm अ)^२ - अ^२}} = \int \frac{तार}{\sqrt{र^२ - अ^२}}$

यदि $र = य \pm अ$,

तब दूसरे उदाहरण से $\int \frac{तार}{\sqrt{र^२ - अ^२}} = \int \frac{ताय}{\sqrt{य^२ \pm २अय}}$

$= ला(र + \sqrt{र^२ - अ^२}) = ला\left(य \pm अ + \sqrt{य^२ \pm २अय}\right)$

(२) उदाहरण की सिद्धि के लिये टाडहण्टर (Todhunter) और विलिअमसन् (Williamson) साहब ने $\sqrt{य^२ \pm अ^२} = ल - य$, यह कल्पना किया।

हाइमर्स (Hymers) ने $\sqrt{य^२ \pm अ^२} = \frac{(\sqrt{य^२ \pm अ^२})(य + \sqrt{य^२ \pm अ^२})}{य + \sqrt{य^२ \pm अ^२}}$

ऐसा कर तब चलराशि सिद्ध किया, डिमार्गन (Demorgan) ने पहले $\sqrt{य^२ \pm अ^२} = र$ तब $य^२ \pm अ^२ = र^२$ $\therefore$ $२यताय = २रतार$ और

वा, $यताय = रतार$ इस लिये $य.ताय + र.ताय = रतार + रताय$

$\therefore$ $\text{ताय} = \frac{\text{र(ताय + तार)}}{\text{य + र}}$ इस का उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \int \frac{\text{र(ताय + तार)}}{\text{र(य + र)}} = \int \frac{\text{ताय + तार}}{\text{य + र}} = \text{ला(य + र)}$$

$= \text{ला} \left(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}\right)$ ऐसा सिद्ध किया,

डिमार्गन साहब ने असंभव संख्या का भी उत्थापन देकर चलराशि ले आने के लिये एक दूसरी रीति लिखी है परन्तु ये सब कल्पनाये शीघ्र मन मे नही आ सकती जब तक कि पहले से यह ज्ञान न हो कि

$\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \text{ला} \left(\text{य} + \sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}\right)$ ऐसा होता है इस लिये हमारी समझ मे इस प्रक्रम के आदि मे हमने जो सिद्धान्त लिखा है उस से बहुत ही सहज में चलराशि सिद्ध हो जाता है।

१०। चलनकलन से सिद्ध है कि ता (च + ज) = ताच ज + च ताज

$\because$ $\int$ ता (च × ज) = $\int$ ताच ज + $\int$ च ताज

$\therefore$ $\int$ ताचज = च ज — $\int$ च ताज इसे खण्डचलानयन कहते हैं इस पर से अनेक उदाहरण की सिद्धि बड़े लाघव से हो जाती है जैसे।

(१) उदाहरण, $\int \text{ज्या}^{-1}\text{य ताय}$ यहां यदि ताय = ताच और $\text{ज्या}^{-1}\text{य} = \text{ज}$

तो च = य, और $\text{ताज} = \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{१—य}^2}}$,

इस लिये $\int \text{ज्या}^{-1}\text{य ताय} = \text{च ज} - \int \text{च ताज}$

$$= \text{य ज्या}^{-1}\text{य} - \int \frac{\text{यताय}}{\sqrt{\text{१—य}^2}} = \text{य ज्या}^{-1}\text{य} + \sqrt{\text{१—य}^2}$$

(२) उदाहरण, $\int \text{ताय}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}$ यहां ताय = ताच $\therefore$ य = च

और $\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{ज}$ $\therefore$ $\frac{\text{य ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}} = \text{ताज}$,

इस लिये, $\int \text{ताय}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} = \text{य}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} - \int \frac{\text{य}^2\text{ ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$

$$= \text{य}\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2} - \int \frac{\text{ताय (य}^2 \pm \text{अ}^2 \mp \text{अ}^2)}{\sqrt{\text{य}^2 \pm \text{अ}^2}}$$

$$= य\sqrt{य^2 \pm अ^2} - \int ताय\sqrt{य^2 \pm अ^2} \pm अ^2 \int \frac{ताय}{\sqrt{य^2 \pm अ^2}}$$

पक्षान्तरानयन से और ६ प्रक्रम से

$$२\int ताय\sqrt{य^2 \pm अ^2} = य\sqrt{य^2 \pm अ^2} \pm अ^2 ला\ (य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})$$

$$\therefore \int ताय\sqrt{य^2 \pm अ^2} = \frac{य}{२}\sqrt{य^2 \pm अ^2} \pm \frac{अ^2}{२} ला\ (य + \sqrt{य^2 \pm अ^2})\ ।$$

(३) उदाहरण, $\int$ यकोज्याअय ताय यहां ताच = कोज्याअय ताय

$$\therefore\ च = \frac{ज्याअय}{अ} \text{ और } ज = य\ \therefore\ ताज = ताय$$

इस लिये, $\int$ यकोज्याअय ताय $= \frac{य\ ज्याअय}{अ} - \int \frac{ज्याअय\cdot ताय}{अ}$

$$= \frac{यज्याअय}{अ} + \frac{कोज्याअय}{अ^2}$$

यदि $\int य^2$कोज्याअयताय तो पूर्व युक्ति से

$$\int य^2 कोज्याअयताय = \frac{य^2\ ज्याअय}{अ} - \frac{२}{अ}\int यज्याअयताय$$

$$= \frac{य^2\ ज्याअय}{अ} + \frac{२}{अ}\left(\frac{यकोज्याअय}{अ} - \frac{ज्याअय}{अ^2}\right)$$

$$= \frac{य^2 ज्याअय}{अ} = \frac{२यकोज्याअय}{अ^2} + \frac{ज्याअय}{अ^3}$$

(४) उदाहरण, $\int य^{न}$कोज्याअयताय यहाँ भी ताच = कोज्याअयताय और ज = $य^{न}$ मानने से

$$\int य^{न} कोज्याअयताय = \frac{य^{न} ज्या\ अय}{अ} - \frac{१}{अ}\int न\cdot य^{न-१} ज्याअयताय$$

$$= \frac{य^{न}\cdot ज्याअय}{अ} - \frac{न}{अ}\int य^{न-१}\ ज्याअयताय$$

फिर $\int य^{न-१}$ज्याअयताय

$$= -\frac{य^{न-१} कोज्याअय}{अ} + \int (न-१) य^{न-२} कोज्याअय$$

$$= -\frac{य^{न-१} कोज्याअय}{अ} + \frac{न-१}{अ}\int य^{न-२} कोज्याअय$$

यो बार बार क्रिया करने से $\int$ य^{न}कोज्याअयताय इस का मान आजायगा।

$$(५) \int इ^{कय}ज्याअयताय = \int \left\{ \frac{ज्याअय}{क} ता\,(इ^{कय}) \right\}$$

$$= \frac{ज्याअय}{क} इ^{कय} - \int \frac{अ\,कोज्याअय}{क} इ^{कय}ताय$$

$$= \frac{ज्याअय}{क} इ^{कय} - \int \left\{ \frac{अ\cdot कोज्याअय}{क^२} ता\,(इ^{कय}) \right\}$$

$$= \frac{ज्याअय}{क} इ^{कय} - \frac{अकोज्याअय}{क^२} इ^{कय} - \int \frac{अ^२\,ज्याअय}{क^२} इ^{कय}ताय$$

पक्षान्तरानयन से

$$\int इ^{कय}ज्याअयताय + \frac{अ^२}{क^२} \int इ^{कय}ज्याअयताय$$

$$= \frac{अ^२+क^२}{क^२} \int इ^{कय}ज्याअयताय = \frac{इ^{कय}}{क} \left(ज्याअय - \frac{अ\,कोज्याअय}{क} \right)$$

$$\therefore \int इ^{कय}ज्याअय\,ताय = \frac{इ^{कय}(क\,ज्याअय - अकोज्याअय)}{अ^२+क^२},$$

११। यह चलनकलन से सिद्ध है कि ता $\left(\frac{च}{ज}\right) = \frac{ज\,ताच - चताज}{ज^२}$

(जहां च, और ज दोनो य स्वतन्त्रराशि के फल है)

इस लिये $\int ता\left(\frac{च}{ज}\right) = \int \frac{जताच - चताज}{ज^२} = \int \frac{ताच}{ज} - \int \frac{च\,ताज}{ज^२}$

$$= \int \frac{ताच}{ज} + \int च\cdot ता\left(\frac{१}{ज}\right)$$

$\frac{च}{ज} - \int \frac{ताच}{ज} = \int च\,ता\left(\frac{१}{ज}\right)$ यह भी एक दूसरे प्रकार का खण्ड-चलानयन है। इसको $\int \frac{ताच}{ज} = \frac{च}{ज} + \int \frac{च\,ताज}{ज^२}$ ऐसे भी लिख सकते हो।

१२। स्वतन्त्रराशि का चाहे जैसा फल हो परन्तु चलनकलन से उसका तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हो परन्तु यदि तात्कालिक सम्बन्ध ज्ञात हो तो चलराशिकलन से साक्षात् उसी तात्कालिक सम्बन्ध से प्रायः फल का ज्ञान नहीं होता जैसे $\frac{१}{\sqrt{य \pm २अय}}$ इस तात्कालिक सम्बन्ध में जब तक एक

दूसरा स्वतन्त्रराशि $र_1 = य \pm अ$ ऐसा न मानोगे तव तक चलसंख्या का जानना कठिन है। एक स्वतन्त्रराशि के स्थान में क्या जोड़ घटा वा किससे गुण भाग कर दूसरी स्वतन्त्रराशि कल्पना करें जिसमें तात्कालिक सम्बन्ध वा तात्कालिकी गति पर से सहज मे चलसंख्या सिद्ध हो जाय इस के लिये अनेक उदाहरणो के क्रियाओं का जानना और अभ्यास करना इनको छोड़ और कोई उपाय नही है। इस लिये विद्यार्थियों को अभ्यास करने के लिये हम यहाँ पर कुछ उदाहरणों को क्रिया समेत दिखाते हैं॥

उदाहरणों के करने के पहले खण्डचलायन की क्रिया समझने के लिये नीचे लिखे हुए श्लोक वा दोहे को अभ्यास कर रक्खो।

श्लोक।

इष्टाप्तभुक्तिं परिकल्प्य भुक्तिं
तज्जं चलं चैकमथाहतिर्या।
एकेष्टयोरिष्टजवाहतैक—
गतेश्चलोना स्वगतेश्चलः स्यात् ॥ १२ ॥

दोहा

इष्टभक्त गति मानि गति जो चल सो है एक।
एक इष्ट को घात करि राखहु धारि विवेक॥
इष्टभुक्ति हत एक को मानि भुक्ति चल लाय।
तामें याको हीन करि गतिचल कहो वनाय॥ १२ ॥

उदाहरण।

(१) $\int य\sqrt{य+अ}\ ताय = \int (य+अ—अ)\sqrt{य+अ}\ ताय$

$= \int (य+अ)\ (य+अ)^{\frac{१}{२}} ताय — \int अ\sqrt{य+अ}\ ताय$

$= \int (य+अ)^{\frac{३}{२}} ताय — अ \int ताय\ (य+अ)^{\frac{१}{२}}$

$= \frac{२}{५}(य+अ)^{\frac{५}{२}} — \frac{२}{३}अ\ (य+अ)^{\frac{३}{२}}$।

२) $\int \frac{ताय}{\sqrt{य+अ}+\sqrt{य+क}} = \int \frac{ताय\sqrt{य+अ} — ताय\sqrt{य+क}}{अ—क}$

$= \frac{२\{(य+अ)^{\frac{३}{२}} — (य+क)^{\frac{३}{२}}\}}{३(अ-क)}$ } दोनों उदाहरणों में $र = य + अ$ कल्पना करने से भी चलराशिसिद्ध हुए है

$$(३)\int\frac{य\cdot ताय}{य^८-अ^८}=\frac{१}{२अ^४}\int\left(\frac{यताय}{य^४-अ^४}-\frac{यताय}{य^४+अ^४}\right)$$

$$=\frac{१}{२अ^४}\int\left\{\frac{१}{४अ^२}\left(\frac{२\,ताय\cdot य}{य^२-अ^२}-\frac{२\,तायय}{य^२+अ^२}\right)-\frac{यताय}{य^४+अ^४}\right\}$$

$$=\frac{१}{८अ^६}ला\frac{य^२-अ^२}{य^२+अ^२}-\frac{१}{२अ^४}\int\frac{य\cdot ताय}{य^४+अ^४}$$

$$=\frac{१}{८अ^६}ला\frac{य^२-अ^२}{य^२+अ^२}-\frac{१}{४अ^४}\int\frac{२\,यताय}{य^४+अ^४}$$

$$=\frac{१}{८अ^६}ला\frac{य^२-अ^२}{य^२+अ^२}-\frac{१}{४अ^६}स्प^{-१}\frac{य^२}{अ^२},$$

$$(४)\quad\int(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}य^{म-१}\,ताय=\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}य^{म-न}ताय$$

$$=\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}(य^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$$=\int क^{१-\frac{म}{न}}क^{\frac{म}{न}-१}य^{न-१}\,(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}(य^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}\,(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}क^{\frac{म}{न}-१}\,(य^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}\,(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}(कय^न)^{\frac{म}{न}-१}ताय$$

$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}(अ+कय^न-अ)^{\frac{म}{न}-१}ताय$ । अब यहां मानो कि $र=अ+कय^न\ \therefore\ तार=न\,कय^{न-१}ताय$ और

$$ताय=\frac{तार}{नक\,य^{न-१}}$$

इस लिये $\quad क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}(अ+कय^न-अ)^{\frac{म}{न}-१}ताय$

$$=क^{१-\frac{म}{न}}\int य^{न-१}(अ+कय^न)^{\frac{प}{व}}(अ+कय^न-अ)^{\frac{म}{न}-१}\frac{तार}{नकय^{न-१}}$$

$=\frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{नक}\int र^{\frac{प}{व}}(र-अ)^{\frac{म}{न}-१}\,तार$ । अब यहां यदि $\frac{म}{न}$ यह अभिन्न और धन हो तो द्वियुक्पदसिद्धान्त से $(र-अ)^{\frac{म}{न}-१}$ इस का मान फैला कर उसे $र^{\frac{प}{व}}तार$ इस से गुण फिर सहज में चलराशि जान सकते हो

जैसे $\int य^2\sqrt{अ+य}$ ताय यहां $न=१, \frac{प}{व}=\frac{१}{२}, क=१$, और $म-१=२$

$\therefore \frac{म}{न}=\frac{३}{१}=३$, और $र=अ+य$, तब

$$\frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{नक}\int र^{\frac{प}{व}}(र-अ)^{\frac{म}{न}-१}तार=\frac{१^{-२}}{१\times१}\int र^{\frac{१}{२}}(र-अ)^{२}तार$$

$$=\int र^{\frac{१}{२}}(र^{२}-२रअ+अ^{२})तार=\int र^{\frac{५}{२}}तार-२अ\int र^{\frac{३}{२}}तार+अ^{२}\int र^{\frac{१}{२}}तार$$

$$=\frac{२}{७}र^{\frac{७}{२}}-\frac{४}{५}अ\cdot र^{\frac{५}{२}}+\frac{२}{३}अ^{२}र^{\frac{३}{२}}$$

$$=\frac{२}{७}(अ+य)^{\frac{७}{२}}-\frac{४}{५}अ(अ+य)^{\frac{५}{२}}+\frac{२}{३}अ^{२}(अ+य)^{\frac{३}{२}}।$$

और $\int य^{५}(अ+कय^{२})^{\frac{२}{३}}$ ताय। यहां $न=२$, $म-१=३$, $\frac{प}{व}=\frac{२}{३}$

$\therefore \frac{म}{न}=२$, $र=अ+कय^{२}$

इस लिये, $\frac{क^{१-\frac{म}{न}}}{कन}\int र^{\frac{प}{व}}(र-अ)^{\frac{म}{न}-१}$ तार $=\frac{१}{२क^{२}}\int र^{\frac{२}{३}}(र-अ)^{१}तार$

$$=\frac{१}{२क^{२}}\left(\frac{३}{८}र^{\frac{८}{३}}-\frac{३}{५}अर^{\frac{५}{३}}\right)=\frac{३}{१६क^{२}}(अ+कय^{२})^{\frac{८}{३}}-\frac{३अ}{१०क^{२}}(अ+कय^{२})^{\frac{५}{३}}।$$

अथवा, $\int(अ+कय^{न})^{\frac{प}{व}}य^{म-१}\times ताय$

$$=\int(अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}य^{\frac{नप}{व}+म-१}\times ताय$$

$$=\int य^{-न-१}(अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}य^{\frac{नप}{व}+म+न}\times ताय$$

$$=\int अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१}\times य^{-न-१}(अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}(अय^{-न}+क-क)^{-\left(\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१\right)}\times ताय$$

यहां भी यदि $र=अय^{-न}+क$ तो $तार=-अनय^{-न-१}\times ताय$

$\therefore ताय=-\frac{तार}{अनय^{-न-१}}$

इस लिये

$$\int अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१}\times य^{-न-१}(अय^{-न}+क-क)^{-\left(\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१\right)}\times ताय(अय^{-न}+क)^{\frac{प}{व}}$$

$= -\frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१}}{अन}\int र^{\frac{प}{व}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१)} \times तार$। यहां यदि $\frac{म}{न}+\frac{प}{व}$ यह ऋणात्मक अभिन्न संख्या हो तो द्वियुक्पद से चलराशि जान सकते हो

जैसे $\int\frac{ताय}{य^२\sqrt{अ+य^२}} = \int य^{-२}(अ+य^२)^{-\frac{१}{२}}ताय$

यहाँ म $-$ १ $=-$ २ ∴ म $=-$१, न $=$ २, और $\frac{प}{व}=-\frac{१}{२}$

∴ $\frac{म}{न}+\frac{प}{व}=-\frac{१}{२}-\frac{१}{२}=-$ १ और क $=$ १,

इस लिये— $\frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१}}{अन}\int र^{\frac{प}{व}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{प}+१)} \times तार$

$=-\frac{अ^०}{२अ}\int र^{-\frac{१}{२}}(र-क)^०\times तार = -\frac{१}{२अ}\int र^{-\frac{१}{२}}तार$

$=\frac{१}{अ}\cdot र^{\frac{१}{२}}$ यहाँ र $=$ अय$^{-२}+१$,

और $\int\frac{ताय}{(अ^२+य^२)^{\frac{३}{२}}} = \int य^०(अ^२+य^२)^{-\frac{३}{२}}$ ताय

यहाँ म$-$१ $=$ ०. ∴ म $=$ १, $\frac{प}{व}=-\frac{३}{२}$

न $=$ २, $\frac{म}{न}+\frac{प}{व}=\frac{१}{२}-\frac{३}{२}=-$१ और अ^२ $=$ अ, र $=$ (अ^{२}य$^{-२}+१$)

इस लिये— $\frac{अ^{\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१}}{अन}\int र^{\frac{प}{व}}(र-क)^{-(\frac{म}{न}+\frac{प}{व}+१)}\times तार$

$=-\frac{१}{२अ^२}\int र^{-\frac{३}{२}}(र-क)^०तार$

$=-\frac{१}{२अ^२}\int र^{-\frac{३}{२}}तार = -\frac{१}{२अ^२}\times-\frac{२}{१}र^{-\frac{१}{२}}=\frac{१}{अ^२\sqrt{र}}$

$=\frac{१}{अ^२\sqrt{अ^२य^{-२}+१}}=\frac{य}{अ^२\sqrt{अ^२+य^२}}$।

(५) $\int \frac{य^{म}ताय}{(अ+कय)^{न}} = \frac{१}{क^{म}}\int \frac{(अ+कय-अ)^{म}}{(अ+कय)^{न}}ताय$

$=\frac{१}{क^{म}}\int\frac{(र-अ)^{म}}{र^{न}}\frac{तार}{क}$, यदि $र=अ+कय$,

$$=\frac{१}{क^{म+१}}\int\frac{र^{म}-मअ\cdot र^{म-१}+अ^{२}\cdot\frac{म(म-१)}{\lfloor २}र^{म-२}-\dots}{र^{न}}\cdot तार$$

$$=\frac{१}{क^{म+१}}\int\left(र^{म-न}-मअर^{म-न-१}+अ^{२}\cdot\frac{म(म-१)}{\lfloor २}र^{म-न-२}-\dots\right)तार$$

$$=\frac{१}{क^{म+१}}\left\{\frac{र^{म-न+१}}{म-न+१}-\frac{मअ}{म-न}र^{म-न}+अ^{२}\frac{म(म-१)}{\lfloor २}\cdot\frac{र^{म-न-१}}{म-न-१}-\dots\right\}$$ ।

(६) $\int\frac{ताय}{अ+कय+गय^{२}}=\int\frac{४ग\cdot ताय}{४अग+४कगय+४ग^{२}य^{२}}$

$$=\int\frac{४गताय}{(२गय+क)^{२}+४अग-क^{२}}$$

$$=\int\frac{४गताय}{र^{२}+४अग-क^{२}}=\int\frac{२तार}{र^{२}+४अग-क^{२}}$$ (यदि $२गय+क=र$)

$$\frac{२}{\sqrt{४अग-क^{२}}}स्प^{-१}\frac{र}{\sqrt{४अग-क^{२}}}$$

यदि $४अग>क^{२}$ और अ, क, ग सब धन हों

वा, $\int\frac{२तार}{र^{२}+४अग-क^{२}}=२\int\frac{१}{२ख}\left(\frac{तार}{र-ख}-\frac{तार}{र+ख}\right)$

$$=\frac{१}{ख}ला\frac{र-ख}{र+ख}$$

(यदि $ख=\sqrt{क^{२}-४अग}$ और ४ अग $\angle क^{२}$)

$$\therefore\frac{१}{ख}ला\frac{र-ख}{र+ख}=\frac{१}{\sqrt{क^{२}-४अग}}ला\frac{२गय+क-\sqrt{क^{२}-४अग}}{२गय+क+\sqrt{क^{२}-४अग}}$$

(७) $\int\frac{ताय}{(य+अ)(य+क)}=\int\frac{१}{अ-क}\left(\frac{ताय}{य+क}-\frac{ताय}{य+अ}\right)$

$$=\frac{१}{अ-क}\int\left(\frac{ताय}{य+क}-\frac{ताय}{य+अ}\right)=\frac{१}{अ-क}ला\frac{य+क}{य+अ}$$ ।

(८) $\frac{(त+नय)ताय}{अ+कय+गय^{२}}=\frac{१}{२ग}\int\frac{\{२तग+न(क+२गय-क)\}ताय}{अ+कय+गय^{२}}$

$$=\frac{१}{२ग}\left\{\int\frac{न(क+२गय)ताय}{अ+कय+गय^२}+\int\frac{(२ तग—नक)ताय}{अ+कय+गय^२}\right\}$$

$$=\frac{न}{२ग}ला\,(अ+कय+गय^२)+\left(\frac{२तग—नक}{२ग}\right)\int\frac{ताय}{अ+कय+गय^२}$$

दूसरे खण्ड का चल ६वें उदाहरण से स्पष्ट है ।

$$(९)\ \frac{(अ+कय\,)ताय}{य^२—२अ_१य+अ_१^२+क_१^२}=\int\frac{\{\,अ+कअ_१+क(य—अ_१)\,\}\,ताय}{य^२—२अ_१य+अ_१^२+क_१^२}$$

$$=\int\frac{(अ+कअ_१)ताय}{(य—अ_१)^२+क_१^२}+\int\frac{क(य—अ_१)ताय}{(य—अ_१)^२+क_१^२}$$

$$=\frac{अ+कअ_१}{क_१}स्प^{-१}\,\frac{य—अ_१}{क_१}+\frac{क}{२}ला\,\{\,(य—अ_१)^२+क_१^२\,\}$$

(१०) ९ वे उदाहरण मे यदि, $अ=१,—क=अ_१=$ कोज्याइ,और $क_१=$ ज्याइ

$$तो\int\frac{(१—कोज्याइ\,य)ताय}{१-२कोज्याइ\times य+य^२}=\frac{१—कोज्या^२इ}{ज्याइ}स्प^{-१}\,\frac{य—कोज्याइ}{ज्याइ}$$

$$—\frac{कोज्याइ}{२}ला\,\{\,(\,य—कोज्याइ\,)^२+ज्या^२इ\,\}$$

$$=ज्याइ\,स्प^{-१}\,\frac{य—कोज्याइ}{ज्याइ}-\frac{कोज्याइ}{२}ला(य^२—२कोज्याइ\times य+१)।$$

$$(११)\ \int\frac{(अ^२\pm य^२)^{\frac{१}{२}}\,ताय}{य^२}=\int\left(\frac{अ^२ताय}{य^२\sqrt{अ^२\pm य^२}}\pm\frac{य^२ताय}{य^२\sqrt{अ^२\pm य^२}}\right)$$

$$\int\pm ताय(अ^२\pm य^२)^{—\frac{१}{२}}+\int अ^२य^{—३}\,(अ^२य^{—२}\,\pm१)^{—\frac{१}{२}}ताय$$

$$=—\sqrt{अ^२य^{—२}+१}\,+ला(\,य+\sqrt{अ^२+य^२})\ \text{यदि धन चिह्न हो ।}$$

$$=—\sqrt{अ^२य^{—२}—१}—ज्या^{-१}\frac{य}{अ}\text{यदि ऋण हो ।}$$

$$(१२)\ \int\frac{अ^२ताय}{य\sqrt{य^२\pm अ^२}}=\int अ^२य^{—२}\,(\pm अ^२य^{—२}+१)^{—\frac{१}{२}}ताय$$

$$=\int(अ^२य^{—२}+१—१)(अ^२य^{—२}+१)^{—\frac{१}{२}}ताय,\ \ +\text{चिन्ह से}$$

$$=\int(अ^२य^{—२}\,+१)^{\frac{१}{२}}ताय—\int\frac{ताय}{\sqrt{अ^२य^{—२}+१}}\text{अत्र यहां}(अ^२य^{—२}\,+१)^{\frac{१}{२}}$$

और $\frac{१}{(अ^२य^{-२}+१)^{\frac{१}{२}}}$ का मान द्वियुक्पदसिद्धान्त से ले आकर एक श्रेढी

में चलराशि का मान जान सकते हो इसी प्रकार—चिन्ह से भी जान लो

$$(१३)\ \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{२}\sqrt{\text{अ}^{२}\text{य}^{२}+१}} = \int \frac{\text{ताय}\cdot\text{य}^{-२}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२}}} = \int \frac{\text{ताय}\cdot\text{य}^{-३}}{\sqrt{\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२}}}$$

$$= -\frac{१}{२}\int -२\ \text{तायय}^{-३}(\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२})^{-\frac{१}{२}} = -(\text{अ}^{२}+\text{य}^{-२})^{\frac{१}{२}}\ ।$$

$$(१४)\ \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}+\text{ककोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ}(\text{ज्या}^{२}\frac{\text{य}}{२}+\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{य}}{२})+\text{क}(\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{य}}{२}-\text{ज्या}^{२}\frac{\text{य}}{२})}$$

$$= \int \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{क})\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{य}}{२}+(\text{अ}-\text{क})\text{ज्या}^{२}\frac{\text{य}}{२}} = \int \frac{\text{ताय छे}^{२}\frac{\text{य}}{२}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{स्प}^{२}\frac{\text{य}}{२}}$$

$$= २\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^{२}},\ \text{यदि ल} = \text{स्प}\frac{\text{य}}{२}$$

इस लिये यदि अ>क तो

$$२\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^{२}} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}+\text{ल}^{२}} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^{२}+\text{ल}^{२}}$$

यदि $\text{ग}^{२} = \frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}$ तो ११ सूत्र से

$$\frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^{२}+\text{ल}^{२}} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\cdot\frac{१}{\text{ग}}\text{स्प}^{-१}\frac{\text{ल}}{\text{ग}} = \frac{२}{\text{अ}-\text{क}}\frac{\sqrt{\text{अ}-\text{क}}}{\sqrt{\text{अ}+\text{क}}}\text{स्प}^{-१}\frac{\text{ल}}{\text{ग}}$$

$$= \frac{२}{\sqrt{\text{अ}^{२}-\text{क}^{२}}}\text{स्प}^{-१}\left(\sqrt{\frac{\text{अ}-\text{क}}{\text{अ}+\text{क}}}\text{स्प}\frac{१}{२}\text{य}\right)$$

और यदि अ<क तो

$$२\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}+(\text{अ}-\text{क})\text{ल}^{२}} = २\int \frac{\text{ताल}}{\text{अ}+\text{क}-(\text{क}-\text{अ})\text{ल}^{२}} = \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{\text{ताल}}{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}-\text{अ}}-\text{ल}^{२}}$$

$$= \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}^{२}-\text{ल}^{२}},\ \text{यदि}\ \frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{क}-\text{अ}} = \text{ग}^{२}$$

$$= \frac{२}{\text{क}-\text{अ}}\int \frac{१}{२\text{ग}}\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ग}-\text{ल}}+\frac{\text{ताल}}{\text{ग}+\text{ल}}\right) = \frac{१}{\text{ग}(\text{क}-\text{अ})}\left(\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}-\text{ल}}+\int \frac{\text{ताल}}{\text{ग}+\text{ल}}\right)$$

$$= \frac{१}{ग(क—अ)}\left(—\int\frac{—ताल}{ग—ल} + \int\frac{ताल}{ग+ल}\right)$$

$$= \frac{१}{ग(क—अ)}\Big[ला(ग+ल)—ला(ग—ल)\Big]$$

$$= \frac{१}{ग(क—अ)}ला\frac{ग+ल}{ग—ल} = \frac{१}{\sqrt{क^२—अ^२}}ला\frac{\sqrt{अ+क}+\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}}{\sqrt{अ+क}—\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}}$$

यदि $\sqrt{अ+क}—\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}$ यह ऋणात्मक हो तो

$$\int\frac{ताय}{अ+क\,कोज्याय} = \frac{१}{\sqrt{क^२—अ^२}}ला\frac{\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}+\sqrt{अ+क}}{\sqrt{क—अ}\,स्प\frac{य}{२}—\sqrt{अ+क}}$$

यदि यहां $\int\frac{ताय}{ग+क\,ज्याय}$ यह जानना हो तो

$य = \frac{\pi}{२}+ल$ कल्पना करने से $\int\frac{ताय}{अ+क\,ज्याय} = \int\frac{ताल}{अ+\,ककोज्याल}$ यह

ठीक १४ वें उदाहरण के ऐसा हो गया।

१५। जैसे ज्याय = र तो $ज्या^{-१}र$ = य अर्थात् ज्या से जिसका बोध होता है उस से उलटा $ज्या^{-१}$ से बोध होता है। इसी प्रकार कल्पना करो कि फ से जो बोध होता है उस से उलटा $फ^{-१}$ से तब $फ\{फ^{-१}(य)\}$ = य ऐसा होगा अर्थात् $फ^{-१}$ से यदि $ज्या^{-१}$ ग्रहण करो तो इसे ऐसे बोलेंगे कि य का जो क्रमज्या खण्ड पर से चाप हो उस की क्रमज्या य के बराबर है।

इस पर से यदि $\int फ(य)\,ताय$ इस का ज्ञान हो तो

$\int फ^{-१}(य)ताय$ इसका भी ज्ञान हो सकता है जैसे

यदि $फ^{-१}(य) = ल$ तो $य = फ(ल)$ तब

$फ^{-१}(य)\,ताय = \int ल\frac{ताय}{ताल}ताल = यल—\int यताल = य\,ल—\int फ(ल)ताल$। ऊपर जो उदाहरण दिखाये गये है उनके बल से हज़ारहों चलनयन कर सकते हो और

जब अनन्त चल का मान आ गया तब उस में स्थिराङ्कों का उत्थापन देने से सान्तचलानयन भी सहज में कर सकते हो ।

जैसे खण्ड चलानयन से

$$\int \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय} = -\int \frac{\text{ताकोज्याय}}{\text{ताय}}\text{ज्या}^{\text{न—१}}\text{यताय}$$

$$= -\text{कोज्यायज्या}^{\text{न—१}}\text{य} + (\text{न—१})\int \text{कोज्या}^{२}\text{यज्या}^{\text{न—२}}\text{ यताय}$$

$$= -\text{कोज्यायज्या}^{\text{न—१}}\text{य} + (\text{न—१})\int (१-\text{ज्या}^{२}\text{य})\text{ज्या}^{\text{न—२}}\text{यताय}$$

$$= -\text{कोज्यायज्या}^{\text{न—१}}\text{य} + (\text{न—१})\int \text{ज्या}^{\text{न—२}}\text{यताय}$$

$-(\text{न—१})\int \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय}$ सम शोधन से

$$\text{न}\int \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय} = -\text{कोज्यायज्या}^{\text{न—१}}\text{य} + (\text{न—१})\int \text{ज्या}^{\text{न—२}}\text{यताय}$$

इस लिये $\int \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय} = -\frac{\text{कोज्यायज्या}^{\text{न—१}}\text{य}}{\text{न}} + \frac{\text{न—१}}{\text{न}}\int \text{ज्या}^{\text{न—२}}\text{यताय}$

यहां पर यदि न एक से अधिक और धन हो तो स्पष्ट है कि य के स्थान में ० और $\frac{\pi}{२}$ का उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय} = \frac{\text{न—१}}{\text{न}}\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न—२}}\text{यताय} ।$$

इसी प्रकार यदि न धन और ३ से अधिक हो तो

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न—२}}\text{यताय} = \frac{\text{न—३}}{\text{न—२}}\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न—४}}\text{यताय} ।$$

इसी प्रकार यदि न धन और सम हो तो लगातार यही विधि करने से

$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{ताय} = \frac{\pi}{२}$ और यदि धन न विषम हो तो अन्त में

$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्यायताय} = १$ यह होगा । इस लिये

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय} = \frac{(\text{न}-१)\,(\text{न}-३)\,(\text{न}-५)\cdots १}{\text{न}\,(\text{न}-२)\,(\text{न}-४)\cdots २}\,\frac{\pi}{२}\cdot \text{ (यदि न सम)।}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय} = \frac{(\text{न}-१)\,(\text{न}-३)\,(\text{न}-५)\cdots २}{\text{न}\,(\text{न}-२)\,(\text{न}-३)\cdots ३} \text{ (यदि न विषम)।}$$

यहाँ कल्पना करो कि न धन और सम है तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय} = \frac{\text{न}-१}{\text{न}}\,\frac{\text{न}-३}{\text{न}-२}\,\frac{\text{न}-५}{\text{न}-४}\cdots\frac{३}{४}\,\frac{१}{२}\,\frac{\pi}{२} \qquad (१)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{यताय} = \frac{\text{न}-२}{\text{न}-१}\,\frac{\text{न}-४}{\text{न}-३}\,\frac{\text{न}-६}{\text{न}-५}\cdots\frac{२}{३} \qquad (२)$$

अब यहाँ स्पष्ट है कि (२) प्रक्रम से श्रेढी में यदि मान ले आवो तो

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{यताय}$ यह $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{यताय}$ इस से छोटा और

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय}$ इस से बड़ा है क्योंकि ऊपर के मान नीचे के मान से

उत्तरोत्तर छोटे हैं। परन्तु पूर्व सिद्ध है कि

$$\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-२}\text{यताय}} = \frac{\text{न}-१}{\text{न}} \cdot \therefore \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{यताय}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{न}-१}\text{यताय}} \text{ यह १ से}$$

छोटा और $\frac{\text{न}-१}{\text{न}}$ से बड़ा है। इस लिये (१) और (२) के दहिने पक्ष का

संबन्ध १ से न्यून और $\frac{\text{न}-१}{\text{न}}$ से बड़ा हुआ। इस प्रकार से

$$\frac{\pi}{२} > \frac{२\cdot२\cdot४\cdot४\cdot६\cdot६ \cdots (\text{न}-२)\,(\text{न}-२)}{१\cdot३\cdot३\cdot५\cdot५\cdot७ \cdots (\text{न}-३)\,(\text{न}-१)} \text{ और}$$

$$\frac{\pi}{२} < \frac{२ \cdot २ \cdot ४ \cdot ४ \cdot ६ \cdot ६ \cdots (न-३)(न-२)}{१ \cdot ३ \cdot ३ \cdot ५ \cdot ५ \cdot ७ \cdots (न-२)(न-१)} \frac{न}{न-२}$$ यह सिद्ध हुआ।

रूप व्यासार्द्ध की परिधि जानने के लिये इसे वालिस का सूत्र Wallis's Formula कहते हैं। इस प्रकार से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त नये उत्पन्न हो सकते है।

अभ्यास के लिये और उदाहरण

१। $\int \frac{ताय}{\sqrt{१-कय-य^{२}}} = ज्या^{-१} \frac{क+२य}{\sqrt{४+क^{२}}}$

२। $\int \frac{ताय}{\sqrt{१-५य-य^{२}}} = ज्या^{-१} \frac{५+२य}{\sqrt{२९}}$

३। $\int क\, य^{न} लायताय = \frac{क}{न+१} य^{न+१} \left(लाय - \frac{१}{न+१}\right)$

४। $\int २\, य^{२} लायताय = \frac{२}{३} य^{३} \left(लाय - \frac{१}{३}\right)$

५। $\int यलायताय = \frac{१}{२} य^{२} \left(लाय - \frac{१}{२}\right)$

६। $\int लायताय = य\,(लाय - १)$

७। $\int अय\sqrt{य+१} = \frac{२अ}{५}(य+१)^{\frac{५}{२}} - \frac{२अ}{३}(य+१)^{\frac{३}{२}}$

८। $\int \frac{ताय}{\sqrt{य+२} - \sqrt{य+१}} = \frac{२}{३}\left\{(य+२)^{\frac{३}{२}} + (य+१)^{\frac{३}{२}}\right\}$

९। $\int य^{३}(३+य^{२}\sqrt{३})^{\frac{२}{३}}$

$$= \frac{१}{१६}(३+य\sqrt{३})^{\frac{८}{३}} - \frac{३}{१०}(३+य\sqrt{३})^{\frac{५}{३}}$$

१०। $\int (अ+कय)^{२} य^{४} ताय,$

$$= \frac{१}{क^{५}}\left(\frac{र^{७}}{७} - \frac{२}{३}अर^{६} + \frac{६}{५}अ^{२}र^{५} - अ^{३}र^{४} + \frac{अ^{४}}{३}र^{३}\right)$$ यदि $र = अ + कय$

११। $\int \frac{य^{८} ताय}{(१+२य)^{४}}$

$$= \frac{१}{६४}\left[\frac{र^२}{२} - \frac{५}{१} र + १०लार + \frac{१०}{र} - \frac{५}{२र^२} + \frac{१}{३र^३}\right]$$

यदि र = १ + २य ।

१२ । $\int \frac{ताय}{१ + २य + ३य^२} = \frac{१}{\sqrt{२}} स्प^{-१} \frac{३य + १}{\sqrt{२}}$

१३ । $\int \frac{ताय}{४ + ५य + य^२} = \frac{१}{३} ला \left[\frac{य + १}{य + ४}\right]$

१४ । $\int \frac{ताय}{(य + ४)(य + ५)} = ला \frac{य + ४}{य + ५}$

१५ । $\int \frac{(१ + २य)ताय}{१ + २य + ३य^२}$

$$= \frac{१}{३}\left\{ ला (१ + २य + ३य^२) + \frac{१}{\sqrt{२}} स्प^{-१} \frac{३य + १}{\sqrt{२}} \right\}$$

१६ । $\int \frac{(१ + २य) ताय}{४ + ५य + य^२} = ला (४ + ५य + य^२) - \frac{४}{३} ला \left[\frac{य + १}{य + ४}\right]$

१७ । $\int \frac{(१ + २य) ताय}{(य - अ)^२ + क^२}$

$$= \frac{१ + २अ}{क} स्प^{-१} \frac{य - अ}{क} + ला \left\{ (य - अ)^२ + क^२ \right\}$$

१८ । $\int \frac{(१ + २य)ताय}{य^२ - ४य + ८} = \frac{५}{२} स्प^{-१} \frac{य - २}{२} + ला \left\{ (य - २)^२ + ४ \right\}$

१९ । $\int \frac{रताय}{र - यकोज्याइ + य^२}$

$$= ज्याइ\, स्प^{-१} \frac{य - कोज्याइ}{ज्याइ} - \frac{कोज्याइ}{२} ला \left\{ (य - १)^२ + ४यज्या^२ \frac{इ}{२} \right\}$$

यदि र = १ — य कोज्याइ ।

२० । $\int \frac{ताय\sqrt{१ + य^२}}{य^२} = \frac{ला (य + \sqrt{१ + य^२})^य - \sqrt{१ + य^२}}{य}$

२१ । $\int \frac{ताय\sqrt{१ - य^२}}{य^२} = - \frac{\sqrt{१ - य^२}}{य} - ज्या^{-१}य$

२२ । सिद्ध करो कि $\int \frac{अ ताय}{य\sqrt{य^२ - अ^२}} = - ज्या^{-१} \frac{अ}{य}$

वा $\int \frac{\text{अ ताय}}{\sqrt{\text{य}^2 - \text{अ}^2}} = \text{कोज्या}^{-1} \frac{\text{अ}}{\text{य}}$

२३। सिद्ध करो कि $\int \frac{\text{अताय}}{\text{य}\sqrt{\text{य}^2+\text{अ}^2}} = \text{ला} \frac{\text{य}}{\text{अ}+\sqrt{\text{य}^2+\text{अ}^2}}$

२४। सिद्ध करो कि $\int \frac{\text{अताय}}{\text{य}\sqrt{\text{अ}^2-\text{य}^2}} = \text{ला} \frac{\text{य}}{\text{अ}+\sqrt{\text{अ}^2-\text{य}^2}}$

२५। $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2\sqrt{\text{य}^2+१}} = -(१+\text{य}^{-2})^{\frac{१}{2}}$

२६। $\int \frac{\text{ताय}}{२+\text{कोज्याय}} = \frac{२}{\sqrt{३}} \text{स्प}^{-1} \left[\frac{१}{\sqrt{३}} \text{स्प} \tfrac{१}{२}\text{य}\right]$

२७। $\int \frac{\text{ताय}}{१+२\text{कोज्याय}} = \frac{१}{\sqrt{३}} \text{ला} \frac{\text{स्प}\tfrac{१}{२}\text{य}+\sqrt{३}}{\text{स्प}\tfrac{१}{२}\text{य}-\sqrt{३}}$

२८। $\text{पज्याप कोज्यापताप} = \frac{\text{ज्या२प}}{८} = \frac{\text{पकोज्या२प}}{४}$

२९। $\int \frac{\text{इ}^{\text{कय}}\text{ताय}}{\text{इ}^{२\text{कय}}+१} = \frac{१}{\text{क}} \text{स्प}^{-1} (\text{इ}^{\text{कय}})$

३०। $\int \frac{\sqrt{\text{य}+\text{क}}}{\sqrt{\text{य}}} \text{ताय} = \sqrt{\text{य}^2+\text{कय}} + \text{क}\cdot\text{ला}(\sqrt{\text{य}+\text{क}}+\sqrt{\text{य}})$

३१। $\int \text{ज्या}^4 \tfrac{१}{२} \text{यताय} = \frac{३\text{य}}{८} + \frac{\text{ज्या२य}}{१६} - \frac{\text{ज्या}\cdot\text{य}}{२}$

३२। $\int \text{ष}\cdot\text{स्पष छे}^2 \text{षताष} = \frac{\text{छे}^2\text{ष}}{२}\text{ष} - \tfrac{१}{२} \text{स्पष}$

३३। खण्डचलानयन से सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{कय}}\text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{इ}^{\text{कय}}(\text{ककोज्याअय}+\text{अज्याअय})}{\text{अ}^2+\text{क}^2}$$

३४। सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{अय}}\text{ज्यामय कोज्यानयताय}$$

$$= \frac{\text{इ}^{\text{अय}}\{\text{अज्या}(\text{म}+\text{न})\text{य}-(\text{म}+\text{न})\text{कोज्या}(\text{म}+\text{न})\text{य}\}}{२\{\text{अ}^2+(\text{म}+\text{न})^2\}}$$

$$+ \frac{\text{इ}^{\text{अय}}\{\text{अज्या}(\text{म}-\text{न})\text{य}-(\text{म}-\text{न})\text{कोज्या}(\text{म}-\text{न})\text{य}\}}{२\{\text{अ}^2+(\text{म}-\text{न})^2\}}$$

३५ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{ज्यायकोज्याय}} = \text{ला}\ (\text{स्पय})$

३६ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{२ज्याय}} = \text{ला}\left(\text{स्प}\frac{\text{य}}{\text{२}}\right)^{\frac{1}{2}}$, और $\int \frac{\text{ताय}}{\text{२कोज्याय}}$

$$= \text{ला}\left\{\text{कोस्प}\left(\frac{\pi}{\text{४}} - \frac{\text{य}}{\text{२}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}} = \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{\text{२}} + \frac{\text{य}}{\text{२}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

३७ । $\int \frac{\text{कयताय}}{(\text{अ}-\text{य})^{3}} = \frac{\text{अक}}{\text{२}(\text{अ}-\text{य})^{3}} - \frac{\text{क}}{\text{अ}-\text{य}}$

३८ । $\int \frac{\text{२} + \text{कोज्याय}}{\text{२ य} + \text{ज्याय}}\text{ताय} = \text{ला}\ (\text{२ य} + \text{ज्याय})$

३९ । $\int \frac{\text{ताय}(\text{लाय})^{\text{म}}}{\text{य}} = \frac{(\text{लाय})^{\text{म}+1}}{\text{म}+\text{१}}$

४० । $\frac{\text{२ताय}}{\text{कोज्याय} + \text{ज्याय}} = \sqrt{\text{२}}\ \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{\text{८}} + \frac{\text{य}}{\text{२}}\right)\right\}$

४१ । $\int \frac{\text{२य} + \text{२ज्याय}}{\text{१} + \text{कोज्याय}}\text{ताय} = \text{२य स्प}\frac{\text{य}}{\text{२}}$

४२ । $\int \frac{\text{ग ज्या}^{2}\text{यताय}}{\text{अ} + \text{क}\cdot\text{कोज्या}^{2}\text{य}} = \frac{\text{ग}}{\text{क}}\left[\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}}\right]^{\frac{1}{2}} \text{स्प}^{-1}\frac{\text{स्पय}\sqrt{\text{अ}}}{\sqrt{\text{अ}+\text{क}}} - \frac{\text{गय}}{\text{क}}$

४३ । $\int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{क ज्याय} + \text{ग कोज्याय}} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \text{ग}(\frac{\text{क}}{\text{ग}}\cdot\text{ज्याय} + \text{कोज्याय})}$

$$= \int \frac{\text{ताय}}{\text{अ} + \frac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}}\text{कोज्या}(\text{य}-\text{इ})} = \int \frac{\text{ताल}}{\text{अ} + \frac{\text{ग}}{\text{कोज्याइ}}\text{कोज्याल}}$$

यदि $\frac{\text{क}}{\text{ग}} = \text{स्पइ},\ \text{य}-\text{इ} = \text{ल}$

अब १४वे उदाहरण से सिद्ध कर लो ।

४४ । $\int \frac{\text{अ यताय}}{\sqrt{\text{२अय}-\text{य}^{2}}} = \text{अ उज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}} - \text{अ}\sqrt{\text{२अय}-\text{य}^{2}}$

८५ । $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{य} - \text{८य} + \text{२}}} = \text{ला}\left\{\text{य} - \text{४} + \sqrt{\text{य} - \text{८य} + \text{२}}\right\}$

४६ । $\int \text{तायस्प}^{\text{न}}\text{य} = \frac{\text{य}^{\text{न}-1}}{\text{२न}-\text{१}} - \frac{\text{य}^{\text{न}-1}}{\text{२न}-\text{३}} + \frac{\text{य}^{\text{न}-1}}{\text{२न}-\text{५}} - \frac{\text{य}^{\text{न}-1}}{\text{२न}-\text{७}}$

$+\cdots-(-१)^{न}य+(-१)^{न}प्र$ यदि $य=स्पप$

४७। $\int\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न}ताय=य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न}-नय\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न-१}$

$+न(न-१)य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{न-२}-न(न-१)(न-२)य\left\{ला\left(\right)\frac{य}{अ}\right\}^{न-३}+\cdots$

४८। $\int\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{४}ताय=य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{४}-४य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{३}$

$+१२य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}^{२}-२४य\left\{ला\left(\frac{य}{अ}\right)\right\}+२४य$

४९। $\int\frac{क\ उज्या^{-१}\frac{य}{अ}}{\sqrt{(२अय-य)}}ताय=\frac{क}{२}\left[उज्या^{-१}\frac{य}{क}\right]^{२}$

५०। $\int ला\left\{(लाय)^{\frac{१}{य}}\right\}ताय=लाय\left\{ला\ (लाय)-१\right\}$

५१। सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\pi}अप्रज्यापताप=\pi\cdot अ$$

५२। $\int_{0}^{अ}ताय\sqrt{अ^{२}-य^{२}}=\frac{\pi अ^{२}}{४}$

५३। $\int\frac{इ}{१}\cdot\frac{ला\ (लाय)}{य}ताय=०$

५४। $\int_{0}^{\pi}इ^{-य}कोज्या^{२}यताय=\frac{२}{१५}(१+इ^{-\pi})$

५५। $\int_{0}^{\frac{\pi}{४}}पस्पप\ छे^{२}पताप=\frac{\pi}{४}-\frac{१}{२}$

५६। अकग वृत्तार्द्ध के के केन्द्र पर एक कीट वैठाथा और दूसरा अ विन्दु पर। दूसरा परिधि के राह से और पहला केग व्यासार्ध के राह से ग विन्दु पर आने के लिये चला। दूसरा परिधि मे अ विन्दु से जितनी चापात्मक दूरी पर पहुँचता था उसकी कोटिज्या से उस के प्रतिक्षण की गति को गुण देने और व्यासार्द्ध का भाग देने से जो हो उतना प्रतिक्षण पहला चलता था तो बतावो कि जब दूसरा ग विन्दु पर पहुँचा उस समय पहला कहाँ पर पहुँचा।

उ० के ही विन्दु पर लौट कर फिर पहुँचा।

५० । एक लड़के ने एक सीधी १० हाथ की पङ्क्ति में चावलों को बिछा दिया । उन चावलों को खाने के लिये एक जोड़ा कबूतर उतरे । नर एक सिरे से खाने लगा और मादा दूसरे सिरे से । नर उस सिरे से जितना हटता जाता था उससे उसके प्रतिक्षण की गति में भाग देने से जो लब्ध हो उतनी मादे की प्रति क्षणिकगति है तो बताओ कि उस सिरे से कितनी दूरी पर नर मादा से मिलेगा।

उ० ७·९३ हाथ

इति प्रथमाध्याय ।

द्वितीयाध्याय

अकरणीगत भिन्न संबन्ध का चलानयन।

१३। यदि तात्कालिक सम्बन्ध का रूप

$$\frac{अ' + क'य + ख'य^2 + \cdots + प'य^म}{अ + कय + खय^2 + \quad + पय^न}$$ ऐसा हो

जहाँ अ', क', अ, क इत्यादि स्थिराङ्क हों और म, न धन और अभिन्न हों।

यहाँ यदि न से म बड़ा हो तो बीजगणित की साधारण भागविधि से अंश में हर का भाग देकर अभिन्न लब्धि ले आ सकते हो और शेष (जिस में कि सब से बड़ा य का घात न घात से अल्प रहेगा) के नीचे हर का हर लगा दो। इस प्रकार पूर्व भिन्न का रूप अभिन्न और भिन्न दो खण्डों के योग तुल्य जो होगा उस में अभिन्न का चल तो पहले अध्याय के सूत्रों से सहज में जाना जायगा परन्तु भिन्न के चलानयन के लिये पहले इस भिन्न को अनेक भिन्नों के योग के रूप में ले आने का यत्न करते हैं।

कल्पना करो कि वह भिन्न $\frac{व}{भ}$ है। जहाँ व और भ दोनों य के फल हैं और भ के मान में य का सब से बड़ा घात न है। लाघव के लिये मान लो कि भ में $य^न$ का गुणक १ है।

कल्पना करो कि

$भ = (य - अ_१)(य - क_१)^त(य^२ - २अ_२य + अ_२^२ + क_२^२)(य^२ - २ग_१य + ग_१^२ + घ_१^२)^थ$

अब यहाँ यदि भ = ० ऐसा समीकरण हो तो इस में य का

(१) एक मान = $अ_१$ सम्भव संख्या।

(२) त तुल्य सम्भव मान = $क_१$

(३) दो असम्भव मान = $अ_२ \pm क_२\sqrt{-१}$

(४) थ जोड़े असम्भव मान, हर एक = $ग_१ \pm घ_१\sqrt{-१}$

समीकरणों के सिद्धान्त से स्पष्ट है कि सब खण्डों का घात अवश्य भ के तुल्य होगा जहाँ १ + त + २ + २थ = न। मानो कि

$$\frac{व}{भ} = \frac{आ_१}{य - अ_१} + \frac{का_१}{(य - क_१)^त} + \frac{का_२}{(य - क_१)^{त-१}} + \frac{का_३}{(य - क_१)^{त-२}} + \cdots$$

$$+ \frac{का_त}{य - क_१} + \frac{खाय + गा}{य^२ - २अ_२य + अ_२^२ + क_२^२}$$

$$+\frac{च_3 य + ज_3}{(य^2 - 2ग_1 य + ग_1^2 + घ_1^2)^3} + \frac{च_3 य + ज_3}{(य^2 - 2ग_1 य + ग_1^2 + घ_1^2)^{थ-2}} +$$

$$+\frac{च_थ य + ज_थ}{य^2 - 2ग_1 य + ग_1^2 + घ_1^2}$$

जहाँ आ, का$_1$, का$_2$, खा, गा, च$_1$, ज$_1$, इत्यादि सब स्थिराङ्क हैं।

यहाँ यदि दहिने पक्ष के सब भिन्नो का समच्छेद विधि से योग करें तो स्पष्ट है कि अंश मान व के तुल्य होगा। अब इस सरूप कमीकरण से य के समान घातों के गुणको को समान करने से स्थिराङ्को का मान व्यक्त हो जायगा।

१४। भ के मान मे $(य - क_1)^न$ इसके अवशिष्ट खण्डो के घात को फा(य) कल्पना करो और व को फ(य) मानो तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य - क_1)^न फा(य)} = \frac{फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)}{(य - क_1)^न फा(य)} + \frac{\frac{फ(क_1)}{फा(क_1)}}{(य - क_1)^न}$$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $य = क_1$ तो

$$फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य) = 0$$

इस लिये $(य - क_1)$ इससे $फ(य) - \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)$ यह निःशेष होगा।

मानो कि $य - क_1$ इस का भाग देने से लब्धि = फि(य) तो

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{(य - क_1)^न फा(य)} = \frac{फि(य)}{(य - क_1)^{न-1} फा(य)} + \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \frac{1}{(य - क_1)^न}।$$

इसी रीति से

$$\frac{फि(य)}{(य - क_1)^{न-1} फा(य)} = \frac{फि(य) - \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)}{(य - क_1)^{न-1} फा(य)} + \frac{\frac{फि(क_1)}{फा(क_1)}}{(य - क_1)^{न-1}}$$

यहाँ भी यदि $य = क_1$ तो $य - क_1$ से $फि(य) - \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} फा(य)$ निःशेष होगा। मानो कि भाग देने से लब्धि = फी(य) तो

$$\frac{फ(य)}{(य - क_1)^न फा(य)} = \frac{फी(य)}{(य - क_1)^{न-2} फा(य)} + \frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \frac{1}{(य - क_1)^न}$$

$$+ \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)(य - क_1)^{न-1}}$$

यों वार वार क्रिया करने से भी स्पष्ट हो जायगा कि

$\frac{फ(य)}{(य-क_1)^{त} फा(य)}$ इस का मान अनेक खण्ड भिन्नों में ला सकते हैं।

जिनके मान क्रम से $\frac{फ(क_1)}{फा(क_1)} \frac{1}{(य-क_1)^{त}}, \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)} \frac{1}{(य-क_1)^{त-1}}$

इत्यादि हैं। यहाँ अत्यन्त स्पष्ट है कि $\frac{फ(क_1)}{फा(क_1)}, \frac{फि(क_1)}{फा(क_1)}$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं इस लिये १३वें प्रक्रम मे जो आ, $का_1$, $का_2$ इत्यादि स्थिराङ्क कल्पना किया है वह ठीक है। इस प्रकार आ, $का_1$ $का_2$ इत्यादि को स्थिराङ्क ठहराना मिस्टर होमरशाम काक्स (Mr Homeısham Cox) ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) मे लिखा है। इस प्रकार अकरणीगत भिन्न को खण्ड भिन्नों के रूप मे ला सकते हैं।

इसी तरह यदि भ $= (य-अ_1)(य-क_1)(य-ख_1)$ ऐसा हो

जहाँ $अ_1$, $क_1$, $ख_1$, इत्यादि सब परस्पर भिन्न और सम्भाव्य संख्या हैं

तो $\frac{व}{भ} = \frac{आ_1}{य-अ_1} + \frac{का_1}{य-क_1} + \frac{खा_1}{य-ख_1} + \cdots$ ऐसा कल्पना कर सकते हो फिर पूर्ववत् सरूप समीकरण से $आ_1$, $का_1$, $खा_1$ इत्यादि के मान जान सकते हो।

१५। लाघव से भी $आ_1$, $का_1$, इत्यादि का मान निकाल सकते हो कल्पना करो कि $\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)}$ और $फा(य) = (य-अ_1)(य-क_1)\cdots$ तो

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{आ_1}{य-अ_1} + \frac{का_1}{य-क_1} + \frac{खा_1}{य-ख_1} + \cdots$$

इस लिये

$$फ(य) = आ_1 (य-क_1)(य-ख_1)$$
$$+ का_1 (य-अ_1)(य-ख_1) \quad + खा_1 (य-अ_1)(य-क_1) \cdots +$$

इस सरूप समीकरण मे चाहे य का मान जो मानो परन्तु समीकरण सत्य ही रहेगा इस लिये मानो कि य $= अ_1$ तो

$$फ(अ_1) = आ_1 (अ_1-क_1)(अ_1-ख_1) \quad (१)$$

क्योंकि और खण्ड $= 0$

परन्तु $फा(य) = (य-अ_1)(य-क_1)(य-ख_1)$

इस लिये $फा'(य) = (य-क_१)(य-ख_१) + (य-अ_१)(य-ख_१) + (य-अ_१)(य-क_१) + \ldots$

य के स्थान मे $अ_१$ का उत्थापन देने से

$फा'(अ_१) = (अ_१ - क_१)(अ_१ - ख_१)$

इस लिये (१) समीकरण का रूप

$$फ(अ_१) = आ_१ फा'(अ_१) \therefore आ_१ = \frac{फ(अ_१)}{फा'(अ_१)}$$

इसी तरह $का_१ = \frac{फ(क_१)}{फा'(क_१)}$ $खा_१ = \frac{फ(ख_१)}{फा'(ख_१)}$, इत्यादि।

(१) उदाहरण $\int \frac{५य^२ - १००य + १५१}{य^२ - ५य + ६}$ ताय इस का मान बतावो।

$$यहाँ \frac{५य^२ - १००य + १५१}{य^२ - ५य + ६} = ५ य + २५ + \frac{-५य + १}{य^२ - ५य + ६}$$

$$= ५य + २५ + \frac{आ_१}{य-२} + \frac{का_१}{य-३}$$

समच्छेद करने से, $-५य + १ = य(आ_१ + का_१) - (३आ_१ + २का_१)$

इस लिये सरूप समीकरण से

$-५ = आ_१ + का_१$, $-१ = ३आ_१ + २का_१$

$आ_१ = ९$, $का_१ = -१४$, इस लिये

$$\int \frac{५य^२ - १००य + १५१}{य^२ - ५य + ६} ताय$$

$$= \int ५य\, ताय + \int २५\, ताय + ९ \int \frac{ताय}{य-२} - १४ \int \frac{ताय}{य-३}$$

$$= \tfrac{५}{२}य^२ + २५\, य + ९ला(य-२) - १४ला(य-३)$$

यह तेरहवे प्रक्रम की विधि से आया है।

१५वें प्रक्रम से निकालना हो तो अभिन्न खण्ड को छोड़ कर

$$\frac{-५य + १}{य^२ - ५य + ६} = \frac{-५य + १}{(य-२)(य-३)} = \frac{फ(य)}{फा(य)},$$ यहाँ $अ_१ = २$, $क_१ = ३$,

$फ(य) = -५य + १$, $फा(य) = (य-२)(य-३)$ और

$फा'(य) = २य - ५$ इस लिये $आ_१ = \frac{फ(अ_१)}{फा'(अ_१)} = \frac{-५ \times २ + १}{२ \times २ - ५} = \frac{-९}{-१} = ९$

और $का_1 = \frac{फ(क_1)}{फा'(क_1)} = \frac{-५ \times ३ + १}{२ \times ३ - ५} = \frac{-१४}{१} = -१४$,

फिर पूर्ववत् क्रिया करो।

देखो १५वें प्रक्रम से कैसा लाघव से $आ_1$ और $का_1$ का मान आया है।

(२) उ०। $\int \frac{य^2 + १}{(य-१)(य+२)(य-३)}$ ताय इस का मान जानना है।

यहाँ $अ_1 = १$, $क_1 = -२$, $ख_1 = ३$, $फ(य) = य^2 + १$

$फा(य) = (य-१)(य+२)(य-३)$,

$फा'(य) = (य+२)(य-३) + (य-१)(य-३) + (य-१)(य+२)$

इस लिये

$$आ_1 = \frac{फ(अ_1)}{फा'(अ_1)} = \frac{२}{३(-२)} = -\frac{१}{३},$$

$$का_1 = \frac{फ(क_1)}{फा'(क_1)} = \frac{५}{(-३)(-५)} = +\frac{१}{३},$$

$$खा_1 = \frac{फ(ख_1)}{फा'(ख_1)} = \frac{१०}{२ \times ५} = १$$

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{य^2 + १}{(य-१)(य+२)(य-३)} = \frac{१}{य-३} + \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{य+२} - \frac{१}{३} \cdot \frac{१}{य-१}$$

$$\therefore \int \frac{य^2 + १}{(य-१)(य+२)(य-३)} ताय$$

$$= ला(य-३) + \tfrac{१}{३} ला(य+२) - \tfrac{१}{३} ला(य-१)$$

१६। पूर्व भिन्न मे यदि $फा(य) = (य-क_1)^न फि(य)$ ऐसा हो तो पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{व}{भ} = \frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{फ(य)}{(य-क_1)^न फि(य)} = \frac{का_1}{(य-क_1)^न} + \frac{का_2}{(य-क_1)^{न-१}} + \cdots$$

$$+ \frac{का_न}{य-क_1} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

जहाँ $\frac{फी(य)}{फि(य)}$ यह और खण्डभिन्नो का योग है।

ऊपर के समीकरण में दोनों पक्षों को $(\text{य}-\text{क}_1)^{\text{न}}$ से गुण देने से

$$\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} = \text{फ}_1(\text{य}) = \text{का}_1 + \text{का}_2\,(\text{य}-\text{क}_1) + \text{का}_3\,(\text{य}-\text{क}_1)^2 +$$

$$+ \frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}\,(\text{य}-\text{क}_1)^{\text{न}}$$

य के स्थान मे क_1 का उत्थापन देने से

$$\text{फ}_1(\text{क}_1) = \text{का}_1$$

$$\text{फ}'_1(\text{क}_1) = \text{का}_2$$

$$\text{फ}''_1(\text{क}_1) = २\ \text{का}_3$$

$$\text{फ}'''_1(\text{क}_1) = २\ ३\ \text{का}_4$$

$$\text{फ}_1^{\text{न}-१}(\text{क}_1) = \underline{|\text{न}-१}\ \text{का}_{\text{न}}$$

(१) उदाहरण $\int \frac{११\text{य}^3+९\text{य}^2+७\text{य}+५}{\text{य}^4-५\text{य}^3+६\text{य}^2+४\text{य}-८}$ ताय इसका मान जानना है तो

यहाँ $\frac{११\text{य}^3+९\text{य}^2+७\text{य}+५}{\text{य}^4-५\text{य}^3+६\text{य}^2+४\text{य}-८} = \frac{११\text{य}^3+९\text{य}^2+७\text{य}+५}{(\text{य}-२)^3(\text{य}+१)}$, इस लिये

$\text{क}_1 = २$, $\text{न} = ३$, $\text{फि}(\text{य}) = \text{य}+१$ । $\text{फ}_1(\text{य}) = \frac{११\text{य}^3+९\text{य}^2+७\text{य}+५}{\text{य}+१}$

$$\text{फ}'_1(\text{य}) = \frac{३३\text{य}^2+१८\text{य}+७}{\text{य}+१} - \frac{११\text{य}^3+९\text{य}^2+७\text{य}+५}{(\text{य}+१)^2}$$

$$\text{फ}''_1(\text{य}) = \frac{६६\text{य}+१८}{\text{य}+१} - \frac{२(३३\text{य}^2+१८\text{य}+७)}{(\text{य}+१)^2} + \frac{२(११\text{य}^3+९\text{य}^2+७\text{य}+५)}{(\text{य}+१)^3}$$

इस लिये $\text{फ}_1(\text{क}_1) = \frac{११\times ८+९\times ४+७\times २+५}{२+१} = \frac{८८+३६+१४+५}{३}$

$$= \frac{१४३}{३} = \text{का}_1$$

$$\text{फ}'_1(\text{क}_1) = \frac{३३\times ४+१८\times २+७}{२+१} - \frac{१४३}{९} = \frac{१३२+३६+७}{३} - \frac{१४३}{९}$$

$$= \frac{१७५}{३} - \frac{१४३}{९} = \frac{५२५}{९} - \frac{१४३}{९} = \frac{३८२}{९} = \text{का}_2$$

और $\text{फ}''_1(\text{क}_1) = \frac{१५०}{३} - \frac{२(१३२+३६+७)}{९} + \frac{१४३\times २}{२७}$

$$= \frac{१३५०}{२७} - \frac{१०५०}{२७} + \frac{१४३\times २}{२७} = \frac{३००}{२७} + \frac{२८६}{२७} = \frac{५८६}{२७},\quad \frac{२९३}{२७} = \text{का}$$

इस लिये भिन्न का रूपान्तर

$$\frac{१४३}{३}\frac{१}{(य-२)^३}+\frac{३८२}{९}\frac{१}{(य-२)^२}+\frac{२९३}{२७}\frac{१}{य-२}+\frac{४}{२७}\frac{१}{य+१}$$

तब

$$\int\frac{११य^३+९य^२+७य+५}{य^४-५य^३+६य^२+४य-८}ताय$$

$$=\frac{१४३}{३}\int\frac{ताय}{(य-२)^३}+\frac{३८२}{९}\int\frac{ताय}{(य-२)^२}+\frac{२९३}{२७}\int\frac{ताय}{य-२}+\frac{४}{२७}\int\frac{ताय}{य+१}$$

$$=\frac{२९३}{२७}ला(य-२)+\frac{४}{२७}ला(य+१)-\frac{१४३}{६(य-२)^२}-\frac{३८२}{९(य-२)}$$

१७। यदि भिन्न के हर में एक जोड़ा असम्भव राशि भी हो अर्थात् एक मान $अ+क\sqrt{-१}$ हो और दूसरा $अ-क\sqrt{-१}$ तो मानो कि

$$\frac{ब}{भ}=\frac{फ(य)}{फा(य)}=\frac{आ_१}{य-(अ+क\sqrt{-१})}+\frac{आ_२}{य-(अ-क\sqrt{-१})}+\frac{फी(य)}{फि(य)}$$

जहाँ $\frac{फी(य)}{फि(य)}$ और खण्डो का योग है तो समच्छेद करने से

$$फ(य)=आ_१\{य-(अ-क\sqrt{-१})\}फि(य)$$
$$+आ_२\{य-(अ+क\sqrt{-१})\}फि(य)$$
$$+फी(य)\{य-(अ+क\sqrt{-१})\}\{य-(अ-क\sqrt{-१})\}$$
$$=\{(आ_१+आ_२)य-(आ_१+आ_२)अ+क(आ_१-आ_२)\sqrt{-१}\}फि(य)$$
$$+फी(य)\{य^२-२अय+अ^२+क^२\}$$

अब यहाँ य के मान में $अ+क\sqrt{-१}$ वा $अ-क\sqrt{-१}$ का उत्थापन देने से स्पष्ट है कि $य^२-२अय+अ^२+क^२=०$

अर्थात् $य^२-२अय-(अ^२+क^२)$ तब ऊपर के समीकरण का रूप

$$फ(य)=\{(आ_१+आ_२)य-(आ_१+आ_२)अ+क(आ_१-आ_२)\sqrt{-१}\}फि(य)\quad(१)$$

ऐसा होगा।

(१) इस में बार बार यदि $य^२$ के स्थान में $२अय-(अ^२+क^२)$ का उत्थापन दो तो स्पष्ट है कि अन्त मे $दाय+ध=दा'य+ध'$ ऐसा स्वरूप होगा फिर इस में य के स्थान में $अ+क\sqrt{-१}$ वा $अ-क\sqrt{-१}$ का उत्थापन देने से और असम्भाव्य तथा सम्भाव्य संख्याओ के गुणक समान करने से दा और ध

प्रकट हो जायँगे इन पर से ($आ_१ + आ_२$) और ($आ_१ + आ_२$)अ भी प्रकट हो जायंगे। अथवा

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{आ_१}{य—(अ+क\sqrt{—१})} + \frac{आ_२}{य—(अ—क\sqrt{—१})} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

$$= \frac{आ_१य—(आ_१अ—आ_१क\sqrt{—१}) + आ_२य—(आ_२अ + आ_२क\sqrt{—१})}{य^२—२अय + अ^२ + क^२} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$

$$= \frac{खाय + गा}{य^२—२अय + अ^२ + क^२} + \frac{फी(य)}{फि(य)}$$ जहाँ य का गुणक ख है और अवशिष्ट गा है। अब पूर्ववत् समच्छेद करने से और य के समान घातो के गुणक समान करने से खा, और गा व्यक्त हो जायंगे।

(१) उदाहरण $\int \frac{ताय}{अ^३ + य^३}$ इस का मान जानना है।

यहाँ $\frac{१}{अ^३ + य^३} = \frac{१}{(अ+य)(अ^२-अय+य^२)} = \frac{आ_१}{य+अ} + \frac{खाय + गा}{य^२—अय + अ^२}$

समच्छेद कर अंश को रूप के तुल्य करने से

$१ = आ_१य^२—अआ_१य + आ_१अ^२ + खाय^२ + अखाय + गाय + गाअ$

$= य^२(आ_१ + खा) + य(अखा + गा—अआ_१) + आ_१अ^२ + गाअ$

इस लिये $आ_१ + खा = ०$। $अखा + गा—अ आ_१ = ०$।

$१ = अ (आ_१अ + गा)$

$अ आ_१ + अ खा = ०$ | $गा + २अखा = ०$ $गा = — २ अ खा$

$गा—अ आ_१ + अ खा = ०$ | $आ_१ = — खा$

$अ आ_१ = — अखा$ ∵ $१ = अ(आ_१ अ + गा) = अ(—अखा—२अखा)$

$= — ३ अ^२खा$

$— \frac{१}{३अ^२} = खा,\ आ_१ = \frac{१}{३अ^२}$ और $गा = — २ अखा = \frac{२}{३अ}$

इस लिये इनके उत्थापन से

$$\int \frac{ताय}{अ^३ + य^३} = \int \frac{ताय}{३अ^२(य+अ)} + \int \frac{— \frac{य}{३अ^२} + \frac{२}{३अ}}{य^२—अय + अ^२} ताय$$

$$= \frac{१}{३अ^२} ला (य+अ) — \frac{१}{३अ} \int \frac{य—२ अ}{य^२—अय + अ^२} ताय$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला} (य+अ) - \frac{१}{६अ^२}\int \frac{२य-अ-३अ}{य^२-अय+अ^२} \text{ ताय}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला} (य+अ) - \frac{१}{६अ^२}\int \frac{२य-अ}{य^२-अय+अ^२} \text{ ताय}$$

$$- \frac{१}{६अ^२}\int \frac{-३अ}{य^२-अय+अ^२} \text{ ताय}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला}(य+अ) - \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२-अय+अ^२) + \frac{३}{६अ}\int \frac{\text{ताय}}{य^२-अय+अ^२}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला}(य+अ) - \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२-अय+अ^२)$$

$$+ \frac{१}{२अ}\int \frac{\text{ताय}}{(य-\frac{अ}{२})^२ + \frac{३अ^२}{४}} \text{ यदि } ल = य - \frac{अ}{२}$$

$$= \frac{१}{३अ^२} \text{ला} (य+अ) - \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२-अय+अ^२) + \frac{१}{२अ}\int \frac{\text{ताल}}{ल^२ + \frac{३}{४}अ^२}$$

$$= \frac{१}{३अ^२}\text{ला}(य+अ) - \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२-अय+अ^२) + \frac{२}{अ\sqrt{३}} \frac{१}{२अ} \text{स्प}^{-१} \frac{२य-अ}{अ\sqrt{३}}$$

$$= \frac{१}{३अ^२}\text{ला}(य+अ) - \frac{१}{६अ^२} \text{ला}(य^२-अय+अ^२) + \frac{१}{अ^२\sqrt{३}} \text{स्प}^{-१} \frac{२य-अ}{अ\sqrt{३}}$$

वा, $१ = आ_१(य^२-अय+अ^२) + (खाय+गा)(य+अ)$ इस मे यदि $य = -अ$

तो $१ = आ_१(अ^२+अ^२+अ^२) = ३अ^२आ_१ \therefore आ_१ = \frac{१}{३अ^२}$ समीकरण मे

इस का उत्थापन देने से

$$३अ^२ = य^२ - अय + अ^२ + ३अ^२ (खाय+गा)(य+अ)$$

समशोधन से $३अ^२(खाय+गा)(य+अ) = २अ^२ + अय - य^२$

दोनों पक्षो में $य+अ$ का भाग देने से $३अ^२ (खाय+गा) = २अ - य$

$\therefore खाय + गा = \frac{२अ-य}{३अ^२}$ इन पर से फिर पूर्वोक्त क्रिया करो।

अथवा इसी प्रक्रम के (१) समीकरण से यहाँ

$$फ(य) = १ = \{(आ_१+आ_२)य - (आ_१+आ_२)अ + क(आ_१-आ_२)\sqrt{-१}\} फि(य)$$

$$= (खाय+गा)(य+अ) = खाय^२ + गाय + अखाय + गाअ$$

$$= खाय^२ + (गा+अखा)य + गाअ$$

$$\text{खा}(\text{अय}-\text{अ}^2) + (\text{गा} + \text{अखा})\text{य} + \text{गाअ} = \text{य}(\text{गा} + २\text{अखा}) + \text{गाअ} - \text{अ}^2\text{खा}$$

(यहाँ $\text{खा} = \text{आ}_१ + \text{आ}_२$ । $\text{गा} = (\text{आ}_१ + \text{आ}_२)\text{अ} + \text{क}(\text{आ}_१ - \text{आ}_२)\sqrt{-१}$

अब $\text{य} = \frac{\text{अ} + \text{अ}\sqrt{३}\sqrt{-१}}{२}$ मानने से

$$१ = \frac{(\text{अ} + \text{अ}\sqrt{३}\sqrt{-१})}{२}(\text{गा} + २\text{अखा}) + \text{गाअ} - \text{अ}^2\text{खा} ।$$

$$= \frac{\text{अ}}{२}(\text{गा} + २\text{अखा}) + \text{गाअ} - \text{अ}^2\text{खा} + \frac{\text{अ}\sqrt{३}\sqrt{-१}}{२}(\text{गा} + २\text{अखा})$$

सम्भाव्य और असम्भाव्य के गुणक को तुल्य करने से

$$१ = \frac{\text{अ}}{२}(\text{गा} + २\text{अखा}) + \text{गाअ} - \text{अ}^2\text{खा} ।\ \text{गा} + २\text{अखा} = ०$$

$१ = \text{गाअ} - \text{अ}^2\text{खा}$ और $\text{गा} = -२\text{अखा}$

$१ = \text{गाअ} - \text{अ}^2\text{खा} = -२\text{अ}^2\text{खा} - \text{अ}^2\text{खा} = -३\text{अ}^2\text{खा}$

$\therefore \text{खा} = -\frac{१}{३\text{अ}^2}$ फिर अब पूर्ववत् क्रिया करो ।

१८ । यदि भिन्न के हर मे एक जोड़ा असम्भव मान त वार हो तो पूर्ववत्

$$\frac{\text{व}}{\text{भ}} = \frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} = \frac{\text{खा}_\text{त}\text{य} + \text{गा}_\text{त}}{(\text{य}^2 - \text{दय} + \text{ध})^\text{त}} + \frac{\text{खा}_{\text{त}-१}\text{य} + \text{गा}_{\text{त}-१}}{(\text{य}^2 - \text{दय} + \text{ध})^{\text{त}-१}} + \cdots + \frac{\text{खा}_१\text{य} + \text{गा}_१}{\text{य}^2 - \text{दय} + \text{ध}} + \frac{\text{फी}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$$ ऐसा मानने से

$\text{फा}(\text{य}) = (\text{य}^2 - \text{दय} + \text{ध})^\text{त}\text{फि}(\text{य})$ ऐसा हुआ । फिर समच्छेद करने से

$$\text{फ}(\text{य}) = (\text{खा}_\text{त}\text{य} + \text{गा}_\text{त})\ \text{फि}(\text{य}) + (\text{खा}_{\text{त}-१}\text{य} + \text{गा}_{\text{त}-१})(\text{य}^2 - \text{दय} + \text{ध})\ \text{फि}(\text{य}) + \cdots + (\text{य}^2 - \text{दय} + \text{ध})^\text{त}\text{फी}(\text{य}) \quad (१)$$

अब यहाँ य के स्थान मे उसके असम्भव मान का उत्थापन दो अर्थात् $\text{य}^2 - \text{दय} + \text{ध} = ०$ के मानो तो

(१) का लघुरूप

$$\text{फ}(\text{य}) = (\text{खा}_\text{त} + \text{गा}_\text{त})\ \text{फि}(\text{य})$$

यहाँ १७वें प्रक्रम से $\text{खा}_\text{त}$ और $\text{गा}_\text{त}$ का मान निकाल समशोधन करने से

(१) समीकरण का रूप

$$फ(य) - (खा_{न} + गा_{न})\, फि(य)$$
$$= (खा_{न-१} + गा_{न-१})\,(य^2 - दय + ध)\, फि(य) + \cdots$$ हुआ।

यह सरूप समीकरण है और यहाँ दहिना पक्ष $य^2 - दय + ध$ उससे निःशेष होता है इस लिये बायाँ पक्ष भी निःशेष होगा कल्पना करो कि भाग देने से लब्धि $फ_{१}(य)$ है तो

$$फ_{१}(य) = (खा_{न-१} + गा_{न-१})\, फि(य)$$
$$+ (खा_{न-२} + गा_{न-२})\,(य^2 - दय + ध)\, फि(य) + \qquad (२)$$

यहाँ भी यदि $य^2 - दय + ध = ०$ तो (२) का रूप

$फ_{१}(य) = (खा_{न-१} + गा_{न-१})\, फि(य)$ इस से १७वें प्रक्रम से

$खा_{न-१}$ और $गा_{न-१}$ निकाल फिर समशोधन और $य^2 - दय + ध$ का दोनों पक्षों में भाग देने से बायें पक्ष को फ (य) मानने से और $य^2 - दय + ध = ०$ करने से इसी प्रकार $खा_{न-२}$, $गा_{न-२}$ इत्यादि भी व्यक्त हो जायगे।

(१) उदाहरण $\int \frac{क(य^2 - ३य - २)}{(य^2 + य + १)^2 (य + १)^2}$ ताय इसका मान जानना है तो

$$यहाँ\ \frac{य^2 - ३य - २}{(य + य + १)^2 (य + १)^2} = \frac{खा_{२}य + गा_{२}}{(य^2 + य + १)^2} + \frac{खा_{१}य + गा_{१}}{य^2 + य + १}$$
$$+ \frac{फी(य)}{(य + १)^2}$$

$$तब\ य^2 - ३य - २ = (खा_{२}य + गा_{२})\,(य + १)^2$$
$$+ (खा_{१}य + गा_{१})\,(य^2 + य + १)\,(य + १)^2 + (य^2 + य + १)^2 फी(य) \cdots (३)$$

इस में $य^2 + य + १ = ०$ करने से

$$य^2 - ३य - २ = (खा_{२}य + गा_{२})\,(य + १)^2$$
$$= (खा_{२}य + गा_{२})\,(य^2 + २य + १)$$

$य^2$ के स्थान मे $- य - १$ का उत्थापन देने से

$$- ४य - ३ = (खा_{२}य + गा_{२})\, य$$
$$= खा_{२}य^2 + गा_{२}य = - खा_{२}य - खा_{२} + गा_{२}य$$

इस लिये $- ४ = गा_{२} - खा_{२}$ और $- ३ = - खा_{२}$ $\therefore$ $३ = खा_{२}$ और

$$- ४ = गा_{२} - खा_{२} = गा_{२} - ३ \quad \therefore \quad - १ = गा_{२}$$

(३) इनका उत्थापन देकर समशोधन करने से

$$य^2 - ३य - २ - (३य - १)\,(य + १)^2$$

$$= (खा_१य + गा_१)(य^२ + य + १)(य + १)^२ + (य^२ + य + १)^२ फी(य)$$

दोनो पक्षो मे $य^२ + य + १$ का भाग देने से

$$—(३य + १) = (खा_१य + गा_१)(य + १)^२ + (य^२ + य + १)फी(य) \quad (४)$$

फिर इस मे $य^२ + य + १ = ०$ मानने से

$$—(३य + १) = (खा_१य + गा_१)(य + १)^२ = (खा_१य + गा_१)(य^२ + य + १ + य)$$

$$= (खा_१य + गा_१) य = —खा_१ (य + १) + गा_१य ।$$

इस लिये $—३ = —खा_१ + गा_१$ और $—१ = —खा_१$ $१ = खा_१$ और $—२ = गा_१$ अब (४) मे इनका उत्थापन दे समशोधन कर $य^२ + य + १$ का भाग देने से $— (य—१) = फी(य)$

$$इस लिये \frac{फी(य)}{(य + १)^२} = — \frac{य—१}{(य + १)^२} = — \frac{य + १}{(य + १)^२} + \frac{२}{(य + १)^२}$$

$$= — \frac{१}{य + १} + \frac{२}{(य^२ + १)^२}$$

तव

$$\int \frac{य^२—३य—२}{(य^२ + य + १)^२(य + १)} ताय = \int \frac{३य—१}{(य^२ + य + १)^२} ताय$$

$$+ \int \frac{य—२}{य^२ + य + १} ताय + \int \frac{२ताय}{(य + १)} — \int \frac{ताय}{य + १}$$

यहाँ वारहवे प्रक्रम से सव का मान जान सकते हो पहले खण्ड का यदि मान व्यक्त हो तो। पहले का मान जानने के लिये पहले मानो कि

$\int \frac{तार}{(र^२ + अ^२)^न}$ इस का मान जानना है तो

$$\frac{तार}{(र^२ + अ^२)^न} = \frac{१}{अ^२} \cdot \frac{(र^२ + अ^२ — र^२)तार}{(र^२ + अ^२)^न} = \frac{१}{अ^२} \quad \frac{तार}{(र^२ + अ^२)^{न-१}}$$

$$— \frac{१}{अ^२} \cdot \frac{रतार र}{(र^२ + अ^२)^न}$$

परन्तु खण्ड चलानयन से $\frac{१}{अ^२} \int \frac{२रतार र}{२(र^२ + अ^२)^न}$

$$= — \frac{१}{य} \frac{१}{२(न—१)} \frac{र}{(र^२ + अ^२)^{न-१}} + \frac{१}{अ^२} \frac{१}{२(न—१)} \int \frac{तार}{(र^२ + अ^२)^{न-१}}$$

$$इस लिये \int \frac{तार}{(र^२ + अ^२)^न} = \frac{१}{अ^२} \frac{१}{२(न—१)} \frac{र}{(र^२ + अ^२)^{न-१}}$$

$$+\frac{१}{\text{अ}^२}\;\frac{२\text{न}-३}{२(\text{न}-१)}\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^२+\text{अ}^२)^{\text{न}-१}}\;.\;(\text{अ})$$

इस (अ) सिद्धान्त को अच्छी तरह से सीखो ।

ऊपर के उदाहरण में $\frac{३\text{य}-१}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}=\frac{३(\text{य}-\frac{१}{३})}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}$

$$=\frac{\frac{३}{२}(२\text{य}+१-१-\frac{२}{३})}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}=\frac{\frac{३}{२}(२\text{य}+१)}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}-\frac{५}{२}\frac{१}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}$$

इस लिये $\int\frac{३\text{य}-१}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}\text{ताय}$

$$=\frac{३}{२}\int(२\text{य}+१)\;\text{ताय}\;(\text{य}^२+\text{य}+१)^{-२}-\frac{५}{२}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}$$

$$=-\frac{३}{२}\;\frac{१}{\text{य}^२+\text{य}+१}-\frac{५}{२}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}\text{ ।}$$

$$\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}=\frac{\text{ताय}}{\{(\text{य}+\frac{१}{२})^२+\frac{३}{४}\}^२}=\frac{\text{तार}}{(\text{र}^२+\text{अ}^२)^२}\text{, यदि र}=\text{य}+\frac{१}{२}$$

और $\frac{३}{४}=\text{अ}^२$

(अ) सिद्धान्त से

$$\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}^२+\text{य}+१)^२}=\int\frac{\text{तार}}{(\text{र}^२+\text{अ}^२)^२}=\frac{४}{३}\cdot\frac{१}{२}\cdot\frac{२\text{य}+१}{२(\text{र}^२+\text{अ}^२)}$$

$$+\frac{४}{३}\cdot\frac{१}{२}\int\frac{\text{तार}}{\text{र}^२+\text{अ}^२}$$

$$=\frac{१}{३}\cdot\frac{२\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१}+\frac{२}{३}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{१}{३}\;\frac{२\text{य}+१}{\text{य}^२+\text{य}+१}+\frac{२}{३}\;\frac{२}{\sqrt{३}}\;\text{स्प}^{-१}\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}$$

और $\frac{\text{य}-२}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{\frac{१}{२}(२\text{य}-४)}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{\frac{१}{२}(२\text{य}+१-५)}{\text{य}^२+\text{य}+१}=\frac{\frac{१}{२}(\text{य}+१)}{\text{य}^२+\text{य}+१}-\frac{५}{२}\frac{१}{\text{य}^२+\text{य}+१}$

इसलिये

$$\int\frac{\text{य}-२}{\text{य}^२+\text{य}+१}\text{ताय}=\frac{१}{२}\int(२\text{य}+१)\text{ताय}-(\text{य}^२+\text{य}+१)-\frac{५}{२}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^२+\text{य}+१}$$

$$=\frac{१}{२}\text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)-\frac{५}{२}\int\frac{\text{तार}}{\text{र}^२+\text{अ}^२}=\frac{१}{२}\text{ला}(\text{य}^२+\text{य}+१)-\frac{५}{२}\cdot\frac{२}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\text{ ।}$$

$२\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}+१)^२}=\frac{-२}{\text{य}+१}$। और $\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}+१}=\text{ला}(\text{य}+१)$ इन सबको इकट्ठा करने से

$$\int \frac{३य—१}{(य^२+य+१)^२} ताय$$

$$= — \frac{३}{२(य^२+य+१)} — \frac{५}{६}\,\frac{२य+१}{य^२+य+१} — \frac{५}{३}\,\frac{२}{\sqrt{३}} स्प^{-१}\,\frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{य—२}{य^२+य+१} = \tfrac{१}{२} ला(य^२+य+१) — \frac{५}{२}\,\frac{२स्प^{-१}}{\sqrt{३}}\,\frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$\int \frac{२ताय}{(य+१)^२} = — \frac{२}{य+१}$$

$$\int \frac{ताय}{य+१} = ला(य+१)$$

इस लिये

$$\int \frac{३य—१}{(य^२+य+१)^२} ताय + \int \frac{य—२}{य^२+य+१} ताय + \int \frac{२ताय}{(य+१)^२} — \int \frac{ताय}{य+१}$$

$$= — \frac{३}{२(य^२+य+१)} — \frac{५}{६}\,\frac{२य+१}{य^२+य+१} — \frac{२५}{३}\,\frac{१}{\sqrt{३}} स्प^{-१}\,\frac{२य+१}{\sqrt{३}}$$

$$+ \tfrac{१}{२} ला\,(य^२+य+१) — \frac{२}{य+१} — ला\,(य+१) ।$$

$\int \frac{तार}{(र^२+अ^२)^न}$ इस मे यदि अ स्पप = र तो $\frac{अ\,ताप}{कोज्या^२प} = तार$

और $(र^२+अ^२) = अ^२स्प^२प + अ^२ = अ^२\,(छे^२प) = \frac{अ^२}{कोज्या^२प}$

$$इस\ लिये \int \frac{तार}{(र^२+अ^२)^न} = \int \frac{अ.ताप}{कोज्या^२प\left[\frac{अ^२}{कोज्या^२प}\right]^न} = \int \frac{अ\,ताप\,कोज्या^{२न}प}{अ^{२न}कोज्या^२प}$$

$$= \frac{१}{अ^{२न-१}} \int तापकोज्या^{२न-२}प$$

$$= \frac{ज्याप}{मअ^{२न-१}} \left\{ कोज्या^{म-१}प + \frac{म-१}{म-२} कोज्या^{म-३}प + \frac{(म-१)(म-३)}{(म-२)(म-४)} कोज्या^{म-५}प + \right\}$$

$$+ \frac{(म—१)\,(म—३)\,(म—५)\ldots\,१}{अ^{२न-१}म(म—२)\,(म—४)\ldots\,२} प$$

१२वे प्रकम के १५ वे उदाहरण की विधि से । यहाँ २न—२ = म ।

इस तरह से भी $\int \frac{तार}{(र^२+अ^२)^न}$ इसका मान जान सकते हो ।

१९। ऊपर के प्रक्रमों से स्पष्ट है कि किसी अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध के चलानयन के लिये जो खण्ड भिन्न किये गये है उनका चार प्रकार का रूप होता है

(१) $\frac{\text{आ}_1\text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}_1}$, (२) $\frac{\text{का}_1\text{ताय}}{(\text{य}-\text{क}_1)^{\text{त}}}$,

(३) $\frac{(\text{खाय}+\text{गा})\text{ताय}}{\text{य}^2-2\text{अ}_2\text{य}+\text{अ}_2^2+\text{क}_2^2}=\frac{\text{खाय}+\text{गा}}{(\text{य}-\text{अ}_2)^2+\text{क}_2^2}\text{ताय}$

(४) $\frac{\text{च}_1\text{य}+\text{ज}_1}{\{(\text{य}-\text{ग}_1)^2+\text{घ}_1^2\}^{\text{न}}}$ ताय इन मे (१), (२), (३) का चलानयन तो पहले कर आये है रहा चौथा उसको यदि

$$\frac{\text{च}_1\text{य}+\text{ज}_1}{\{(\text{य}-\text{ग}_1)^2+\text{घ}_1^2\}^{\text{न}}}\text{ताय}=\frac{\text{च}_1\text{य}-\text{च}_1\text{ग}_1+\text{च}_1\text{ग}_1+\text{ज}_1}{\{(\text{य}-\text{ग}_1)^2+\text{घ}_1^2\}^{\text{न}}}\text{ताय}$$

$$=\frac{\text{च}_1(\text{य}-\text{ग}_1)\text{ताय}}{\{(\text{य}-\text{ग}_1)^2+\text{घ}_1^2\}^{\text{न}}}+\frac{\text{च}_1\text{ग}_1+\text{ज}_1}{\{(\text{य}-\text{ग}_1)^2+\text{घ}_1^2\}^{\text{न}}}\text{ताय}$$

यहा पहले खण्ड का चल पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि

$\frac{-\text{च}_1}{2(\text{न}-1)\{(\text{य}-\text{ग}_1)^2+\text{घ}_1^2\}^{\text{न}-1}}$ यह है

दूसरे खण्ड में यदि $\text{य}-\text{ग}_1=\text{र}$ तो

$\frac{\text{च}_1\text{ग}_1+\text{ज}_1}{\{(\text{य}-\text{ग}_1)^2+\text{घ}_1^2\}^{\text{न}}}\text{ताय}=\frac{\text{स्थिताार}}{(\text{र}^2+\text{घ}_1^2)^{\text{न}}}$। इसका मान १८वें प्रक्रम के (अ) सिद्धान्त से स्पष्ट है, यहां $\text{च}_1\text{ग}_1+\text{ज}_1=\text{स्थि}$।

अब इन चारों भेदों के चल से अकरणीगत भिन्न सम्बन्ध का चलानयन कर सकते हो।

२०। ऊपर के प्रकारों के चल से अनेक चलानयन कर सकते हो। जैसे यदि $\int\frac{\text{फ}(\text{य})\text{ताय}}{\text{फा}(\text{य})}$ इस का मान जानना हो तो यदि $\text{र}=\text{य}$ तो $\text{तार}=2\text{यताय}$

इस लिये $\text{ताय}=\frac{\text{तार}}{2\text{य}}$ और $\int\frac{\text{फ}(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})}=\frac{\text{फ}(\text{र})}{\text{फा}(\text{र})}$ अब यहां यदि र के मान सब सम्भव और परस्पर भिन्न हों तो खण्ड भिन्न का कोई मान

$\frac{\text{फ}(\text{अ}_1)}{\text{फा}'(\text{अ}_1)}\cdot\frac{1}{\text{र}-\text{अ}_1}=\frac{\text{फ}(\text{अ}_1)}{\text{फा}'(\text{अ}_1)}\cdot\frac{1}{\text{य}-\text{अ}_1}$ ऐसा होगा जहां अ_1, र का कोई मान है।

इस पर से $\int\frac{\text{फ}(\text{अ}_1)}{\text{फा}'(\text{अ}_1)}\frac{\text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}_1}=\frac{\text{फ}(\text{अ}_1)}{\text{फा}'(\text{अ}_1)}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}-\text{अ}_1}$

यहां चाहे $अ_१$ धनात्मक वा ऋणात्मक हो १२वे प्रक्रम से $\int \frac{ताय}{य^२—अ_१}$ का मान जान सकते हो ।

यदि र के मान मे एक जोड़ा असम्भाव्य राशि हो जिनका मान $अ+क\sqrt{-१}$ और $अ—क\sqrt{-१}$ हो तो इनके वश से खण्ड भिन्न सवंध का मान

$$=\frac{(खाय^२+गा)ताय}{(य^२—अ)^२+क^२}=\frac{(खाय^२+गा)ताय}{य^४—२अय^२+ग^२},$$ जहां $ग^२=अ^२+क^२$ । यहां यदि

$अ=गकोज्या२इ$ तो इस भिन्न का रूप $=\frac{(खाय^२+गा)ताय}{य^४—२गय^२कोज्या२इ+ग^२}$

$$=\frac{(खाय^२+गा)ताय}{(य^२—२य\sqrt{ग}\,कोज्याइ+ग)\,(य^२+२य\sqrt{ग}\,कोज्याइ+ग)}$$

इस लिये पूर्ववत् कल्पना करो कि

$$\frac{खाय^२+गा}{य^४—२य^२गकोज्या२इ+ग}=\frac{खा_१य+गा_१}{य^२-२य\sqrt{ग}\,कोज्याइ+ग}$$

$$+\frac{खा_२य+गा_२}{य^२+२य\sqrt{ग}\,कोज्याइ+ग}$$ इस पर से पूर्ववत् स्पष्ट है कि

$खा_१=—खा_२=\frac{खाग—गा}{८ग^{\frac{3}{2}}कोज्याइ}$, $गा_१=गा_२=\frac{गा}{२ग}$ इनका उत्थापन ऊपर के खण्ड भिन्नो में देने से और थोड़ा सा परिवर्त्तन करने से

$$\int\frac{(खाय^२+गा)ताय}{य^४—२अय^२+ग^२}=\frac{खाग—गा}{८ग^{\frac{3}{2}}कोज्याइ}ला\left[\frac{य^२—२य\sqrt{ग}\,कोज्याइ+ग}{य^२+२य\sqrt{ग}\,कोज्याइ+ग}\right]$$

$$+\frac{खाग+गा}{४ग^{\frac{3}{2}}ज्याइ}स्प^{-१}\left[\frac{२य\sqrt{ग}\,ज्याइ}{ग^२—य}\right]$$

२१ । यदि $\frac{ताय}{(य—अ)^म(य—क)^न}$ इस का चल जानना हो तो इसे खण्ड भिन्नो के रूप में न ला कर भी नीचे की युक्ति से सहज में चल मान जान सकते हो ।

कल्पना करो कि $य—अ=(य—क)र$ तो $य=\frac{अ—कर}{१—र}$

$य-अ=\frac{(अ—क)र}{१—र}$, $य—क=\frac{अ—क}{१—र}$ और $ताय=\frac{(अ—क)तार}{(१—र)}$ ऊपर के मान

में इनका उत्थापन देने से $\int \frac{ताय}{(य—अ)^{म}(य—क)^{न}} = \int \frac{(१—र)^{म+न-२}}{र^{म}(अ—क)^{म+न-१}} तार$

इस का मान अब छियुकूपदसिद्धान्त से सहज में जान सकते हो।

जैसे $\int \frac{ताय}{(य—अ)(य—क)^{३}}$ यहाँ म = १। न = ३, म + न−२ = २। म + न−१ = ३

इस लिये $\int \frac{ताय}{(य—अ)(य—क)^{३}} = \int \frac{(१—र)^{म+न-२}}{र^{म}(अ—क)^{म+न-१}} तार = \int \frac{(१—र)^{२}}{र(अ—क)^{३}} तार$

$= \int \frac{१—२र+र^{२}}{र(अ—क)^{३}} तार = \frac{१}{(अ—क)^{३}} \left\{ लार—२र+\frac{र^{२}}{२} \right\}$ इस में र के स्थान में

$\frac{य—अ}{य—क}$ का उत्थापन देने से य के रूप में ऊपर का चल सिद्ध हो जायगा।

यहाँ यदि अ = क तो ऊपर के सिद्धान्त का व्यभिचार होगा।

२२। $\frac{य^{२म+१} ताय}{(अ+गय^{२})^{न}}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ म और न अभिन्न

संख्या है और $य^{२} = \frac{र—अ}{ग}$

मानो कि $अ + गय^{२} = र$ तो $तार = २गयताय \therefore ताय = \frac{तार}{२गय}$।

इन का उत्थापन देने से

$$\frac{य^{२म+१} ताय}{(अ+गय^{२})^{न}} = \frac{य^{२म} \times यताय}{र^{न}} = \frac{य^{२म}\ तार}{२गर^{न}} = \frac{(य^{२})^{म} तार}{२गर^{न}}$$

$= \frac{(र—अ)^{म} तार}{२ग^{म+१}र^{न}}$ यह ऐसे रूप में आ गया जिसका चल छियुकूपद-सिद्धान्त से ला सकते हो।

ऊपर की युक्ति से स्पष्ट है कि $\frac{फ(य^{२})\ यताय}{(अ+गय^{२})^{न}}$ इस का चलानयन भी अत्यन्त सुगम है यदि $फ(य^{२})$ में $य^{२}$ का कोई अभिन्न ही घात हो तो।

२३। $\frac{ताय}{य^{न}—१}$ इस के चलानयन के लिये जहाँ न धन और अभिन्न है

मानो कि $य^{न}—१ = ०$ इस समीकरण से य का एक असम्भव मान $अ_{२}$ है

तो दूसरा असम्भव मान $अ_{२}^{-१}$ यह होगा यहाँ

$$अ_{२} = कोज्या\frac{२तπ}{न} + ज्या\frac{२तπ}{न}\sqrt{—१} है$$

(चलनकलन का ८८वॉ प्रक्रम देखो वा डेमाइवर का सिद्धान्त) जहाँ त का मान १, २, ३ इत्यादि धन संख्या है।

यहॉ १४वें प्रक्रम से $य^{न}—१$ इस के एक खण्ड भिन्न का मान जब

$$य = अ_२ \quad तो \frac{१}{नअ_२^{न-१}} \frac{१}{(य—अ_२)} = \frac{अ_२}{नअ_२^{न}(य—अ_२)}$$

$= \frac{अ_२}{न(य—अ_२)}$ यह होगा और दूसरे का $\frac{अ_२^{-१}}{न(य—अ_२^{-१})}$ यह

जहाँ $य = अ_२^{-१}$ इन दोनो खण्डभिन्नो का योग करने से

$$योग = \frac{१}{न}\left[\frac{अ_२}{य—अ_२} + \frac{अ_२^{-१}}{य—अ_२^{-१}}\right]$$

$$= \frac{१}{न}\left\{\frac{(अ_२ + अ_२^{-१})य—२}{य^२—(अ_२ + अ_२^{-१})य + १}\right\} \text{ऐसा हुआ।}$$

इस मे $अ_२ + अ_२^{-१} =$ के स्थान मे $२कोज्या\frac{२त\pi}{न}$ का उत्थापन देने से

और $\frac{२त\pi}{न} = प$ मानने से $योग = \frac{२}{न} \frac{यकोज्याप—१}{य^२—२यकोज्याप + १}$ ऐसा होगा

जिस का चल १२वे प्रक्रम के १०वे उदाहरण से

$$\frac{कोज्याप}{न} ला\ (१—२यकोज्याप + य^२)$$

$$— \frac{२ज्याप}{न} स्प^{-१}\left[\frac{य—कोज्याप}{ज्याप}\right] \text{ऐसा होगा।}$$

यहॉ न के सम और विषम के वश से दो भेद होगे।

(१) मानो कि न = २म। इस स्थिति मे $य^{न}—१ = य^{२म}—१ = ०$ इस में य के दो मान + १,—१ ये सम्भव होगे, इस लिये

$$\int\frac{ताय}{य^{२म}—१} = \frac{१}{२म}\ ला\frac{य—१}{य + १}$$

$$+ \frac{१}{२म} \text{से गुणित } कोज्या\frac{त\pi}{म}\ ला\ (१—२य\ कोज्या\frac{त\pi}{म} + य^२)$$

इनके मान जो त के स्थान मे १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हो और उस मे

$$— \frac{१}{म} \text{से गुणित } ज्या\frac{त\pi}{म} स्प^{-१}\left[\frac{य—कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\frac{त\pi}{म}}\right] \text{इन के मान}$$

जो त के स्थान में १ से ले म—१ तक उत्थापन देने से हो।

यहाँ त के स्थान मे १, २, · म—१ इन का उत्थापन देने से जो मान हो उन का योग क्रम से यौ कोज्या$\frac{त\pi}{म}$ला (१—२ य कोज्या$\frac{त\pi}{म}$ + य^{२}) और यौ ज्या $\frac{त\pi}{म}$स्प$^{-१}$ $\left[\frac{य—कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या\frac{त\pi}{म}}\right]$ मानो तो ऊपर का समीकरण

$$\int\frac{ताय}{य^{२म}—१} = \frac{१}{२म}ला\frac{य—१}{य+१}$$

$$+\frac{१}{२म} यौ कोज्या\frac{त\pi}{म}ला (१—२य कोज्या\frac{त\pi}{म} + य^{२})$$

$$—\frac{१}{म} यौ ज्या \frac{त\pi}{म} स्प^{-१} \left[\frac{य—कोज्या\frac{त\pi}{म}}{ज्या \frac{त\pi}{म}}\right] \cdots \quad (१)$$

(२) कल्पना करो कि न = २ म + १ तो

$$\int\frac{ताय}{य^{२म+१}—१} = \frac{ला(य—१)}{२म+१}$$

$$+\frac{१}{२म+१} यौ कोज्या \frac{२त\pi}{२म+१} ला(१—२यकोज्या \frac{२त\pi}{२म+१} + य२)$$

$$—\frac{२}{२म+१}यौज्या\frac{२त\pi}{२म+१}स्प^{-१} \left[\frac{य—कोज्या \frac{२त\pi}{२म+१}}{ज्या \frac{२त\pi}{२म+१}}\right]$$

यहाँ यौ का मान त के स्थान में १, २, ३ म का उत्थापन देने से जानो।

२४। $\int\frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}—१}$ इस का मान जानना हो जहाँ म, न से छोटा है तो यहाँ भी पहले के ऐसी क्रिया करने से एक खण्ड भिन्न का मान

$$\frac{अ_{२}^{म-१}}{न अ_{२}^{न-१} (य—अ_{२})} = \frac{अ_{२}^{म}}{न(य—अ_{२})} \text{ यह}$$

और दूसरा $\frac{अ_{२}^{-म}}{न(य—अ_{२}^{-१})}$ यह होगा यहाँ भी अ$_{२}$, अ$_{२}^{-१}$ दोनों य के कोई एक जोड़ा असम्भव मान है। इस लिये दोनों खण्ड भिन्नों का योग करने से $\frac{१}{न}\left[\frac{अ_{२}^{म}}{य—अ_{२}} + \frac{अ_{२}^{-म}}{य—अ_{२}^{-१}}\right]$

$$= \frac{१}{न}\,\frac{य(अ_{२}^{म} + अ_{२}^{-म})—(अ_{२}^{म-१} + अ_{२}^{-(म-१)})}{य^{२}—य(अ_{२} + अ_{२}^{-१}) + १}$$

$$= \frac{२}{न} \cdot \frac{य कोज्या मप — कोज्या (म — १) प}{य^{२} — २ य कोज्या प + १}$$ यह हुआ ।

जहाँ प $= \frac{२ त \pi}{न}$ । यहाँ त्रिकोणमिति से यदि कोज्या (म—१)प का मान

कोज्यामप कोज्याप + ज्यामप ज्याप इस रूप में ले आवो तो वही मान

$$\frac{२}{न} \cdot \frac{य कोज्यामप — कोज्यामप कोज्याप — ज्यामप ज्याप}{य^{२} — २ य कोज्याप + १}$$

$$= \frac{१}{न} \left\{ \frac{(२य — २ कोज्याप) कोज्यामप}{य^{२} — २ य कोज्याप + १} — २ ज्यामप \frac{ज्याप}{(य — कोज्याप)^{२} + ज्या^{२} प} \right\}$$

ऐसा हुआ इस लिये १२वें प्रक्रम से

$$\int \frac{य^{म-१} ताय}{य^{न} — १} = \frac{१}{न} यौ कोज्यामप ला(य^{२} — २ य कोज्याप + १)$$

$$— \frac{२}{न} यौ ज्यामप स्प^{-१} \left\{ \frac{य — कोज्याप}{ज्याप} \right\} + \frac{१}{न} ला (य - १) + \frac{(-१)^{म}}{न} ला (य + १)$$

यदि न सम हो जहाँ यौ का मान त के स्थान मे १ से ले $\frac{न}{२}$ —१ तक का उत्थापन देने से है ।

$\int \frac{य^{म-१} ताय}{य^{न} — १}$ इस के मान मे असम्भव के वश से जो खण्ड चल है उन को पहले दो खण्डो मे लिखा है और सम्भव के दो चल अन्त मे हैं क्यो कि न का मान सम होने से $य^{न} — १ = ०$ इस मे य का एक मान + १ दूसरा —१ दो सम्भव आते है और भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न(य-१)} + \frac{(-१)^{म}}{न(य+१)} + \frac{२}{न} यौ \frac{कोज्यामप (य — कोज्याप) — ज्यामप ज्याप}{य^{२} — २ य कोज्याप + १}$$

और यदि न विषम हो तो $य^{न} — १ = ०$ इस में य का एक ही सम्भाव्य मान + १ होगा, इस लिये भिन्न का मान

$$= \frac{१}{न} \cdot \frac{१}{य — १} + \frac{२}{न} यौ \frac{कोज्यामप (य — कोज्याप) — ज्यामप ज्याप}{य^{२} — २ य कोज्याप + १}$$ यह होगा

तब पहले के ऐसा

$$\int \frac{य^{म-१} ताय}{य^{न} — १} = \frac{१}{न} ला (य - १) + \frac{१}{न} यौ कोज्यामप ला(य^{२} - २ य कोज्याप + १)$$

$$— \frac{२}{न} यौ ज्यामप स्प^{-१} \left[\frac{य — कोज्याप}{ज्याप} \right]$$ यहाँ त के स्थान में

१, से $\frac{न-१}{२}$ तक का उत्थापन देने से यौ का मान जानना।

२५। $\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}+१}$ इस का मान जानना हो जहाँ म न से छोटा है तो यदि न सम हो तो $य^{न}+१=०$ इस में य का कोई सम्भव मान न आवेगा इस लिये एक सम्भव मान यदि $अ_{१}$

$= कोज्या\frac{\pi}{न} + ज्या\frac{\pi}{न}\sqrt{-१}$ और दूसरा $अ_{१}^{-१} = \frac{१}{कोज्या\frac{\pi}{न} + ज्या\frac{\pi}{न}\sqrt{-१}}$

$= कोज्या\frac{\pi}{न} - ज्या\frac{\pi}{न}\sqrt{-१}$ मानो तो एक खण्ड भिन्न का मान

$\frac{अ_{१}^{म-१}}{अ_{१}^{न-१}न(य-अ_{१})} = -\frac{अ_{१}^{म}}{न(य-अ_{१})}$ यह और दूसरा $-\frac{अ_{१}^{-म}}{न(य-अ_{१}^{-१})}$

यह हुआ इस लिये कोई दो मानों का योग

$= -\frac{२}{न}\frac{कोज्यामप(य-कोज्याप)-ज्यामपज्याप}{य^{२}-२यकोज्याप+१}$ जहाँ $प = \frac{त\pi}{न}$

तब पूर्वप्रकार के ऐसा।

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}+१} = -\frac{१}{न} यौकोज्यामपला\,(य^{२}-२यकोज्याप+१)$$

$$+\frac{१}{न} यौज्यामप\ स्प^{-१}\frac{य-कोज्याप}{ज्याप}$$ जहाँ त के स्थान में १, ३, ५, ७· न—१ का उत्थापन दे कर यौ का मान जानना होगा।

और यदि न विषम हो तो $य^{न}+१=०$ इस में य का एक मान —१ यह सम्भाव्य होगा इस लिये

$$\int \frac{य^{म-१}ताय}{य^{न}+१} = \frac{(-१)^{म-१}}{न} ला(य+१)$$

$$-\frac{१}{न}यौकोज्यामपला(य^{२}-२यकोज्याप+१)+\frac{२}{न}यौज्यामप\ स्प^{-१}\frac{य-कोज्याप}{ज्याप}$$

यह होगा जहाँ न के स्थान मे १, ३, ५ न—२ का उत्थान देकर यौ का मान जानना है।

२६। $\frac{फ(य)}{य^{न}-१}$ इस का मान खण्ड भिन्न में जानना हो जहाँ

$फ(य) = ग_{०}+ग_{१}य+ग_{२}य^{२}+\cdots+ग_{म-१}य^{म-१}$ जहाँ न से म छोटा है वा समान।

तो न के सम मान में $य^{न}-१=०$ इस मे य $=+१, -१$ ये दो

मान सम्भाव्य है और असम्भव मान में कोई एक जोड़े का मान $अ_२$, $अ_२^{-१}$ मानो तो इन दोनो से उत्पन्न खण्ड भिन्न क्रम से

$\frac{अ_२फ(अ_२)}{न(य—अ_२)}$, और $\frac{अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१})}{न(य—अ_२^{-१})}$ होगे, इन दोनो का योग

$$= \frac{१}{न} \frac{\{ अ_२फ(अ_२) + अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१}) \} य — \{ फ(अ_२) + फ(अ_२^{-१}) \}}{य^२ — (अ_२ + अ_२^{-१})य + १}$$

परन्तु $अ_२ = कोज्या \frac{२तπ}{न} + ज्या \frac{२तπ}{न} \sqrt{—१}$

$अ_२^{-१} = कोज्या \frac{२तπ}{न} — ज्या \frac{२तπ}{न} \sqrt{—१}$

$फ(अ_२) = ग_० + ग_१ अ_२ + ग_२ अ_२^२ + ग_३ अ_२ +$

$अ_२फ(अ_२) = ग_० अ_२ + ग_१ अ_२^२ + ग_२अ_२^३ + ग \quad अ_२^४ +$

$अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१}) = ग_० अ_२^{-१} + ग_१ अ_२^{-२} + ग_२ अ_२^{-३} + ग \quad अ_२^{-४} +$

इस लिये $अ_२फ(अ_२) + अ_२^{-१}फ(अ_२^{-१})$

$= २ग_०कोज्याप + २ग_१कोज्या२प + \quad + २ग_{म-१}कोज्यामप$

और $फ(अ_२) + फ(अ_२^{-१}) = २ग_० + ग_१कोज्याप + ग_२कोज्या२प +$
$+ २ग_{म-१}कोज्या (म—१)प$

$$तब \frac{फ(य)}{य^न—१} = \frac{फ(—१)}{न} \frac{(—१)^{न-१}}{य+१} + \frac{फ(१)}{न} \frac{१}{य—१}$$
$$+ \frac{\frac{२}{न} यौ(ग_०कोज्याप + \quad + ग_{म-१}कोज्यामप)य}{य^२ — २यकोज्याप + १}$$
$$— \frac{यौ \{ ग_० + ग_१कोज्याप + \quad + ग_{म-१}कोज्या(म—१)प \}}{य^२ — २यकोज्याप + १}$$

यहाँ त के स्थान मे १, २, $\frac{न-२}{२}$ का उत्थापन देकर यौ का मान जानना। यदि न विषम हो तो $य^न—१ = ०$ इस मे य का एक ही +१मान सम्भाव्य होगा इस लिये ऊपर के मान मे पहला खण्ड छोड़ देना चाहिये और त के स्थान मे १, २, $\frac{न-१}{२}$ का उत्थापन देकर यौ का मान ले आना चाहिये।

२७। इसी प्रकार यदि $\frac{फ(य)}{य^न + १}$ इस का रूप खण्ड भिन्नो में लाना हो तो ऊपर की युक्ति से ला सकते हो विशेष इतना ही है कि $अ_२$ का मान $कोज्या\frac{तπ}{न} + ज्या\frac{तπ}{न}\sqrt{—१}$ यह कल्पना करना चाहिये जहाँ त के स्थान मे १, ३, · ५, न— १ इत्यादि का उत्थापन देना चाहिये यदि न सम हो और यदि न विषम हो तो १, ३, ५, · · न— २ का।

२८। इस प्रक्रम में क्रिया समेत कुछ उदाहरणों को दिखा कर इस अध्याय को समाप्त करते है।

(१) उदा० $\int \frac{\text{य}^{5}\text{ताय}}{(\text{अ}^{2}—\text{य}^{2})^{2}}$ इस का क्या मान है।

यहाँ २२वें प्रक्रम से ५ = २म + १ म = २। न = २। ग = —१ और अ के स्थान मे अ^{2} और (अ^{2}—य^{2}) के स्थान में र का उत्थापन देने से।

$$\int \frac{\text{य}^{5}\text{ताय}}{(\text{अ}^{2}—\text{य}^{2})^{2}} = \int \frac{(\text{र}—\text{अ})^{\text{म}}\text{तार}}{२\text{ग}^{\text{म}+१}\text{र}^{\text{न}}} = \int \frac{(\text{र}-\text{अ})^{2}}{२\text{ग}^{3}\text{र}^{2}}\,\text{तार}$$

$$= \int \frac{\text{र}^{2}—२\text{रअ}+\text{अ}^{2}}{२\text{ग}^{3}\text{र}^{2}}\,\text{तार} = \frac{१}{२\text{ग}}\int \text{तार}—२\text{अ}\int \frac{\text{तार}}{\text{र}} + \text{अ}^{2}\int \text{तार}\,\text{र}^{-2}$$

$$= \frac{१}{२\text{ग}^{3}}\left[\text{र}—२\text{अलार}—\frac{\text{अ}^{2}}{\text{र}}\right]$$

$$= —\tfrac{१}{२}\left[\text{अ}^{2}—\text{य}^{2}—२\text{अ}^{2}\text{ला}(\text{अ}^{2}—\text{य}^{2})—\frac{\text{अ}^{4}}{\text{अ}^{2}—\text{य}^{2}}\right]$$

$$= \frac{\text{अ}^{4}}{२(\text{अ}^{2}—\text{य}^{2})} + \frac{\text{य}^{2}}{२} + \text{अ}^{2}\text{ला}(\text{अ}^{2}—\text{य}^{2})$$ । स्थिराङ्क $\frac{\text{अ}}{२}$ को छोड़ देने से

यही उत्तर हुआ।

(२) उदा० $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{4}—१}$ इस का क्या मान है।

यहाँ २३वें प्रक्रम के प्रथम समीकरण से

न = ४। म = २ और त के स्थान मे १ का उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{2\text{म}}—१} = \frac{१}{२\text{म}}\text{ला}\frac{\text{य}—१}{\text{य}+१}$$

$$+ \frac{१}{२\text{म}}\text{यौकोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\,\text{ला}\left(\text{य}^{2}—२\text{यकोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}+१\right)$$

$$—\frac{१}{\text{म}}\text{यौज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}—\text{कोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}{\text{ज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}\right]$$

$$= \tfrac{१}{४}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}—१}{\text{य}+१} + \tfrac{१}{४}\,\text{कोज्या}\,\tfrac{\pi}{२}\,\text{ला}\left(\text{य}^{2}—२\text{कोज्या}\,\tfrac{\pi}{२}+१\right)$$

$$—\tfrac{१}{२}\,\text{ज्या}\,\tfrac{\pi}{२}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}—\text{कोज्या}\frac{\pi}{२}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{२}}\right]$$

$$= \tfrac{१}{४}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}—१}{\text{य}+१}—\tfrac{१}{२}\,\text{स्प}^{-१}\,\text{य} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{4}—१}$$ यही उत्तर हुआ।

(३) उदा० $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{६} - १}$ इस का क्या मान है।

यहाँ भी २३वे प्रक्रम से न = ६। म = ३ और त के स्थान मे १, २, का उत्थापन देने से क्योंकि २ = म — १

$$\text{यौकोज्या}\,\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\,\text{ला}\left(\text{य}^{२} - २\text{यकोज्या}\,\frac{\text{त}\pi}{\text{म}} + १\right)$$

$$= \text{कोज्या}\,\frac{\pi}{3}\,\text{ला}\left(\text{य}^{२} - २\text{यकोज्या}\,\frac{\pi}{3} + १\right)$$

$$+ \text{कोज्या}\,\frac{२\pi}{3}\,\text{ला}\left(\text{य}^{२} - २\text{यकोज्या}\,\frac{२\pi}{3} + १\right)$$

$$= \frac{१}{२}\,\text{ला}\,(\text{य}^{२} - \text{य} + १) - \frac{१}{२}\,\text{ला}\,(\text{य}^{२} + \text{य} + १)$$

$$\text{और}\quad \text{यौज्या}\,\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}{\text{ज्या}\frac{\text{त}\pi}{\text{म}}}\right]$$

$$= \text{ज्या}\,\frac{\pi}{3}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{\pi}{3}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{3}}\right] + \text{ज्या}\frac{२\pi}{3}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{२\pi}{3}}{\text{ज्या}\,\frac{२\pi}{3}}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{३}}{२}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य} - १}{\sqrt{३}}\right] + \frac{\sqrt{३}}{२}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य} + १}{\sqrt{३}}\right]$$

इन सब का (१) मे उत्थापन देने से

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{६} - १} = \frac{१}{६}\text{ला}\frac{\text{य} - १}{\text{य} + १} + \frac{१}{६}\left\{\text{ला}(\text{य}^{२} - \text{य} + १) - \text{ला}(\text{य}^{२} + \text{य} + १)\right\}$$

$$- \frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य} - १}{\sqrt{३}}\right] + \text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य} + १}{\sqrt{३}}\right]\right\}$$ यही उत्तर हुआ।

(४) उदा० $\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{३} - १}$ इस का क्या मान है।

यहाँ २३वे प्रक्रम के (२) समीकरण से न = ३। म = १ और त = १। तब

$$\int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^{२\text{म}+१} - १} = \frac{\text{ला}(\text{य} - १)}{२\text{म} + १}$$

$$+ \frac{१}{२\text{म} + १}\,\text{यौकोज्या}\frac{२\text{त}\pi}{२\text{म}+१}\,\text{ला}\left(१ - २\text{कोज्या}\,\frac{२\text{त}\pi}{२\text{म}+१} + \text{य}^{२}\right)$$

$$- \frac{२}{२\text{म} + १}\,\text{यौज्या}\,\frac{२\text{त}\pi}{२\text{म}+१}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{२\text{त}\pi}{२\text{म}+१}}{\text{ज्या}\,\frac{२\text{त}\pi}{२\text{म}+१}}\right]$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य} - १)}{३} + \frac{२}{३}\,\text{कोज्या}\,\frac{२\pi}{३}\,\text{ला}\left(१ - २\text{यकोज्या}\,\frac{२\pi}{३} + \text{य}^{२}\right)$$

$$- \frac{२}{३}\,\text{ज्या}\,\frac{२\pi}{३}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{२\pi}{३}}{\text{ज्या}\frac{२\pi}{३}}\right]$$

$$=\frac{१}{३}\text{ला}(\text{य}-१)-\frac{१}{६}\text{ला}(१+\text{य}+\text{य}^{२})-\frac{१}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right]$$

$$=\frac{१}{६}\text{ला}\frac{(\text{य}-१)^{२}}{\text{य}^{२}+\text{य}+१}-\frac{१}{\sqrt{३}}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right)$$

(५) उदा० $\int\frac{\text{य}^{४}\text{ताय}}{\text{य}^{६}-१}$ इसका मान क्या होगा।

यहाँ २४वे प्रक्रम से म = ५। न = ६ त = १, २। $\text{प}=\frac{२\text{त}\pi}{\text{न}}=\frac{२\pi}{६},\frac{४\pi}{६}$, तब

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}-१}=\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{\text{न}}+\frac{(-१)^{\text{म}}}{\text{न}}\text{ला}\ (\text{य}+१)$$

$$+\frac{१}{\text{न}}\text{यौकोज्यामपला}\ (\text{य}^{२}-२\text{यकोज्याप}+१)$$

$$-\frac{२}{\text{न}}\text{यौज्यामप स्प}^{-१}\left\{\frac{\text{य}-\text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}}\right\}$$

$$=\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{६}-\frac{\text{ला}(\text{य}+१)}{६}+\frac{१}{६}\left\{\text{कोज्या}\frac{५\times२\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}\ \frac{२\pi}{६}+१)\right\}$$

$$+\frac{१}{६}\left\{\text{कोज्या}\ \frac{५\times४\pi}{६}\text{ला}\ (\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}\ \frac{४\pi}{६}+१)\right\}$$

$$-\frac{१}{३}\left\{\text{ज्या}\ \frac{५\times२\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\ \frac{२\pi}{६}}{\text{ज्या}\ \frac{२\pi}{६}}\right]\right\}$$

$$-\frac{१}{३}\left\{\text{ज्या}\frac{५\times४\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{४\pi}{६}}{\text{ज्या}\frac{४\pi}{६}}\right]\right\}$$

$$=\frac{१}{६}\text{ला}\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१}+\frac{१}{१२}\text{ला}\ (\text{य}^{२}-\text{य}+१)-\frac{१}{१२}\text{ला}(\text{य}^{२}+\text{य}+१)$$

$$+\frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}}\right]+\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right]\right\}$$

$$=\frac{१}{६}\text{ला}\frac{\text{य}-१}{\text{य}+१}+\frac{१}{१२}\text{ला}\frac{\text{य}^{२}-\text{य}+१}{\text{य}^{२}+\text{य}+१}+\frac{१}{२\sqrt{३}}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}}\right]+\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}\right]\right\}$$

यही उत्तर हुआ।

(६) उदा० $\int\frac{\text{य}^{३}\text{ताय}}{\text{य}^{५}-१}$ इसका क्या मान है।

यहाँ भी २४ वें प्रक्रम से म = ४। न = ५। त = १, २, $\text{प}=\frac{२\pi}{५},\frac{४\pi}{५}$ इस लिये

$$\int \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\,\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}-१} = \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{\text{न}} + \frac{१}{\text{न}}\,\text{यौकोज्यामपला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}+१)$$

$$-\frac{२}{\text{न}}\,\text{यौज्यामप स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}}\right]$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५} + \frac{१}{५}\left\{\text{कोज्या}\,\frac{६\pi}{५}\,\text{ला}\left(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}\frac{२\pi}{५}+१\right)\right.$$

$$\left. + \text{कोज्या}\,\frac{१६\pi}{५}\,\text{ला}\left(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}\frac{४\pi}{५}+१\right)\right\}$$

$$-\frac{२}{५}\left\{\text{ज्या}\frac{६\pi}{५}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{२\pi}{५}}{\text{ज्या}\frac{२\pi}{५}}\right] + \text{ज्या}\frac{१६\pi}{५}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}\frac{४\pi}{५}}{\text{ज्या}\frac{४\pi}{५}}\right]\right\}$$

$$= \frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५} + \frac{१}{५}\left\{\text{ज्या}१८^{\circ}\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}७२^{\circ}+१)\right\}$$

$$-\frac{१}{५}\left\{\text{कोज्या}३६^{\circ}\text{ला}(\text{य}^{२}+२\text{यज्या}५४^{\circ}+१)\right\}$$

$$+\frac{२}{५}\left\{\text{कोज्या}१८^{\circ}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}७२^{\circ}}{\text{ज्या}७२^{\circ}}\right] + \text{ज्या}३६^{\circ}\,\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}+\text{कोज्या}३६^{\circ}}{\text{ज्या}३६^{\circ}}\right]\right\}$$

$$+\frac{\text{ला}(\text{य}-१)}{५} + \frac{\text{ज्या}१८^{\circ}}{५}\left\{\text{ला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्या}७२^{\circ}+१)\right\}$$

$$-\frac{\text{ज्या}१८^{\circ}}{५}\left\{२\text{कोज्या}१८^{\circ}\text{ला}(\text{य}^{२}+\text{यज्या}५४^{\circ}+१)\right\}$$

$$+\frac{२\text{कोज्या}१८^{\circ}}{५}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्या}७२^{\circ}}{\text{ज्या}७२^{\circ}}\right] + २\text{ज्या}१८^{\circ}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}+\text{कोज्या}३६^{\circ}}{\text{ज्या}३६^{\circ}}\right]\right\}$$

$= \int \frac{\text{य}^{२}\,\text{ताय}}{\text{य}^{५}-१}$ यही उत्तर हुआ ।

(७) उदा० $\int \frac{\text{य}^{४}\,\text{ताय}}{\text{य}^{६}+१}$ इसका क्या मान है ।

यहाँ २५वे प्रक्रम से न = ६ । म = ५, त = १, ३, ५ और $\text{प} = \frac{\pi}{६}, \frac{३\pi}{६}, \frac{५\pi}{६}$

इस लिये $\int \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\,\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}}+१} = -\frac{१}{\text{न}}\,\text{यौकोज्यामपला}(\text{य}^{२}-२\text{यकोज्याप}+१)$

$$+\frac{२}{\text{न}}\,\text{यौज्यामप स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य}-\text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}}\right] = \int \frac{\text{य}^{४}\,\text{ताय}}{\text{य}^{६}+१}$$

$$= -\frac{१}{६}\left\{ \text{कोज्या}\frac{५\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\frac{\pi}{६} + १) + \text{कोज्या}\frac{१५\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\frac{\pi}{२} + १) + \text{कोज्या}\frac{२५\pi}{६}\text{ला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\frac{५\pi}{६} + १) \right\}$$

$$+ -\frac{१}{३}\left\{ \text{ज्या}\frac{५\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{\pi}{६}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{६}}\right] + \text{ज्या}\frac{१५\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{\pi}{२}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{२}}\right] + \text{ज्या}\frac{२५\pi}{६}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{५\pi}{६}}{\text{ज्या}\frac{५\pi}{६}}\right] \right\}$$

$$= \frac{१}{६}\left\{ \frac{\sqrt{३}}{२}\text{ला}(\text{य}^२ - \text{य}\sqrt{३} + १) - \frac{\sqrt{३}}{२}\text{ला}(\text{य}^२ + \text{य}\sqrt{३} + १) \right\}$$

$$+ \frac{१}{३}\left\{ \frac{१}{२}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य} - \sqrt{३}}{१}\right] + \text{स्प}^{-१}\text{य} + \frac{१}{२}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{२\text{य} + \sqrt{३}}{१}\right] \right\}$$

$$= \frac{१}{६}\left\{ \text{स्प}^{-१}(२\text{य} - \sqrt{३}) + \text{स्प}^{-१}(२\text{य} + \sqrt{३}) \right\}$$

$$+ \frac{\text{स्प}^{-१}\text{य}}{३} + \frac{१}{४\sqrt{३}}\ \text{ला}\frac{\text{य}^२ - \text{य}\sqrt{३} + १}{\text{य}^२ + \text{य}\sqrt{३} + १}$$ यही उत्तर हुआ ।

(८) उदा० $\int \frac{\text{य}^३\text{ताय}}{\text{य}^५ + १}$ इसका क्या मान है ।

यहाँ भी २५वें प्रक्रम से न = ५ । म = ४ । त = १,३ । प = $\frac{\pi}{५}, \frac{३\pi}{५}$

इस लिये

$$\int \frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{न}} - १} = \frac{(-१)^{\text{म}-१}}{\text{न}}\text{ला}(\text{य} - १) - \frac{१}{\text{न}}\text{यौकोज्यामपला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्याप} + १)$$

$$+ \frac{२}{\text{न}}\text{यौज्यामप स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्याप}}{\text{ज्याप}}\right] = \int \frac{\text{य}^३\text{ताय}}{१}$$

$$= -\frac{\text{ला}(\text{य} - १)}{\text{न}} - \frac{१}{५}\left\{ \text{कोज्या}\frac{४\pi}{५}\text{ला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\frac{\pi}{५} + १) + \text{कोज्या}\frac{१२\pi}{५}\text{ला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}\frac{३\pi}{५} + १) \right\}$$

$$+ \frac{२}{५}\left\{ \text{ज्या}\frac{४\pi}{५}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{\pi}{५}}{\text{ज्या}\frac{\pi}{५}}\right] + \text{ज्या}\frac{१२\pi}{५}\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{य} - \text{कोज्या}\frac{३\pi}{५}}{\text{ज्या}\frac{३\pi}{५}}\right] \right\}$$

$$= -\frac{\text{ला}(\text{य} - १)}{५} + \frac{१}{५}\left\{ \text{कोज्या}३६^\circ\text{ला}(\text{य}^२ - २\text{यकोज्या}३६^\circ + १) - \text{कोज्या}\ ७२^\circ\text{ला}(\text{य}^२ + २\text{यकोज्या}७२^\circ + १) \right\}$$

$$+\frac{२}{५}\left\{ज्या३६^\circ\, स्प^{-१}\left[\frac{य कोज्या३६^\circ}{ज्या३६^\circ}\right]+ज्या७२^\circ\, स्प^{-१}\left[\frac{य+कोज्या७२^\circ}{ज्या७२^\circ}\right]\right\}$$

$$=-\frac{ला(य-१)}{५}$$

$$+\frac{कोज्या३६^\circ}{५}\left\{ला(य^२-२य कोज्या३६^\circ+१)-२ज्या३६^\circ ला(य^२+२य कोज्या७२^\circ+१\right\}$$

$$+\frac{२ज्या३६^\circ}{५}\left\{स्प^{-१}\left[\frac{य-कोज्या३६^\circ}{ज्या३६^\circ}\right]+२कोज्या३६^\circ\, स्प^{-१}\left[\frac{य+कोज्या७२^\circ}{ज्या७२^\circ}\right]\right\}$$

यही उत्तर हुआ।

(९) उदा० $\int\frac{२+य^२}{य^६-१}ताय$ इस का क्या मान होगा।

यहाँ २६वे प्रक्रम से $ग_० = २$। $ग_१ = ०$। $ग_२ = १$। फ(य) $= २+य^२$। $न=६$ और, $त = १, २$। $प = \frac{२\pi}{६}, \frac{४\pi}{६}$ इस लिये

$$\frac{फ(य)}{य^न-१}=\frac{फ(-१)}{न}\,\frac{(-१)^{न-१}}{य+१}+\frac{फ(१)}{न}\,\frac{१}{य-१}$$

$$+\frac{\frac{२}{न}\,यौ(ग_० कोज्याप+\quad+ग_{म-१} कोज्यामप)य}{य^२-२य कोज्याप+१}$$

$$-\frac{यौ\{ग_०+ग_१ कोज्याप+\quad+ग_{म-१} कोज्या(म-१)प\}}{य^२-२य कोज्याप+१}$$

$$=-\frac{१}{२}\frac{१}{य+१}+\frac{१}{२}\frac{१}{य-१}+\frac{१}{३}\,\frac{(२कोज्या\frac{२\pi}{६}+कोज्या\frac{६\pi}{६})\,य-२-कोज्या\frac{४\pi}{६}}{य^२-२य कोज्या\frac{२\pi}{६}+१}$$

$$+\frac{१}{३}\,\frac{(२कोज्या\frac{४\pi}{६}+कोज्या\frac{१२\pi}{६})य-२-कोज्या\frac{८\pi}{६}}{य^२-२य कोज्या\frac{४\pi}{६}+१}$$

$$=\frac{१}{२}\frac{१}{य-१}-\frac{१}{२}\frac{१}{य+१}+\frac{१}{३}\,\frac{(१-१)य-२+\frac{१}{२}}{य^२-य+१}+\frac{१}{३}\frac{(-१+१)य-२+\frac{१}{२}}{य^२+य+१}$$

$$=\frac{१}{२}\frac{१}{य-१}-\frac{१}{२}\frac{१}{य+१}-\frac{१}{२}\frac{१}{य^२-य+१}-\frac{१}{२}\,\frac{१}{य^२+य+१}=\frac{२+य^२}{य^६-१}$$

इस लिये $\int\frac{२+य^२}{य^६-१}ताय=\frac{१}{२}ला\frac{य-१}{य+१}-\frac{१}{२}\int\frac{ताय}{य^२-य+१}-\frac{१}{२}\int\frac{ताय}{य^२+य+१}$

$$=\frac{१}{२}ला\,\frac{य-१}{य+१}-\frac{१}{\sqrt{३}}\,स्प^{-१}\,\frac{२य+१}{\sqrt{३}}-\frac{१}{\sqrt{३}}\,स्प^{-१}\,\frac{२य-१}{\sqrt{३}}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ला} \frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} - \frac{१}{\sqrt{३}} \left[\text{स्प}^{-१} \frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}} + \text{स्प}^{-१} \frac{२\text{य}-१}{\sqrt{३}} \right]$$

यही उत्तर हुआ।

इस तरह से विद्यार्थियों को चाहिये कि उदाहरणों के रूप के अनुसार जहाँ जिस प्रक्रम का प्रयोजन पड़े उसे अच्छी तरह से समझ कर चलराशि का मान ले आवें।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

सिद्ध करो कि

१। $\int \frac{२\text{य}+३}{\text{य}^3+\text{य}^2-२\text{य}} \text{ताय} = \frac{१}{६} \text{ला} \frac{(\text{य}-१)^{१०}}{\text{य}+२} - \frac{३}{२} \text{लाय}$।

२। $\int \frac{\text{य}^2-३}{\text{य}^2-७\text{य}+६} \text{ताय} = \frac{१}{१०} \text{ला} \left\{ (\text{य}-२)^2(\text{य}+३)^2 \right\} + \text{ला} \left\{ (\text{य}-१)^2 \right\}$

३। $\int \frac{(२\text{य}+१)}{\text{य}(\text{य}+१)(\text{य}+२)} \text{ताय} = \text{ला} \left\{ \frac{(\text{य}+१)\sqrt{\text{य}}}{(\text{य}+२)^{\frac{३}{२}}} \right\}$।

४। $\int \frac{७\text{य}^2 \text{ताय}}{\text{य}^4-\text{य}^2-१२} = \text{ला} \left[\frac{\text{य}-२}{\text{य}+२} \right] + \sqrt{३}\, \text{स्प}^{-१} \left(\frac{\text{य}}{\sqrt{३}} \right)$।

५। $\int \frac{६\text{ताय}}{\text{य}^3-१} = \text{ला} \frac{(\text{य}-१)^2}{\text{य}^2+\text{य}+१} - २\sqrt{३}\, \text{स्प}^{-१} \frac{२\text{य}+१}{\sqrt{३}}$

६। $\int \frac{२\text{य}^3 \text{ताय}}{\text{य}^2+७\text{य}+१२} = \text{य}^2 - १४\text{य} + १२८ \text{ ला } (\text{य}+४) - ५४ \text{ ला } (\text{य}+३)$।

७। $\int \frac{८\text{अय}^2-१२\text{अ}^3}{\text{य}^4-\text{अ}^4} \text{ताय} = १० \text{ स्प}^{-१} \frac{\text{य}}{\text{अ}} - \text{ला} \frac{\text{य}-\text{अ}}{\text{य}+\text{अ}}$।

८। $\int \frac{६\text{य}^2 \text{ताय}}{\text{य}^4+\text{य}^2-२} = \text{ला} \frac{\text{य}-१}{\text{य}+१} + २\sqrt{२}\, \text{स्प}^{-१} \frac{\text{य}}{\sqrt{२}}$

९। $\int \frac{(१८\text{य}-६)\text{ताय}}{\text{य}^3-\text{य}^2-२\text{य}} = ३ \text{ लाय} + ५ \text{ ला}(\text{य}-२) - ८ \text{ ला}(\text{य}+१)$।

१०। $\int \frac{४ \text{ ताय}}{\text{य}(\text{य}^3+\text{य}^2+\text{य}+१)} = \text{लाय}^4 - \text{ला}(\text{य}+१)^2 - \text{ला}(\text{य}^2+१) - २ \text{ स्प}^{-१} \text{य}$।

११। $\int \frac{४\text{ताय}}{(\text{य}-१)^2(\text{य}^2+१)} = \text{ला}(\text{य}^2+१) - \text{ला}(\text{य}-१)^2 - \frac{१}{\text{य}-१} - \frac{१}{\text{य}^2+१} + \text{स्प}^{-१} \text{य}$।

१२ । $$\int \frac{\text{१००}\,\text{य}\,\text{ताय}}{(\text{१}\times\text{२य})^{\text{२}}(\text{१}+\text{य}+\text{य}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{३}})} = \frac{\text{४०}}{\text{१}+\text{२य}} - \text{ला}\,(\text{१}+\text{य})^{\text{५०}}$$
$$-\text{ला}(\text{१}+\text{य}^{\text{२}})^{\text{७}} + \text{ला}\,(\text{१}\times\text{२य})^{\text{६४}} + \text{२}\,\text{स्प}^{-\text{१}}\,\text{य}\text{।}$$

१३ । $$\int \frac{\text{४य}^{\text{२}}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{४}}+\text{१}} = \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{२}}}\,\text{ला}\,\frac{\text{य}^{\text{२}}-\text{य}\sqrt{\text{२}}+\text{१}}{\text{य}^{\text{२}}+\text{य}\sqrt{\text{२}}+\text{१}}$$
$$+\sqrt{\text{२}}\left\{\text{स्प}^{-\text{१}}(\text{य}\sqrt{\text{२}}+\text{१})+\text{स्प}^{-\text{१}}\,(\text{य}\sqrt{\text{२}}-\text{१})\right\}$$

१४ । $$\int \frac{\text{१२य}^{\text{३}}\text{ताय}}{\text{य}^{\text{६}}+\text{१}} = \text{ला}\,\frac{\text{य}^{\text{४}}-\text{य}^{\text{२}}+\text{१}}{\text{य}^{\text{४}}+\text{२य}^{\text{२}}+\text{१}}$$
$$+\text{२}\sqrt{\text{३}}\,\{\,\text{स्प}^{-\text{१}}\,(\text{२य}-\sqrt{\text{३}})-\text{स्प}^{-\text{१}}\,(\text{२य}+\sqrt{\text{३}})\,\}$$

१५ । $$\int \frac{\text{८}\,\text{ताय}}{\text{य}^{\text{८}}+\text{य}^{\text{७}}-\text{य}^{\text{४}}-\text{य}^{\text{३}}} = \text{ला}\,\frac{\text{१}-\text{य}}{\text{१}+\text{य}^{\text{२}}} + \text{९}\,\text{ला}\,(\text{१}+\text{य}) - \text{८}\,\text{लाय}$$
$$+\frac{\text{४}}{\text{य}^{\text{२}}} - \frac{\text{८}}{\text{य}} + \frac{\text{२य}}{\text{य}+\text{१}} - \text{२}\,\text{स्प}^{-\text{१}}\text{य}\text{ ।}$$

१६ । $$\int \frac{\text{य}^{\text{२}}\text{ताय}}{(\text{अ}^{\text{२}}+\text{गय}^{\text{२}})^{\text{४}}} = -\frac{\text{१}}{\text{४ग}^{\text{२}}(\text{अ}^{\text{२}}+\text{गय}^{\text{२}})^{\text{२}}} + \frac{\text{अ}}{\text{६ग}^{\text{२}}(\text{अ}^{\text{२}}+\text{गय}^{\text{२}})^{\text{३}}}\text{ ।}$$

१७ । $$\int \frac{\text{य}^{\text{५}}\text{ताय}}{(\text{१}+\text{य}^{\text{२}})^{\text{३}}} = \frac{\text{१}}{\text{य}^{\text{२}}+\text{१}} - \frac{\text{१}}{\text{४}(\text{य}^{\text{२}}+\text{१})^{\text{२}}} + \tfrac{\text{१}}{\text{२}}\,\text{ला}\,(\text{य}+\text{१})\text{ ।}$$

१८ । $$\int \frac{(\text{८य}-\text{२०})\text{ताय}}{(\text{य}+\text{३})(\text{य}+\text{१})^{\text{२}}} = \frac{\text{१४}}{\text{य}+\text{१}} + \text{११}\,\text{ला}\left[\frac{\text{य}+\text{१}}{\text{य}+\text{३}}\right]$$

१९ । $$\int \frac{(\text{अ}^{\text{२}}-\text{क}^{\text{२}})\text{ताय}}{\text{ज्याय}(\text{अ}+\text{ककोज्याय})} = (\text{अ}+\text{क})\text{ला}(\text{ज्या}\tfrac{\text{य}}{\text{२}})-(\text{अ}-\text{क})\text{ला}(\text{कोज्या}\tfrac{\text{य}}{\text{२}})$$
$$+\text{कला}(\text{अ}+\text{ककोज्याय})$$

यहाँ ज्याय = र मान क्रिया करने मे शीघ्र चल ज्ञान होगा ।

२० । $$\int \frac{\text{ताय}}{\text{३ज्याय}+\text{ज्या२य}} = \text{लाज्या}\tfrac{\text{य}}{\text{२}} - \tfrac{\text{१}}{\text{३}}\text{लाकोज्या}\tfrac{\text{य}}{\text{२}} + \tfrac{\text{२}}{\text{३}}\text{ला}(\text{३}+\text{२कोज्याय})\text{।}$$

२१ । $$\int \frac{\text{तार}}{(\text{१}-\text{र}^{\text{३}})^{\frac{\text{१}}{\text{३}}}} = \tfrac{\text{१}}{\text{६}}\text{ला}(\text{य}^{\text{२}}+\text{य}+\text{१}) - \tfrac{\text{१}}{\text{३}}\text{ला}(\text{य}-\text{१}) - \frac{\text{१}}{\sqrt{\text{३}}}\,\text{स्प}^{-\text{१}}\left(\frac{\text{२य}+\text{१}}{\sqrt{\text{३}}}\right)\text{।}$$

यदि $\text{१}-\text{र}^{\text{३}}=\text{र}^{\text{३}}\text{य}^{\text{३}}$ ।

२२ । $$\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}+\text{१})(\text{३य}^{\text{२}}+\text{३य}+\text{१})^{\frac{\text{१}}{\text{३}}}} = \int \frac{\text{तार}}{(\text{१}-\text{र}^{\text{३}})^{\frac{\text{१}}{\text{३}}}}\ \text{यदि}\ \text{र} = \frac{\text{य}}{\text{१}+\text{य}}\text{ ।}$$

२३ । सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो $\dfrac{\text{फ}(\text{य})}{\text{य}^{\text{न}}+\text{१}}$

$$= -\frac{2}{न}\frac{यौ\{ग_0 कोज्याष + ग_1 कोज्या२ष + \cdots + ग_{म-१} कोज्यामष\}य}{य^2 - २यकोज्याष + १}$$

$$-\frac{यौ\{ग_0 + ग_1 कोज्याष + \cdots + ग_{म-१} कोज्या(म-१)ष\}}{य^2 - २यकोज्याष + १}$$

जहाँ $फ(य) = ग_0 + ग_1 य = म_2 य^2 + \cdot + ग_{म-१} य^{म-१}$ और $म < न$

यहाँ ष का मान $= \frac{त\pi}{न}$ जहाँ $त = १, ३, \cdots न-१$ है।

२४। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{२+य^2}{१+य^6} ताय = \frac{१}{२\sqrt{३}} ला \frac{य^2 + य\sqrt{३} + १}{य^2 - य\sqrt{३} + १}$$

$$+ \frac{2}{3}\{स्प^{-१}(२य + \sqrt{३}) + स्प^{-१}(२य - \sqrt{३})\} + \frac{1}{3} स्प^{-१}य$$

२५। एक महाजन के प्रतिक्षण की आमदनी में, संचित धन के वर्ग में एक घटा कर जो शेष रहे उसका भाग देने से जो लब्ध हो उतनी प्रतिक्षण में उस के गुमाश्ते की आमदनी है तो बताओ जिस समय महाजन के संचित धन का प्रमाण १००००० है उस समय गुमाश्ते के धन का क्या प्रमाण होगा।

उत्तर, गुमाश्ते को उस समय

०·०००००९९४ इतना ऋण हो गया था।

इति द्वितीयोऽध्याय।

तृतीयाध्याय ।

लघूकरणपरम्परा के विषय मे ।

२९ । कल्पना करो कि $\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \text{च}_{\text{न}}$ ।

$\int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}-१}} = \text{च}_{\text{न}-१}$ । इत्यादि मानो ।

और $\frac{१}{\text{य}^2+\text{अ}^2} = \text{त}$, तो खण्डचलानयन से

$$\text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + २\text{न}\int \frac{\text{य}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

परन्तु $$\frac{\text{य}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} = \frac{(\text{य}^2+\text{अ}^2)\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} - \frac{\text{अ}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} - \frac{\text{अ}^2\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}}$$

इस लिये $$\text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}}$$

$$+ २\text{न} \left\{ \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} - \text{अ}^2 \int \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}+१}} \right\}$$

$$= \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + २\text{न}\,\text{च}_{\text{न}} - २\text{न}\text{अ}^2\text{च}_{\text{न}+१}$$

पक्षान्तरानयन से

$$२\text{न}\,\text{अ}^2\text{च}_{\text{न}+१} = \frac{\text{य}}{(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + (२\text{न}-१)\,\text{च}_{\text{न}}$$

इस लिये $$\text{च}_{\text{न}+१} = \frac{\text{य}}{२\text{न}\text{अ}^2(\text{य}^2+\text{अ}^2)^{\text{न}}} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}^2}\text{च}_{\text{न}} = \frac{\text{य}\text{त}^{\text{न}}}{२\text{न}\text{अ}^2} + \frac{(२\text{न}-१)}{२\text{न}\text{अ}^2}\text{च}_{\text{न}}$$

इसमें न के स्थान मे न−१ का उत्थापन देने से

$$\text{च}_{\text{न}} = \frac{\text{य}\text{त}^{\text{न}-१}}{\text{अ}^2(२\text{न}-२)} + \frac{२\text{न}-३}{\text{अ}^2(२\text{न}-२)}\text{च}_{\text{न}-१} \quad \cdot (१)$$

यही (१) समीकरण १८वें प्रक्रम के (१) उदाहरण के (अ) सिद्धान्त में भी सिद्ध हुआ है।

देखो यहाँ $\text{च}_{\text{न}}$ का मान $\text{च}_{\text{न}-१}$ के अधीन है और $\text{च}_{\text{न}-१}$ का मान (१) इसी मे न के स्थान में न−१ का उत्थापन देने से

$$\frac{\text{यत}^{\text{न}-?}}{\text{अ}^{2}(2\text{न}-4)} + \frac{2\text{न}-5}{\text{अ}^{2}(2\text{न}-4)}\text{च}_{\text{न}-2}$$ यह होगा ।

इसी प्रकार

$$\text{च}_{\text{न}-2} = \frac{\text{यत}^{\text{न}-3}}{\text{अ}^{2}(2\text{न}-6)} + \frac{2\text{न}-7}{\text{अ}^{2}(2\text{न}-6)}\text{च}_{\text{न}-?}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\text{च}_1 = \frac{1}{\text{अ}}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

यहाँ जिस प्रकार से $\text{च}_{\text{न}}$, $\text{च}_{\text{न}-1}$, $\text{च}_{\text{न}-2}$, · · · इत्यादि के मान सिद्ध हुए है इसे लघूकरण सिद्धान्त कहते है । इसके बल से अनेक चल का ज्ञान हो जाता है । इसके अनेक भेद है थोड़ा सा यहां प्रकाश किया जायगा । परन्तु इतना स्मरण रखना चाहिये कि लघूकरण सिद्धान्त से अन्त का चल नही सिद्ध होता है उस के लिये पिछले अध्यायों की क्रिया करनी पड़ेगी । जैसे इसी प्रक्रम के (१) समीकरण मे यदि न के स्थान में १ का उत्थापन दो तो

$$\text{च}_1 = \frac{\text{यत}^{1-1}}{\text{अ}^{2}(2-2)} + \frac{2-3}{\text{अ}^{2}(2-2)}\text{च}_0 = \infty$$ । इस से देखो च_1 का मान अनन्त सिद्ध होता है परन्तु पूर्व कल्पना से $\text{च}_1 = \int \frac{\text{ताय}}{\text{य}^2+\text{अ}^2}$ और यह प्रथमाध्याय से $\frac{1}{\text{अ}}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$ इस के तुल्य है ।

इस लिये $\text{च}_1 = \frac{1}{\text{अ}}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$ इस का उत्थापन देने से

$$\text{च}_2 = \frac{\text{तय}}{2\text{अ}^2} + \frac{1}{2\text{अ}^3}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

$$\text{च}_3 = \frac{\text{त}^2\text{य}}{4\text{अ}^2} + \frac{3\text{तय}}{2\cdot4\text{अ}^4} + \frac{3}{2\cdot4\text{अ}^5}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

$$\text{च}_4 = \frac{\text{त}^3\text{य}}{6\text{अ}^2} + \frac{5\text{त}^2\text{य}}{4\cdot6\text{अ}^4} + \frac{5\cdot3\text{तय}}{2\cdot4\cdot6\text{अ}^6} + \frac{5\cdot3}{2\cdot4\,6\text{अ}^7}\text{स्प}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}$$

इत्यादि सिद्ध होते चले जायँगे ।

३० । यदि $\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \int \frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{(\text{अ}^2+\text{य}^2)^{\text{न}}}$ तो खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \int य^{म-१} \frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न} = \int य^{म-१}ता\,,\left\{-\frac{१}{२न-२}\,\frac{१}{(अ^२+य^२)^{न-१}}\right\}$$

$$= -\frac{१}{२न-२}\,\frac{य^{म-१}}{(अ^२+य^२)^{न-१}} + \frac{म-१}{२न-२}\cdot\int\frac{य^{म-२}ताय}{(अ^२+य^२)^{न-१}}$$

$$= -\frac{१}{२न-२}\,\frac{य^{म-१}}{(अ^२+य^२)^{न-१}} + \frac{म-१}{२न-२}\,च_{म-२,न-१}$$

इस सिद्धान्त से वार वार क्रिया करने से $च_{म-२,न-१}$ । $च_{म-४,न-२}$ । $च_{म-६,न-३}$ इत्यादि का मान जान सकते हो । अन्त मे म और न के वश से $\int\frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न}$ ।

इस रूप का चल जानना पड़ेगा यदि म विषम और न से इतना छोटा हो कि म—२इ = १ और न—इ > १ । अथवा यदि न से म ऐसा वड़ा हो जहाँ वार वार क्रिया करने से अन्त मे न—इ = १, म—२इ > १ तो अन्त के चल का रूप $\int\frac{य^नताय}{अ^२+य^२}$ ऐसा होगा । इस लिये $\int\frac{यताय}{(अ^२+य^२)^न}$

$$= \frac{१}{२}\int २\,य\,ताय\,(अ^२+य^२)^{-न}$$

$= -\frac{१}{२न-२}\,\frac{१}{(अ^२+य^२)^{न-१}}$ यह पहली स्थिति मे अन्त के चल का मान होगा । जहाँ न कोई अभिन्न संख्या है । और दूसरी स्थिति के चल का मान साधारण भाग की रीति से $\int\frac{य^नताय}{अ^२+य^२}$ इस का $\int फ(य)$ $+\int\frac{कताय}{अ^२+य^२}$ ऐसा रूप वनाकर जहाँ $फ(य) = \{ग_न य^न + ग_{न-२}य^{न-२} + \cdots ग_०\}$ ७वें प्रक्रम से सहज मे जान सकते हो ।

कभी म के सम होने पर $\int\frac{ताय}{(अ^२+य^२)^न}$ ऐसा रूप भी अन्त मे रहेगा जिस का चल २९वे प्रक्रम से व्यक्त हो जायगा । जैसे

यहाँ भी यदि $\frac{१}{अ^२+य^२} = त$ तो

$\int य^६त^{१०}ताय$, इस का मान $\int य^४त^८ताय$, $\int य^२त^६ताय$, $\int यत^४ताय$ इसके

$\int य^{११}त^४ताय$, इस का मान $\int य^९त^४ताय$, $\int य^७त^३ताय$, $\int य^५त^२ताय$,

$\int य^३त\,ताय$ इस के

और $\int \text{य}^{८}\text{त}^{६}\text{ताय}$ इस का मान, $\int \text{य}^{६}\text{त}^{५}\text{ताय}$, $\int \text{य}^{४}\text{त}^{४}\text{ताय}$, $\int \text{य}^{२}\text{त}^{३}\text{ताय}$, $\int \text{त}^{२}\,\text{ताय}$ इनके अधीन हैं

३१ । कल्पना करो कि $\text{त} = \text{आय}^{\text{अ}} + \text{काय}^{\text{क}}$ और $\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \int \text{य}^{\text{म}}\text{त}^{\text{न}}\text{ताय}$

तो $\text{य}^{\text{म}}\text{त}^{\text{न}} = \text{य}^{\text{म}}\;(\text{आय}^{\text{अ}} + \text{काय}^{\text{क}})\;\text{त}^{\text{न}-१} = \text{आय}^{\text{म}+\text{अ}}\text{त}^{\text{न}-१} + \text{काय}^{\text{म}+\text{क}}\text{त}^{\text{न}-१}$ चलज्ञान करने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \text{आच}_{\text{म}+\text{अ},\text{न}-१} + \text{काच}_{\text{म}+\text{क},\text{न}-१} \quad \cdots \cdots \quad (१)$$

परन्तु खण्डचलानयन से $\int \text{य}^{\text{म}}\text{त}^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{म}+१} - \frac{१}{\text{म}+१}\int \text{य}^{\text{म}+१}\text{ता}(\text{त}^{\text{न}})$

$$= \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{म}+१} - \int \frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}\,\text{नत}^{\text{न}-१}\,(\text{आअय}^{\text{अ}-१} + \text{काकय}^{\text{क}-१})\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{म}+१} - \frac{\text{नअ}}{\text{म}+१}\,\text{आय}^{\text{म}+१}\;\text{त}^{\text{न}-१}\text{ताय} - \frac{\text{नक}}{\text{म}+१}\int \text{का}\,\text{य}^{\text{म}+\text{क}}\text{त}^{\text{न}-१}\text{ताय}$$

$$= \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{म}+१} - \frac{\text{नअ}}{\text{म}+१}\,\text{आच}_{\text{म}+\text{अ},\text{न}-१} - \frac{\text{नक}}{\text{म}+१}\,\text{काच}_{\text{म}+\text{क},\text{न}-१} \quad \cdots \quad (२)$$

(१) और (२) से $\text{काच}_{\text{म}+\text{क},\text{न}-१}$ को उड़ा देने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{\text{म}+\text{नक}+१} + \frac{\text{नक}-\text{नअ}}{\text{म}+\text{नक}+१}\,\text{आच}_{\text{म}+\text{अ},\text{न}-१} \quad \cdots \quad (३)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त हुआ यदि न धन संख्या हो तो ।

जैसे $\int \text{य}^{१०}\text{त}^{\frac{७}{२}}\text{ताय}$ इस का मान जानना हो तो यहाँ इसी सिद्धान्त से तीन वार क्रिया करने से $\int \text{य}^{१०+\text{अ}}\text{त}^{\frac{५}{२}}\text{ताय}$, $\int \text{य}^{१०+२\text{अ}}\text{त}^{\frac{३}{२}}\,\text{ताय}$ इन का मान व्यक्त हो जायगा अन्त मे $\int \text{य}^{१०+३\text{अ}}\text{त}^{\frac{१}{२}}\text{ताय}$ यह रह जायगा ।

यदि न का मान ऋण हो तो पहले (३) से छेदगम कर, समशोधनादि से $\text{च}_{\text{म}+\text{अ},\text{न}-१} = -\frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}}}{(\text{क}-\text{अ})\text{नआ}} + \frac{\text{म}+\text{नक}+१}{(\text{क}-\text{अ})\text{नआ}}\,\text{च}_{\text{म},\text{न}}$ ऐसा समीकरण वना कर इस मे म के स्थान में म—अ का और न के स्थान से —(न-१) का उत्थापन देने से

$$\text{च}_{\text{म},-\text{न}} = \frac{\text{य}^{\text{म}-\text{अ}+१}\text{त}^{-(\text{न}-१)}}{(\text{क}-\text{अ})(\text{न}-१)\text{आ}} - \frac{\text{म}-\text{अ}-(\text{न}-१)\text{क}+१}{(\text{क}-\text{अ})(\text{न}-१)\text{आ}}\,\text{च}_{\text{म}-\text{अ}-(\text{न}-१)} \cdots\cdots (४)$$

इस पर से $\int य^{५} त^{-\frac{९}{२}}$ इसके मान मे $\int य^{५-अ} त^{-\frac{७}{२}}$ ताय यह और इस में $\int य^{५-२अ} त^{-\frac{५}{२}}$ ताय इत्यादि आवेगे अन्त मे $\int य^{५-४अ} त^{-\frac{१}{२}}$ ताय यह आवेगा ।

इसी तरह (१) और (२) से यदि $च_{म,न}$ को उड़ावो तो

$$य^{म+१}त^{न} = (म + नअ + १)आच_{म+अ,न-१} + (म + नक + १)काच_{म+क,न-१} \cdot \quad (५)$$

इस मे न के स्थान में न + १ का और म के स्थान में म−अ का उत्थापन देने से $च_{म,न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{(म+नअ+१)आ} - \frac{म+(न+१)क-अ+१}{(म+नअ+१)आ} काच_{म-अ+क,न}$, (६)

यह य के उत्तरोत्तर लघुघात के रूप मे $च_{म,न}$ का रूप ले आता है यदि अ > क हो तो ।

३२ । कल्पना करो कि $त = अ + कय + गय^{२}$ तो $\int य^{म}त^{न}ताय = च_{म,न}$ इसका मान जानने के लिये ३१वे प्रक्रम की युक्ति से $त^{न} = (अ + कय + गय^{२})त^{न-१}$ ऐसा मान और $य^{म}$ से गुण कर चलानयन करने से

$$च_{म,न} = अच_{म,न-१} + कच_{म+१,न-१} + गच_{म+२,न-१}$$ ऐसा होगा ।

इस लिये $\frac{२न}{म+१} च_{म,न} = \frac{२न}{म+१} (अच_{म,न-१} + कच_{म+१,न-१})$

$$+ \frac{२नग}{म+१} च_{म+२,न-१} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (१)$$

और खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नक}{म+१} च_{म+१,न-१} - \frac{२नग}{म+१} च_{म+२,न-१} \cdot \quad (२)$$

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$\frac{म+२न+१}{म+१} च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} + \frac{२नअ}{म+१} च_{म,न-१} + \frac{नक}{म+१} च_{म+१,न-१}$$

इस लिये $च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{२न+म+१} + \frac{२नअ}{२न+म+१} च_{म,न-१}$

$$+ \frac{नक}{२न+म+१} च_{म+१,न-१} \quad (३)$$

इसी प्रकार (१) और (२) से

$$य^{म+१}त^{न} = (म+१)अच_{म,न-१} + (म+न+१)कच_{म+१,न-१} + (म+२न+१)गच_{म+२,न-१} \quad \cdots\cdots (४)$$

(४) में म के स्थान में म—२ का और न के स्थान में न+१ का उत्थापन देने से और समशोधनादि से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-१}त^{न+१}}{ग(म+२न+१)} - \frac{(म+न)}{ग(म+२न+१)} च_{म-१,न} - \frac{अ(म-१)}{ग(म+२न+१)} च_{म-२,न} \quad (५)$$

यह एक लघूकरण सिद्धान्त $च_{म,न}$ का मान 'जानने के लिये य के उत्तरोत्तर घात ह्रास में उत्पन्न हुआ ।

(४) मे म के स्थान में—म का और न के स्थान मे न+१ का उत्थापन देने से

$$च_{-म,न} = -\frac{त^{न+१}}{अ(म-१)य^{म-१}} - \frac{क(म-न-२)}{अ(म-१)} च_{-(म-१),न} - \frac{ग(म-२न-३)}{अ(म-१)} च_{-(म-२),न} \quad \cdots\cdots (६)$$

यह म के ऋण मान में लघूकरणसिद्धान्त उत्पन्न हुआ ।

३३ । ३१वें प्रक्रम मे यदि $त = आय^{अ} + कायक$ इस में $क = ०$ तो $त = का + आय^{अ}$ ऐसा हुआ और (१), (२) इत्यादि समीकरण में क के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$च_{म,न} = आच_{म+अ,न-१} + काच_{म,न-१} \quad (१)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअआ}{म+१} च_{म+अ,न-१} \quad (२)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+१} - \frac{नअआ}{म+१} च_{म+अ,न-१} \quad (३)$$

$$\left.\begin{aligned} च_{म,-न} &= -\frac{य^{म-अ+१}त^{-(न-१)}}{अआ(न-१)} + \frac{म-अ+१}{अआ(न-१)} च_{म-अ,-(न-१)} \\ च_{म,न} &= +\frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{अआ(न+१)} - \frac{म-अ+१}{अआ(न+१)} च_{म-अ,न+१} \end{aligned}\right\} \quad (४)$$

यदि न = —न

$$य^{म+१}त^{न} = (म+नअ+१)आच_{म+अ,न-१} + (म+१)काच_{म,न-१} \quad (५)$$

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ-१}त^{न+१}}{आ(म+नअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+नअ+१)}काच_{म-अ,न} \qquad (६)$$

ऐसे ६ समीकरण उत्पन्न होते है इन पर से अनेक चलज्ञान सहज में हो जाते हैं। वे छवो समीकरण यदि वास्तव में विचारो तो ३१वे प्रक्रम के उदाहरण रूप है। इन पर से टाड्हन्टर (Todhunter) साहब ने चलराशिकलन के ३०वें प्रक्रम मे जो क्रिया की है वह भी उत्पन्न हो जाती है।

यहां (२) से

$$च_{+अ,न-१} = \frac{य^{म-१}त^{न}}{नअआ} - \frac{म+१}{नअआ}च_{म,न}$$ इसका उत्थापन (१) मे देने से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{नअ} - \frac{म+१}{नअ}च_{म,न} + काच_{म,न-१},$$

इस लिये $$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न}}{म+नअ+१} + \frac{कानअ}{म+नअ+१}च_{म,न-१} \qquad (७)$$

यहां न के स्थान मे न + १ का उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म+१}त^{न+१}}{काअ(न+१)} + \frac{म+अन+अ+१}{काअ(न+१)}च_{म,न+१} \qquad (८)$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त बना सकते हो।

३४। इस प्रक्रम मे पूर्व समीकरणो की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $य^{म}(ग^{२}-य^{२})^{-\frac{१}{२}}$ ताय इसका चल क्या है।

यहां यदि का $= ग^{२}$, आ $= -१$, अ $= २$ न $= -\frac{१}{२}$ कल्पना करो तो ३३वें प्रक्रम के (६)वे समीकरण से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{आ(म+नअ+१)} - \frac{म-अ+१}{आ(म+नअ+१)} काच_{म-अ,न}$$

$$= \frac{य^{म-२+१}(ग^{२}-य^{२})^{-\frac{१}{२}+१}}{-१(म+२\times-\frac{१}{२}+१)} - \frac{म-२+१}{-१(म+२\times\frac{१}{२}+१)}ग^{२}\int य^{म-२}(ग^{२}-य^{२})^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= -\frac{य^{म-१}\sqrt{ग^{२}-य^{२}}}{म} + \frac{(म-१)ग^{२}}{म}\int य^{म-२}(ग^{२}-य^{२})^{-\frac{१}{२}} ताय,$$ ऐसा हुआ।

खण्डचलानयन से भी

$$\int य^{म}(ग^{२}-य^{२})^{-\frac{१}{२}} ताय = -\int य^{म-१} ता (ग^{२}-य^{२})^{+\frac{१}{२}}$$

$$= -य^{म-१}\sqrt{ग^२ — य^२} + (म—१)\int य^{म-२}\sqrt{ग^२ — य^२}ताय$$

$$= —य^{म-१}\sqrt{ग^२ — य^२} + (म—१)\int \frac{य^{म-२}(ग^२ — य^२)ताय}{\sqrt{ग^२ — य^२}}$$

$$= —य^{म-१}\sqrt{ग^२ — य^२}$$

$$—(म—१)\int य^{म}\sqrt{२(ग^२ - य^२)}^{\frac{१}{२}} ताय + (म—१)ग^२\int \frac{य^{म-२}}{\sqrt{ग^२ — य^२}}ताय$$

इस लिये पक्षान्तरानयन से

$$\int य^{म}(ग^२ — य^२)^{—\frac{१}{२}} = —\frac{य^{म-१}\sqrt{ग^२ — य^२}}{म}$$

$$+ \frac{(म-१)ग^२}{म}\int य^{म-२}(ग^२ - य^२)^{—\frac{१}{२}} ताय$$

इस तरह से वही सिद्ध हुआ जो पहले (६)वें समीकरण से हुआ था भेद इतनाही है कि पहले प्रकार से लाघव और दूसरे से गौरव है।

(२) $\int \frac{ताय}{य^{म}(अ^२ + य^२)^{\frac{१}{२}}}$ इसका मान जानना है।

यहाँ यदि म = —म, न = —$\frac{१}{२}$, आ = अ^२, अ = ०, का = १, क = २ मानो तो ३१वें प्रक्रम के ६वे समीकरण से

$$च_{म,न} = \frac{य^{म-अ+१}त^{न+१}}{(म + नअ + १)आ} — \frac{म + (न + १)क-अ + १}{(म + नअ + १)आ} काच_{म-अ+क,न}$$

$$= \frac{य^{-म+१}त^{-\frac{१}{२}+१}}{(-म + १)अ^२} — \frac{-म + (-\frac{१}{२} + १)२ + १}{(-म + १)अ^२} च_{(-म+२,न)}$$

$$= — \frac{\sqrt{त}}{अ^२(म-१)य^{म-१}} + \frac{—म + १ + १}{अ^२(म-१)}\int अ^{-म+२}(अ^२ + य^२)^{-\frac{१}{२}} ताय$$

$$= — \frac{\sqrt{अ^२ + य^२}}{अ^२(म-१)य^{म-१}} — \frac{म-२}{अ^२(म-१)}\int \frac{ताय}{य^{म-२}\sqrt{अ^२ + य^२}}$$ यह सिद्ध हुआ।

इसी उदाहरण को खण्डचलानयन से भी कर सकते हो। जैसे

$$\int \frac{ताय}{य^{म}\sqrt{अ^२ + य^२}} = \int \frac{१}{य^{म+१}}ता\sqrt{अ^२ + य^२} = \frac{\sqrt{अ^२ + य^२}}{य^{म+१}} + (म + १)\frac{\sqrt{अ^२ + य^२}}{य^{म+२}}ताय$$

$$= \frac{\sqrt{अ^२ + य^२}}{य^{म+१}} + (म + १)\int \frac{अ^२ + य^२}{य^{म+२}\sqrt{अ^२ + य^२}} ताय$$

समशोधनादि से

$$\text{अ}^{\text{२}}(\text{म}+\text{१})\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{\text{म}+\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{२}}}}=-\frac{\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{२}}}}{\text{य}^{\text{म}+\text{१}}}-\text{म}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{\text{म}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{२}}}}$$

म के स्थान में म−२ का उत्थापन देकर $\text{अ}^{\text{२}}(\text{म}-\text{१})$ का भाग दे देने से

$$\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{\text{म}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{२}}}}=-\frac{\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{२}}}}{\text{अ}^{\text{२}}(\text{म}-\text{१})\text{य}^{\text{म}-\text{१}}}-\frac{\text{म}-\text{२}}{\text{अ}^{\text{२}}(\text{म}-\text{१})}\int\frac{\text{ताय}}{\text{य}^{\text{म}-\text{२}}\sqrt{\text{अ}^{\text{२}}+\text{य}^{\text{२}}}}$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

(३) $\int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{\sqrt{(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})}}$ इसका क्या मान है।

यहाँ $\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{\sqrt{\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}}}}=\text{य}^{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}}}(\text{२अ}-\text{य})^{-\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{ताय}$, इस लिये ३३वे प्रक्रम के (८)वें समीकरण से (यदि का = २अ, आ = −१, अ = १, क = ०, म = म$-\frac{\text{१}}{\text{२}}$, न = $-\frac{\text{१}}{\text{२}}$)

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}}=-\frac{\text{य}^{\text{म}+\text{१}}\text{त}^{\text{न}+\text{१}}}{\text{काअ}(\text{न}+\text{१})}+\frac{\text{म}+\text{अन}+\text{अ}+\text{१}}{\text{काअ}(\text{न}+\text{१})}\text{च}_{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}}\ \text{न}}$$

$$=-\frac{\text{य}^{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}}+\text{१}}\text{त}^{-\frac{\text{१}}{\text{२}}+\text{१}}}{\text{२अ}(-\frac{\text{१}}{\text{२}}+\text{१})}+\frac{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}}-\frac{\text{१}}{\text{२}},+\text{१}+\text{१}}{\text{२अ}(-\frac{\text{१}}{\text{२}}+\text{१})}\text{च}_{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}},\text{न}+\text{१}}$$

$$=-\frac{\text{य}^{\text{म}+\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{त}^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}}{\text{अ}}+\frac{\text{म}+\text{१}}{\text{अ}}\text{च}_{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}},\text{न}+\text{१}}$$

$$=-\frac{\text{य}^{\text{म}+\frac{\text{१}}{\text{२}}}(\text{२अ}-\text{य})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}}{\text{अ}}+\frac{\text{म}+\text{१}}{\text{अ}}\int\text{य}^{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}}}(\text{२अ}-\text{य})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{ताय}$$

$$=-\frac{\text{य}^{\text{म}}(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}}{\text{अ}}+\frac{\text{म}+\text{१}}{\text{अ}}\int\text{य}^{\text{म}-\text{१}}(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{ताय}$$ यह सिद्ध हुआ।

वा ३३वे प्रक्रम के ६वे समीकरण मे पूर्वोक्त संख्याओं का उत्थापन देने से

$$\text{च}_{\text{म}\ \text{न}}=\int\text{य}^{\text{म}-\frac{\text{१}}{\text{२}}}(\text{२अ}-\text{य})^{-\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{ताय}$$

$$=-\frac{\text{य}^{\text{म}-\text{१}}\sqrt{(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})}}{\text{म}}+\frac{\text{अ}(\text{२म}-\text{१})}{\text{म}}\int\frac{\text{य}^{\text{म}-\text{१}}\text{ताय}}{\sqrt{(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})}}$$ ऐसा होगा।

इसे खण्डचलानयन से भी सिद्ध कर सकते हो जैसे

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{\sqrt{(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})}}=\text{य}^{\text{म}-\text{१}}\frac{(\text{य}-\text{अ}+\text{अ})\text{ताय}}{\sqrt{(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})}}=\int-\text{य}^{\text{म}-\text{१}}\text{ता}\sqrt{(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})}$$

$$+\text{अ}\int\frac{\text{ताय}\ \text{य}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$=-\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}+(\text{म}-१)\int\text{य}^{\text{म}-२}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}\text{ताय}$$

$$+\text{अ}\int\frac{\text{तायय}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$=-\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}+(\text{म}-१)\int\frac{\text{य}^{\text{म}-२}(२\text{अय}-\text{य}^२)\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$+\text{अ}\int\frac{\text{तायय}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$=-\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}-(\text{म}-१)\int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

$$+\text{अ}(२\text{म}-१)\frac{\text{तायय}^{\text{म}-१}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}$$

पक्षान्तरानयन से और म का भाग दे देने से

$$\int\frac{\text{य}^{\text{म}}\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}=-\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}}{\text{म}}+\frac{\text{अ}(२\text{म}-१)}{\text{म}}\int\frac{\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}}{\sqrt{(२\text{अय}-\text{य}^२)}},$$

यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

(४) $\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{न}}}$ इस का क्या मान होगा।

यहाँ म = ०, न = —न, आ = १, अ = २, का = अ^२, इन का ३३वें प्रक्रम के (८)वें में उत्थापन देने से

$$\text{च}_{\text{म},\text{न}}=\text{च}_{०,-\text{न}}=-\frac{\text{य}^{\text{म}+१}\text{त}^{\text{न}+१}}{\text{काअ}(\text{न}+१)}+\frac{\text{म}+\text{अन}+\text{अ}+१}{\text{काअ}(\text{न}+१)}\text{च}_{\text{म},\text{न}+१}$$

$$=-\frac{\text{य}^{०+१}\text{त}^{-\text{न}+१}}{२\text{अ}^२(-\text{न}+१)}+\frac{०+-२\text{न}+२+१}{२\text{अ}^२(-\text{न}+१)}\text{च}_{०,-\text{न}+१}$$

$$=\frac{१}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{न}-१}}\ \frac{\text{य}}{२\text{अ}^२(\text{न}-१)}+\frac{२\text{न}-३}{२\text{अ}^२(\text{न}-१)}\int\frac{\text{ताय}}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{न}-१}}$$

देखो १९वें प्रक्रम से भी यही लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है।

इस तरह हजारों नये नये सिद्धान्त लघूकरणसिद्धान्तों के बल चलानयन के लिये बना सकते हो।

३५। लघूकरणसिद्धान्त के बल से त्रिकोणमिति सम्बन्धि फलों के चल का भी मान सहज में हो जाता है जैसे यदि

$\int$ फ(ज्याय, कोज्याय) ताय इस का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो

कि ज्याय = र $\therefore$ ताय = $\frac{\text{तार}}{\text{कोज्याय}} = \frac{\text{तार}}{\sqrt{१-\text{र}^२}}$ क्योंकि

कोज्याय = $\sqrt{१-\text{र}^२}$ इन का उत्थापन देने से

$$\int \text{फ(ज्याय, कोज्याय)ताय} = \int \text{फ}\left\{\text{र}, \sqrt{(१-\text{र}^२)}\right\} \frac{\text{तार}}{\sqrt{(१-\text{र}^२)}} \quad (१)$$

यहाँ यदि फ(ज्याय, कोज्याय) = ज्या$^{\text{द}}$यकोज्या$^{\text{ध}}$य तो

$$\int \text{फ(ज्याय, कोज्याय) ताय} = \int \text{र}^{\text{द}}(१-\text{र}^२)^{\frac{१}{२}(\text{ध}-१)}\text{तार} \quad \cdot \cdot \quad (२)$$

यदि ३२वे प्रक्रम के समीकरणो मे का = १, अ = —१, अ = २, म = द, और न = ½ (ध—१) कल्पना करो तो

$$\int \text{र}^{\text{द}}(१-\text{र}^२)^{\frac{१}{२}(\text{ध}-१)}\text{तार} = \text{च}_{\text{द}, \frac{१}{२}(\text{ध}-१)} = \text{च}_{\text{द},\text{व}} \text{ यदि } \tfrac{१}{२}(\text{ध}-१) = \text{व}$$

$$\text{च}_{\text{द व}} = -\text{च}_{\text{द}+२\,\text{व}-१} + \text{च}_{\text{द},\text{व}-१} \quad \cdot \cdot \quad \cdot \quad (३)$$

$$\text{च}_{\text{द},\text{व}} = \frac{\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{व}}}{\text{द}+१} + \frac{२\text{व}}{\text{द}+१}\text{च}_{\text{द}+२,\text{व}-१} \quad (४)$$

$$\text{च}_{\text{द}\,-\text{व}} = +\frac{\text{र}^{\text{द}-१}\text{त}^{-(\text{व}-१)}}{\text{व}-१} - \frac{\text{द}-१}{\text{व}-१}\text{च}_{\text{द}-२,-(\text{व}-१)} \quad (५)$$

$$\text{च}_{\text{द व}} = -\frac{\text{र}^{\text{द}-१}\text{त}^{\text{व}+१}}{२(\text{व}+१)} + \frac{\text{द}-१}{(\text{व}+१)}\text{च}_{\text{द}-२\,\text{व}+१} \quad \cdot \quad (६)$$

$$\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{व}} = -(\text{द}+२\text{व}+१)\,\text{च}_{\text{द}+२\,\text{व}-१} + (\text{द}+१)\,\text{च}_{\text{द व}-१} \quad \cdot \quad (७)$$

$$\text{च}_{\text{द व}} = -\frac{\text{र}^{\text{द}-१}\text{त}^{\text{व}+१}}{\text{द}+२\text{व}+१} + \frac{\text{द}-१}{\text{द}+२\text{व}+१}\text{च}_{\text{द}-२,\text{व}} \quad (८)$$

$$\text{च}_{\text{द व}} = \frac{\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{व}}}{\text{द}+२\text{व}+१} + \frac{२\text{व}}{\text{द}+२\text{व}+१}\text{च}_{\text{द},\text{व}-१} \quad \cdot \quad (९)$$

$$\text{च}_{\text{द व}} = -\frac{\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{व}+१}}{२(\text{व}+१)} + \frac{\text{द}+२\text{व}+२+१}{२(\text{व}+१)}\text{च}_{\text{द},\text{व}+१} \quad \cdot \quad (१०)$$

$$\text{च}_{\text{द},\text{व}} = \frac{\text{र}^{\text{द}+१}\text{त}^{\text{व}+१}}{\text{द}+१} + \frac{\text{द}+२(\text{व}+१)+१}{\text{द}+१}\text{च}_{\text{द}+२,\text{व}} \quad \cdot \cdot \quad \cdot \quad (११)$$

यदि ३२वें प्रक्रम के ६वे समीकरण मे का, क के स्थान में आ, अ के

उत्थापन दो और आ, अ के स्थान में का, क का तो पिछला सिद्धान्त उत्पन्न होगा।

(२) मे यदि $ध - १ = ०$ अर्थात् $ध = १$ मानो तो $व = ०$ इनका उत्थापन (८)वें में देने से

$$च_{द, ०} = \int ज्या^{द} य \, कोज्याय \, ताय = -\frac{ज्या^{द-१} य कोज्या^{२} य}{द + १} + \frac{द - १}{द + १} च_{द-२, ०}$$

$$= \frac{ज्या^{द-१} य कोज्या^{२} य}{द + १} + \frac{द - १}{द + १} \int ज्या^{द-२} य कोज्याय ताय$$

इसी प्रकार $\int र^{द} (१ - र^{२})^{\frac{१}{२}(ध-१)} तार$ इस मे र के स्थान में इसका पहला मान ज्याय रखदो तो $\int र^{द}(१-र^{२})^{\frac{१}{२}(ध-१)} तार$

$= \int ज्या^{द} य \cdot कोज्या^{ध-१} य$ कोज्यायताय। अब यहां यदि $ध = ०$ तो $\int ज्या^{द} य \, कोज्या^{ध-१} य कोज्याय \, ताय$

$= \int ज्या^{द} य ताय$ ऐसा होगा। इस लिये $\frac{१}{२}(ध - १) = व = -\frac{१}{२}$ इनका उत्थापन इसी प्रक्रम के (८)वे समीकरण मे देने से

$$च_{द, व} = \frac{र^{द-१} त^{व+१}}{द + २व + १} + \frac{द - १}{द + २व + १} च_{द-२, व}$$

$$= -\frac{ज्या^{द-१} य कोज्याय}{द} + \frac{द - १}{द} \int ज्या^{द-२} य \, ताय = \int ज्या^{द} य \, ताय।$$

देखो ठीक यही खण्डचलानयन १२वें प्रक्रम के १५वें उदाहरण में भी सिद्ध हुआ है। केवल द के स्थान मे न का उत्थापन मात्र देना होगा।

इय तरह पीछे दिखलाये हुए समीकरणों के वल से सैकड़ों लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हो जाते हैं विद्यार्थियो को चाहिये कि उन का अच्छी तरह से अभ्यास करे।

३६। ३१वें प्रक्रम की युक्ति से यदि $त = आय^{अ} + काय^{क} + गाय^{ग} + \cdots$ और $च_{म,} = \int य^{म} त^{न} ताय$ तो यहां भी उसी तरह से $च_{म, न}$ का मान जान सकते हो। जैसे

$$त^{न} = (आय^{अ} + काय^{क} + गाय^{ग} + \cdots) \, त^{न-१}$$

इस लिये, $य^{म} त^{न} = (आय^{म+अ} + काय^{म+क} + गाय^{म+ग} + \cdots) त^{न-१}$

$$\int य^{म} त^{न} ताय = आ \int य^{म+अ} त^{न-१} ताय + का \int य^{म+क} त^{न-१} ताय + गा \int य^{म+ग} त^{न-१} ताय + $$

अर्थात् $च_{म,न} = आच_{म+अ,न-१} + काच_{म+क,न-१} + गाच_{म+ग,न+१} + \cdot$ (१)

और खण्डचलानयन से

$$च_{म,न} = \int य^{म} त^{न} ताय = \frac{य^{म+१} त^{न}}{म+१}$$

$$- \frac{नय^{म+१} त^{न-१}}{म+१} (अआय^{अ-१} + ककाय^{क-१} + गगाय^{ग-१} + \cdot) ताय$$

$$= \frac{य^{म+१} त^{न}}{म+१} - \frac{नअ}{म+१} आच_{म+अ,न-१}$$

$$- \frac{नक}{म+१} काच_{म+क,न-१} - \frac{नग}{म+१} गाच_{म+ग,न-१}$$

छेदगम कर पक्षान्तरानयन से

$$य^{म+१} त^{न} = च_{\ ,न}(म+१) + नअआच_{म+अ,न-१} + नककाच_{म+क,न-१} + नगगाच_{म+ग,न-१} +$$

(१) से $च_{म,न}$ का उत्थापन देने से और $म + नअ + १ = अ'$, $म + नक + १ = क'$, $म + नग + १ = ग'$ इत्यादि कल्पना करने से

$$य^{म-'} त^{न} = अ'आच_{म+अ,न-१} + क'काच_{म+क,न-१} + ग'गाच_{म+ग,न-१} + \cdot \qquad (२)$$

इस तरह अनेक चमत्कार दिखा सकते हो।

३७। लघूकरण सिद्धान्त से दो मानो के भीतर का चलज्ञान बहुत ही सहज मे हो जाता है अर्थात् इस से सान्तचल मान बहुत ही सुगम हो जाता है।

जितने पिछले प्रक्रमो मे लघूकरण सिद्धान्तो के लिये समीकरणो को दिखाया है सबका मूल यदि ध्यान दे कर देखो तो खण्डचलानयन ही है इसलिये खण्ड चलानयन को लघूकरण का मूल कह सकते है।

दो सीमाओ के भीतर के चलज्ञान के लिये कुछ उदाहरण दिखाते है।

(१) $\int (ग^{२} - य^{२})^{\frac{न}{२}} ताय$ इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int (ग^{२}-य^{२})^{\frac{न}{२}} ताय = \frac{य(ग^{२}-य^{२})^{\frac{न}{२}}}{न+१} + \frac{नग^{२}}{न+१} \int (ग^{२}-य^{२})^{\frac{न}{२}-१} ताय,$$ यह एक

लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ इस मे यदि $य = ०$ वा $य = ग$ तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^{ग} (ग^2-य^2)^{\frac{न}{2}} ताय = \frac{नग^2}{न+1}\int_0^{ग} (ग^2-य^2)^{\frac{न}{2}-1} ताय$$ यह सिद्ध हुआ।

(२) $\int य^{म-1}(1-य)^{न-1}$ ताय इसके मान के लिये खण्डचलानयन से

$$\int य^{म-1}(1-य)^{न-1} ताय = -\frac{(1-य)^न}{न} य^{म-1} + \frac{म-1}{न}\int य^{म-2}(1-य)^न ताय$$

ऐसा लघूकरण सिद्धान्त उत्पन्न होता है। यहां यदि $य = 0$ वा १ तो स्पष्ट है कि प्रथम खण्ड शून्य हो जायगा इस लिये

$$\int_0^1 य^{म-1}(1-य)^{न-1} ताय = \frac{म-1}{म}\int_0^1 य^{म-2}(1-य)^न ताय$$

और $$\int_0^1 य^{म-2}(1-य)^न ताय = \frac{म-2}{न+1}\int_0^1 य^{म-3}(1-य)^{न+1} ताय$$

इसी तरह $$\int_0^1 य^{म-3}(1-य)^{न+1} ताय = \frac{म-3}{न+2}\int_0^1 य^{म-4}(1-य)^{न+2} ताय$$

$$\int_0^1 य\ (1-य)^{न+म-3} = \frac{1}{न+म-2}\int_0^1 (1-य)^{न+म-2} ताय$$

और $$\int (1-य)^{न+म-2} ताय = -\frac{1}{न+म-1}(1-य)^{न+म-1}$$

इस लिये $$\int_0^1 (1-य)^{न+म-2} ताय = \frac{1}{न+म-1}$$ इन सब का उत्थापन

देने से $$\int_0^1 य^{म-1}(1-य)^{न-1} ताय = \frac{(म-1)(म-2)\ldots 3\ 2\ 1}{न(न+1)(न+2)\ldots(न+म-1)}$$ यह होगा

(३) $\int छे^4 प\ ताप = \int (1+स्प^2 प)^2 ताप = \int (1 + 2स्प^2 प + स्प^4 प) ताप$

$= \int ताप + 2\int स्प^2 पताप + \int स्प^4 पताप = प + 2\int स्प^2 पताप + \int स्प^4 पताप$।

परन्तु $\int स्प^{2न} पताप = \int स्प^{2न-2} प(छे^2 प - 1) ताप$

$$= \int स्प^{2न-2} पछे^2 पताप - \int स्प^{2न-2} पताप$$

$$= \int स्प^{2न-2} प\ ता\ स्पप - \int स्प^{2न-2} पताप$$

$$= \frac{स्प^{2न-1}}{2न-1} - \int स्प^{2न-2} पताप$$

$$= \frac{\text{स्प}^{२न-१}}{२न-१} - \frac{\text{स्प}^{२न-३}}{२न-३} + \int \text{स्प}^{न-४}\text{ताप}$$

$$= \frac{\text{स्प}^{२न-१}}{२न-१} - \frac{\text{स्प}^{२न-३}}{२न-३} + \frac{\text{स्प}^{२न-५}}{२न-५} - \cdots + \cdots (-१)^{न}\text{स्पप} + (-१)^{न}\text{प}$$

यार वार क्रिया करने से, प्रथमाध्याय का ४६वाँ अभ्यास के लिये जो प्रश्न लिखा है उसे देखो।

इस पर से $२\int \text{स्प}^{२}\text{पताप} = २\text{स्पप} - २\text{प}$

$$\int \text{स्प}^{४}\text{पताप} = \frac{\text{स्प}^{३}\text{प}}{३} - \frac{\text{स्पप}}{१} + \text{प}$$

इन का उत्थापन देने से

$$\text{छे}^{४}\text{पताप} = \text{प} + २\int \text{स्प}^{२}\text{पताप} + \int \text{स्प}^{४}\text{पताप}$$

$$= \text{प} + २\text{स्पप} - २\text{प} + \frac{\text{स्प}^{३}\text{प}}{३} - \text{स्पप} + \text{प} = \text{स्पप} + \frac{\text{स्प}^{३}\text{प}}{३}$$

इस लिये $\int_{0}^{\frac{\pi}{४}} \text{छे}^{४}\text{पताप} = १ + \frac{१}{३} = \frac{४}{३}$ यह सिद्ध हुआ।

(४) $$\int \text{य}^{म}(२\text{अय} - \text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय} = -\frac{\text{य}^{म-१}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{३}{२}}}{म+२} + \frac{\text{अ}(२म+१)}{म+२}\int \text{य}^{म-१}(२\text{अय} - \text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}$$

ऐसा होगा यदि ३१वे प्रक्रम मे (६)वे मे आ = —१, अ = २, का = २अ, क = १ और न = $\frac{१}{२}$ मानो। इस लिये यहाँ स्पष्ट है कि यदि य शून्य वा २अके तुल्य माना जाय तो प्रथम खण्ड शून्य के तुल्य होगा।

तब $$\int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}^{म}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय} = \frac{\text{अ}(२म+१)}{म+२}\int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}^{म-१} \int (२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}$$

म के स्थान मे म—१ का उत्थापन देने से

$$\int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}^{म-१}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय} = \frac{\text{अ}(२म-१)}{म+१}\int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}^{म-२}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय}$$

यों वार वार क्रिया करने से

$$\int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}^{म-(म-१)}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}\text{ताय} = \int_{0}^{२\text{अ}} \text{य}(२\text{अय}-\text{य}^{२})^{\frac{१}{२}}$$

$$= अ \int_{0}^{२अ} (२अय - य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय$$

परन्तु $\int (२अय - य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = \int \{ अ^{२} - (अ - य)^{२} \}^{\frac{१}{२}} ताय$

$$= - \frac{अ-य}{२} \sqrt{२अय - य^{२}} - \frac{अ^{२}}{२} ज्या^{-१} \frac{अ-य}{अ}$$

इस लिये $\int_{0}^{२अ} (२अय - य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = + \frac{अ^{२}\pi}{४} + \frac{अ^{२}\pi}{४} = + \frac{अ^{२}\pi}{२}$

इन का उत्थापन देने से

$$\int_{0}^{२अ} य^{म} (२अ - य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{अ^{म+२} (२म+१)(२म-१)(२म-३) \cdots १}{(म+२)(म+१)म(म-१)(-२) \cdots ३} \frac{\pi}{२}$$

$$= \frac{१\cdot३\cdot५\cdots(२म+१)}{३\ ४\ ५\cdots(म+२)} \frac{\pi अ^{म+२}}{२}$$ यह सिद्ध हुआ।

(५) $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \frac{ताय}{\sqrt{१ - ग^{२} ज्या^{२} य}}$ इसका क्या मान होगा यदि $ग < १$

यहाँ $\frac{ताय}{\sqrt{(१ - ग^{२} ज्या^{२} य)}} = ताय (१ - ग^{२} ज्या^{२} य)^{-\frac{१}{२}}$ इसलिये द्वियुक्पद-सिद्धान्त से $\frac{ताय}{\sqrt{(१ - ग^{२} ज्या^{२} य)}}$

$$= ताय \left(१ + \frac{१}{२} ग^{२} ज्या^{२} य + \frac{१.३}{२\ ४} ग^{४} ज्या^{४} य + \frac{१.३.५}{२\ ४.६} ग^{६} ज्या^{६} य + \cdots \right)$$

इसलिये $\int \frac{ताय}{\sqrt{(१ - ग^{२} ज्या^{२} य)}} = य + \frac{ग^{२}}{२} \int ज्या^{२} य + \frac{१\ ३}{२\ ४} ग^{४} \int ज्या^{४} यताय$

$$+ \frac{१\cdot३\cdot५}{२\cdot४\cdot६} ग^{६} \int ज्या^{६} यताय$$

इस लिये १२ वें प्रक्रम के १५ वें उदाहरण से वा ३५ वें प्रक्रम से

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \frac{ताय}{\sqrt{(१ - ग^{२} ज्या^{२} य}} = \frac{\pi}{२} + \frac{ग^{२}}{२} \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२} यताय$$

$$+ \frac{१\cdot३}{२\ ४} ग^{४} \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{४} यताय + \cdots$$

$$= \frac{\pi}{२} \left\{ १ + \left(\frac{१}{२}\right)^{२} ग^{२} + \left[\frac{१\cdot३}{२\cdot४}\right]^{२} ग^{४} + \left[\frac{१\ ३\cdot५}{२\ ४\cdot६}\right]^{२} ग^{६} + \cdots \right\}$$

यह सिद्ध हुआ। इस प्रकार से विद्यार्थियो को चाहिये कि अनेक प्रश्नों का उत्तर कर पूर्व प्रक्रमों के सिद्धान्तों से अच्छी तरह परिचय करें।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

सिद्ध करो कि

१। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{म}}\text{प}\,\text{कोज्या}^{\text{न}}\text{प}} = \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{म}-\text{२}}\text{प}\,\text{कोज्या}^{\text{न}}\text{प}} + \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{म}}\text{प}\,\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{२}}\text{प}}$

२। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{कोज्या}^{\text{न}}\text{प}} = \frac{\text{ज्याप}}{(\text{न}-\text{१})\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{१}}\text{प}} + \frac{\text{न}-\text{२}}{\text{न}-\text{१}} \int \frac{\text{ताप}}{\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{२}}\text{प}}$

३। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{न}}\text{प}} = \frac{-\text{कोज्याप}}{(\text{न}-\text{१})\text{ज्या}^{\text{न}-\text{१}}\text{प}} + \frac{\text{न}-\text{२}}{\text{न}-\text{१}} \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{न}-\text{२}}\text{प}}$

४। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्याप}\,\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{प}} = \frac{\text{१}}{\text{कोज्याप}} + \text{ला स्प}\frac{\text{प}}{\text{२}}$

५। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्याप}\,\text{कोज्या}^{\text{४}}\text{प}} = \int \frac{\text{ज्याप}\,\text{ताप}}{\text{कोज्या}^{\text{४}}\text{प}} + \int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्याप}\,\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{प}}$

६। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{३}}\text{प}\,\text{कोज्या}^{\text{२}}\text{प}} = \frac{\text{१}}{\text{३ज्या}^{\text{३}}\text{प}} - \frac{\text{१}}{\text{ज्याप}} + \text{ला}\left\{\text{स्प}\left(\frac{\pi}{\text{४}} + \frac{\text{प}}{\text{२}}\right)\right\}$

७। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{ज्या}^{\text{३}}\text{प}} = -\frac{\text{कोज्याप}}{\text{२ज्या}^{\text{२}}\text{प}} + \text{ला}\sqrt{\text{स्प}\frac{\text{प}}{\text{२}}}$

८। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{स्प}^{\text{न}}\text{प}} = -\frac{\text{१}}{(\text{न}-\text{१})\text{स्प}^{\text{न}-\text{१}}\text{प}} - \int \frac{\text{ताप}}{\text{स्प}^{\text{न}-\text{२}}\text{प}}$

९। $\int \text{स्प}^{\text{४}}\text{प}\,\text{ताप} = \frac{\text{स्प}^{\text{३}}\text{प}}{\text{३}} - \text{स्पप} + \text{प}$

१०। $\int \frac{\text{ताप}}{\text{स्प}^{\text{५}}\text{प}} = -\frac{\text{१}}{\text{४स्प}^{\text{४}}\text{प}} + \frac{\text{१}}{\text{२स्प}^{\text{२}}\text{प}} + \text{ला}\ (\text{ज्याप})$

११। $\int \text{ज्या}^{\text{३}}\text{प}\,\text{कोज्या}^{\text{३}}\text{प}\,\text{ताप} = -\frac{\text{१}}{\text{४}}\,\text{कोज्या}^{\text{४}}\text{प} + \frac{\text{१}}{\text{६}}\,\text{कोज्या}^{\text{६}}\text{प}$

१२। $\int \frac{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{प}\,\text{ताप}}{\text{कोज्या}^{\text{३}}\text{प}} = \frac{\text{ज्याप}}{\text{२कोज्या}^{\text{२}}\text{प}} + \frac{\text{१}}{\text{४}}\,\text{ला}\,\frac{\text{१}-\text{ज्याप}}{\text{१}+\text{ज्याप}}$

१३। $\int_{0}^{\text{अ}} \text{य}^{\text{३}}(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{ताय} = \frac{\text{३३}\pi\text{अ}^{\text{५}}}{\text{१६}}$

१४। $\int_{0}^{\text{२अ}} \text{य}^{\text{३}}(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{ताय} = \frac{\text{७}\pi\text{अ}^{\text{५}}}{\text{८}}$

१५। $\int_{0}^{\text{२अ}} \text{य}(\text{२अय}-\text{य}^{\text{२}})^{\frac{\text{१}}{\text{२}}}\text{ताय} = \frac{\pi\text{अ}^{\text{३}}}{\text{२}}$

१६। यदि $\text{च}_{\text{न}} = \int \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{ककोज्याय})^{\text{न}}}$ जहाँ न, धन और अभिन्न है तो सिद्ध करो कि

$$(\text{न}-\text{१})(\text{अ}^{\text{२}}-\text{क}^{\text{२}})\text{च}_{\text{न}} = -\frac{\text{कज्याय}}{\text{त}^{\text{न}-\text{१}}} + \text{अ}(\text{२न}-\text{३})\text{च}_{\text{न}-\text{१}} - (\text{न}-\text{२})\text{च}_{\text{न}-\text{२}}$$

(यहां $\text{त} = \text{अ}+\text{ककोज्याय}$)

१७। सिद्ध करो कि यदि

$\int (\text{१}+\text{ककोज्याय})^{-\text{न}}\text{ताय} = \text{च}_{\text{न}}$ तो

$$(\text{न}-\text{१})(\text{१}-\text{क})\text{च}_{\text{न}} = -\text{कज्याय}(\text{१}+\text{ककोज्याय})^{-\text{न}+\text{१}} + (\text{२न}-\text{३})\text{च}_{\text{न}-\text{१}} - (\text{न}-\text{२})\text{च}_{\text{न}-\text{२}}$$

१८। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{ककोज्याय})^{\text{न}}} = \text{२}\int \frac{(\text{अ}-\text{ककोज्या२प})^{\text{न}-\text{१}}\text{ताप}}{(\text{अ}^{\text{२}}-\text{क}^{\text{२}})^{\text{न}-\frac{\text{१}}{\text{२}}}}$$

यदि $\text{स्प}\frac{\text{य}}{\text{२}} = \text{स्पप}\sqrt{\frac{\text{अ}+\text{क}}{\text{अ}-\text{क}}}$

१९। सिद्ध करो कि यदि न सम हो तो

$$\int \text{कोज्या}^{\text{न}}\text{षताष} = \text{ज्याष}\left[\frac{\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{१}}}{\text{न}} + \frac{\text{न}-\text{१}}{\text{न}(\text{न}-\text{२})}\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{३}}\text{ष}\right] + \text{ज्याष}\left[\frac{(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{३})}{\text{न}(\text{न}-\text{२})(\text{न}-\text{४})}\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{५}}\text{ष} + \ldots\right]$$

$+\frac{(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{३})(\text{न}-\text{५})\ldots\text{१}}{\text{न}(\text{न}-\text{२})(\text{न}-\text{४})\ldots\text{२}}\text{ष}$ और यदि न विषम हो तो

$$\int \text{कोज्या}^{\text{न}}\text{षताष} = \text{ज्याष}\left\{\frac{\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{१}}}{\text{न}} + \frac{\text{न}-\text{१}}{\text{न}(\text{न}-\text{२})}\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{३}}\text{ष}\right\}$$

$$+\text{ज्याष}\left\{\frac{(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{३})}{\text{न}(\text{न}-\text{२})(\text{न}-\text{४})}\text{कोज्या}^{\text{न}-\text{५}}\text{ष} + \cdots + \frac{(\text{न}-\text{१})(\text{न}-\text{३})(\text{न}-\text{५})\ldots\text{२}}{\text{न}(\text{न}-\text{२})(\text{न}-\text{३})\ldots\text{३}}\right\}$$

२०। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ज्या}^{\text{२}}\text{षकोज्या}^{\text{म}}\text{षताष} = \frac{\text{ज्याषकोज्या}^{\text{म}+\text{१}}\text{ष}}{\text{म}+\text{२}} + \frac{\text{ष}}{\text{म}+\text{२}} - \frac{\text{म}+\text{१}}{\text{म}+\text{१}}\text{ज्याष}$$

$$+\frac{म(म+१)}{\lfloor २(म+१)}\left\{\frac{ज्यापकोज्याष}{२}+\frac{प}{२}\right\}$$

$$-\frac{म(म+१)(म-१)}{\lfloor ३(म+२)}\left\{\frac{ज्यापकोज्या^{२}ष}{३}+\frac{२}{३}ज्याप\right\}+\cdots$$

$$+(-१)^{न}\frac{(म+१)(म)\quad(म-न+२)}{\lfloor न(म+१)}\int कोज्या^{न}पताप$$

२१। सिद्ध करो कि यदि लाय = ला और $\int\left\{लाय\right\}^{न}य^{म}ताय = च_{न,म}$

तो $च_{न,म} = ला^{न}\frac{य^{म+१}}{म+१} - \frac{न}{म+१}च_{न-१,म}$

२२। सिद्ध करो कि

$$\int य^{म}\left\{लाय\right\}^{२}ताय = \frac{य^{म+१}}{म+१}\left\{(लाय)^{२} - \frac{२}{म+१}लाय + \frac{२}{(म+१)^{२}}\right\}$$

२३। सिद्ध करो कि

$$\int\left\{लाय\right\}^{४}य^{७}ताय = \frac{(लाय)^{४}य^{८}}{८} - \frac{४(लाय)^{३}य^{८}}{८^{२}} + \frac{४\ ३(लाय)^{२}य^{८}}{८^{३}}$$

$$-\frac{४\ ३\ २लायय^{८}}{८^{४}} + \frac{४\cdot३\ २य^{८}}{८^{५}}$$

२४। सिद्ध करो कि

$$\int\frac{ज्या^{म}य}{कोज्या^{न}य}ताय = \frac{ज्या^{म-१}य}{(न-१)कोज्या^{न-१}य} - \frac{म-१}{न-१}\int\frac{ज्या^{म-२}य}{कोज्या^{न-२}य}ताय$$

२५। सिद्ध करो कि यदि य = २प तो

$$\int\frac{ज्या^{म}य}{(१+कोज्याय)^{न}}ताय = २^{म-न+१}\int\frac{ज्या^{म}पताप}{कोज्या^{२न-म}प}$$

२६। सिद्ध करो कि

$$\int\frac{इ^{मय}}{य^{न}}ताय = -\frac{इ^{मय}}{(न-१)य^{न-१}} + \frac{म}{न-१}\int\frac{इ^{मय}}{य^{न-१}}ताय।$$

२७। सिद्ध करो कि

$$\int\frac{इ^{मय}}{य}ताय = लाय + मय + \frac{म^{२}य^{२}}{२\lfloor २} + \frac{म^{३}य^{३}}{३\lfloor ३} + \frac{म^{४}य^{४}}{४\lfloor ४}$$

२८। $\int_{०}^{२अ}य^{४}\sqrt{(२अय-य^{२})}\ उज्या^{-१}\frac{य}{अ}ताय = अ^{२}\ldots$ इसे सिद्ध करो

२९ । $\int_{0}^{अ} १६\sqrt{अ^{२} - य^{२}}\, कोज्या^{-१}\frac{य}{अ}\, ताय = अ^{२}(४ + \pi^{२})$ इसे सिद्ध करो

३० । सिद्ध करो कि

$$स्प^{२न+१}पताप = \frac{स्प^{२न}प}{२न} - \frac{स्प^{२न-४}प}{२न-४} + \frac{स्प^{२न-६}प}{२न-६} - \frac{स्प^{२न-८}प}{२न-८}$$

$$+ \cdots\cdots + (-१)^{न+१} ला \{ कोज्याप \}$$

३१ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{४}} स्प^{९}प\, ताप = \frac{१}{२}\left\{ ला\,(२) - \frac{७}{१२} \right\}$$

३२ । सिद्ध करो कि

$$\int \frac{ज्या^{३}य ताय}{१ + गकोज्याय} = \frac{कोज्या^{२}य}{२ग} - \frac{कोज्याय}{ग^{२}} - \frac{ग^{२} - १}{ग^{३}} ला(१ + गकोज्याय)$$

३३ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{१} य^{म} \left\{ लाय \right\}^{२} ताय = \frac{२}{(म + १)^{३}}$$

३४ । सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \frac{२ग^{३}ज्या^{२}य\, ताय}{१ + गकोज्याय} = (ग^{२} - १)\, ला\,(१ + ग) + ग\,(२ - ग)$$

३५ । सिद्ध करो कि

$$\int (न + १)\,(अ^{२} + य^{२})^{\frac{न}{२}} ताय = य(अ^{२} + य^{२})^{\frac{न}{२}} + नअ^{२} \int (अ^{२} + य^{२})^{\frac{न}{२} - १} ताय$$

३६ । एक लड़का गङ्गाजी के किनारे अ विन्दु पर खड़ा था । उसने ठीक अपने सामने एक मनोहर फूल को जो कि धारा में वहता हुआ चला जाता था देख कर अपने स्थान से गङ्गा में कूद तैर कर फूल लेने के लिये चला । प्रतिक्षण में फूल के वहने के प्रमाण को फूल और अ विन्दु के अन्तर वर्ग से गुणने से जो गुणनफल हो उतना प्रतिक्षण में लड़के के तैरने का प्रमाण है तो बताओ कि जिस समय अ विन्दु के सामने से धारा मे वह फूल ९ हाथ बह गया उस समय अ विन्दु से लड़का कितना तैर कर गया होगा । इस प्रश्न में इतना हम जानते है कि अ विन्दु से धारा का अन्तर १५ हाथ है । उ० २२६८

इति तृतीयाध्याय ।

चतुर्थाध्याय ।

प्रकीर्णक ।

३८ । कल्पना करो कि

(१) फ(य) = य तो

फ(अ) = अ, फ(अ + च) = अ + च, फ(अ + २च) = अ + २च + . . .

इस लिये

च फ(अ) + च फ(अ + च) + च फ(अ + २च) + च फ(अ + न च)

= च { अ + (अ + च) + (अ + २ च) + ...(अ + न च) }

= च { अ(न + १) + च(१ + २ + ३...न) } — च { अ(न + १) + $\frac{\text{चन}}{२}$ (न + १) }

= च(न + १)($\frac{\text{२अ+नच}}{२}$) = (अ + अ + नच)$\frac{\text{च(न+१)}}{२}$ = $\frac{\text{च(न+१)}}{२}$(अ + क) (१)

यदि अ + न च = क परन्तु यदि अ + नच = क तो च = $\frac{\text{क—अ}}{\text{न}}$ इस का उत्थापन देने से (१) का

मान = $\frac{\text{क—अ}}{२}$ (१ + $\frac{१}{\text{न}}$) (अ + क) इस मे यदि च = ० वा न = $\frac{१}{०}$ तो

इस का मान = $\frac{\text{क}^२—\text{अ}^२}{२}$ यह सिद्ध हुआ ।

परन्तु जब फ(य) = य $\int$ फ(य)ताय = $\int$ यताय = $\frac{\text{य}^२}{२}$

इस लिये $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$ फ(य)ताय = $\frac{\text{क}^२—\text{अ}^२}{२}$ (२) प्रक्रम देखो

(२) फ(य) = य^२ तो

च फ(अ) + च फ(अ + च) + चफ(अ + २च) + · चफ(अ + नच)

= च अ^२ + च (अ + च)^२ + · च (अ + नच)^२

= च { अ^२ + (अ^२ + २ अच + च^२) + · (अ^२ + २अनच + न^{२}च^२) }

= च { अ^२(न + १) + २अच(१ + २ + ३ + न) + च^३ (१^२ + २^२ + ३^२ + .. + न^२) }

= च { अ^२(न + १) + अचन (न + १) + $\frac{\text{च}^२\text{न(न + १)}}{२}$ $\frac{\text{(२न + १)}}{३}$ }

= च (न + १) { अ^२ + अचन + च^{२}न $\frac{\text{२न + १}}{६}$ }

= (क—अ) (१ + $\frac{१}{\text{न}}$) { अ^२ + कअ—अ^२ + (क—अ) ($\frac{\text{क—अ}}{\text{न}}$) ($\frac{\text{२न+१}}{६}$) }

= (क—अ) (१ + $\frac{१}{\text{न}}$) { कअ + (क + अ)^२($\frac{१}{३}$ + $\frac{१}{\text{६न}}$) }

$$= (क-अ)\left\{ कअ + \frac{(क-अ)^२}{३} \right\} = (क-अ)\left[\frac{क^२ + कअ + अ^२}{३}\right] = \frac{क^३ - अ^३}{३}$$

परन्तु $फ(य) = य^२ \therefore \int फ(य) ताय = \int य^२ ताय = \frac{य^३}{३}$

इस लिये $\int_{अ}^{क} फ(य)\ ताय = \frac{क^३ - अ^३}{३}$, इस तरह से (२) प्रक्रम की परिभाषा से स्वतन्त्रराशि के दो मानों के भीतर का चलानयन वीजगणित की युक्ति से श्रेढ़ियों के योग पर से कर सकते हैं। परन्तु जहाँ श्रेढ़ियों के योग करने की रीति नही जानी जाती वहाँ इस रीति से सान्तचल का मान जानना कठिन है।

जैसे यदि $फ(य) = लाय$ तो

$$च\,फ(अ) + चफ(अ + च) + चफ(अ + २च) + चफ(अ + ३च) + \cdots$$
$$+ चफ\{अ + च(न - १)\} = च[ला(अ) + ला(अ + च) + ला(अ + २च)$$
$$+ ला(अ + ३च) + \cdots + ला\{अ + च(न - १)\}]$$

यहां हम लोग अव लाचार है कि कैसे इस श्रेढी का योग करे परन्तु जव (२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि इस श्रेढी का योग अवश्य

$\int_{अ}^{क} फ(य) ताय = \int_{अ}^{क} ला\ (य)\ ताय$ यह होगा। इसलिये ऐसे ऐसे स्थानों में सान्तचलानयन से श्रेढी के योग का पता लग सकता है।

जैसे इसी स्थान में जव प्रसिद्ध है कि $\int लायताय = य\ लाय - य$ तव

$\int_{अ}^{क} लायताय = ला\left[\frac{क^क}{अ^अ}\right] - (क - अ)$ यही ऊपर के श्रेढ़ी का योग होगा।

३९। इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रम को अच्छी तरह से समझने के लिये कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) $\frac{१}{\sqrt{१ - य^२}} = फ(य)$ इस में श्रेढी के योग पर से $\int_{०}^{१} \frac{ताय}{\sqrt{१ - य^२}}$

इसका मान जानना है यहाँ, $चफ(०) + चफ(च) + चफ(२च) + चफ(३च) + \cdots + चफ(१)$

$$= \left[\frac{च}{१} + \frac{च}{\sqrt{१ - च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१ - ४च^२}} + \frac{च}{\sqrt{१ - ९च^२}} + \cdots + \frac{च}{\sqrt{१ - १^२}}\right]$$

$$= \frac{१}{\frac{१}{च}} + \frac{१}{\sqrt{\frac{१}{च^२}-१}} + \frac{१}{\sqrt{\frac{१}{च^२}-४}} + \frac{१}{\sqrt{\frac{१}{च^२}-९}} + \cdots$$

$$\frac{१}{न} + \frac{१}{\sqrt{न^२-१}} + \frac{१}{\sqrt{न^२-४}} + \frac{१}{\sqrt{न^२-९}} + \cdots$$ क्योंकि यहाँ

नच=१ ∵ च=$\frac{१}{न}$ परंतु चलज्ञान से $\int_०^१ \frac{ताय}{\sqrt{१-य^२}} = \frac{\pi}{२}$

इस लिये यदि न का मान अनन्त हो तो

$$\int_०^१ \frac{ताय}{\sqrt{१-य^२}} = \frac{\pi}{२} = \frac{१}{न} + \frac{१}{\sqrt{न^२-१}} + \frac{१}{\sqrt{न^२-४}} + \frac{१}{\sqrt{न^२-९}} + \cdots$$ यह सिद्ध हुआ।

(२) $\int_०^१ \frac{ताय}{१+य^२}$ इसका मान श्रेढ़ी में जानना है।

(२) प्रक्रम से

$$\int_०^१ \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{च}{१} + \frac{च}{१+च^२} + \frac{च}{१+४च^२} + \frac{च}{१+९च^२} + \cdots + \frac{च}{१+१^२}$$

$$= \frac{१}{न}\left\{ १ + \frac{१}{१+(\frac{१}{न})^२} + \frac{१}{१+(\frac{२}{न})^२} + \frac{१}{१+(\frac{३}{न})^२} + \cdots \right\}$$

परन्तु चलानयन के प्रकार से $\int_०^१ \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{४}$, इस लिये यदि ऊपर की श्रेढी मे न अनन्त हो तो श्रेढ़ी का योग $\frac{\pi}{४}$ होगा।

(३) च[ज्याअ + ज्या(अ + च) + ज्या(अ + २च) + ⋯ + ज्या {अ + (न−१)च}]

इस मे यदि न का मान अनन्त हो तो श्रेढी के योग का मान जानना है। यहाँ त्रिकोणमिति की रीति से ऊपर की श्रेढी का योग

$$= \frac{चज्या(अ + \frac{न-१}{२}च)ज्या\frac{नच}{२}}{ज्या\frac{च}{२}} = \frac{चज्या(अ + \frac{क-अ}{२} - \frac{च}{२})ज्या\frac{क-अ}{२}}{ज्या\frac{च}{२}}$$, यदि अ + नच = क

अब यहाँ यदि च = ० तो $\frac{च}{ज्या\frac{च}{२}} = २\ \frac{\frac{च}{२}}{ज्या\frac{च}{२}} = २$ इस लिये श्रेढी का योग

$२ज्या\frac{क+अ}{२}\ ज्या\frac{क-अ}{२} = कोज्याअ - कोज्याक = \int_अ^क ज्यायताय$ यह सिद्ध हुआ।

इसी श्रेढी में यदि न के स्थान में न + १ का उत्थापन दे तो श्रेढी का योग

$= \text{च}\text{ज्या}(\text{अ} + \frac{\text{नच}}{2})\text{ज्या}\frac{\text{न}+1}{2}\text{च} - \text{ज्या}\frac{\text{च}}{2} = \frac{2\text{च}}{\text{ज्या}\frac{\text{च}}{2}}\text{ज्या}(\text{अ} + \frac{\text{क}-\text{अ}}{2})\text{ज्या}\left[\frac{\text{क}-\text{अ}}{2} + \frac{\text{च}}{2}\right]$

$= 2\text{ज्या}(\frac{\text{क}+\text{अ}}{2})\text{ज्या}\frac{\text{क}-\text{अ}}{2} = \text{कोज्याअ} - \text{कोज्याक}$, यदि $\text{च} = 0$

इसलिये श्रेढी मे यदि एक पद बढ़ भी जाय तौ भी योग वही रहेगा।

४०। २ प्रक्रम से और ३९ प्रक्रम के उदाहरणों से स्पष्ट होता है कि

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय}$$ यह $\text{च}_1\text{फ}(\text{अ}) + \text{च}_2\text{फ}(\text{य}_1) + \cdots + \text{च}_\text{न}\text{फ}(\text{य}_{\text{न}-1})$ इस श्रेढी

के योग तुल्य है यदि श्रेढी में न का मान अनन्त कल्पना किया जाय

जहाँ $\text{च}_2 = \text{य}_1 - \text{अ}_1 = 0$, $\text{च}_3 = \text{य}_2 - \text{य}_1 = 0, \cdots$ और $\text{य}_{\text{न}-1} = \text{क} - \text{च}_\text{न}$

मानो कि अ, क के भीतर फ(य) के जितने मान हैं वे सब उत्तरोत्तर घटते वा बढ़ते हैं और उन में सब से बड़ा आ और सब से छोटा का है तो सब फलों के स्थान में आ और का का उत्थापन देने से आ $(\text{च}_1 + \text{च}_2 + \text{च}_3 + \cdot + \text{च}_\text{न})$ यह पहली श्रेढी से बड़ा होगा और का $(\text{च}_1 + \text{च}_2 + \text{च}_3 + \cdot\cdot + \text{च}_\text{न})$ यह छोटा। परन्तु $\text{च}_\text{न} + \text{च}_2 + \cdot\cdot + \text{च}_\text{न} = \text{क} - \text{अ}$ इस लिये ऊपर के श्रेढी का मान आ (क—अ) और का (क—अ) के बीच में होगा।

इस लिये निश्चय है कि श्रेढी का मान (क—अ)गा इसके तुल्य होगा जहां गा एक ऐसी संख्या है जिसका मान आ और का के बीच में है परंतु फ(य) को घटते वा बढ़ते माना है इस लिये अवश्य कोई य के मान मे यह गा के तुल्य होगा। मानो कि गा = फ { अ + ष(क—अ) } जहां ष कोई रूपाल्प संख्या है।

इस लिये श्रेढी का योग $= \int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = (\text{क} - \text{अ})\text{फ}\{\text{अ} + \text{ष}(\text{क} - \text{अ})\}$

इसी प्रकार फ(य) फा(य)ताय इसमें फ(य) तो पहले ही के ऐसा समझो और वैसाही फा(य) को भी समझो तो पूर्व ही की रीति से

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ}(\text{य})\text{फा}(\text{य})\text{ताय} = \text{च}_1\text{फ}(\text{अ})\text{फा}(\text{अ}) + \text{च}_2\text{फ}(\text{य})\text{फा}(\text{य}_1) + \cdots + \text{च}_\text{न}\text{फ}(\text{य}_{\text{न}-1})\text{फा}(\text{य}_{\text{न}-1}).$$

यहां भी पूर्व ही की रीति से सिद्ध कर सकते हो कि यह श्रेढी

आ $\{\text{च}_1\text{फा}(\text{अ}) + \text{च}_2\text{फा}(\text{य}_1) + \text{च}_3\text{फा}(\text{य}_2) + \cdot\cdot + \text{च}_\text{न}\text{फा}(\text{य}_{\text{न}-1})\}$ इससे छोटी और का $\{\text{च}_1\text{फा}(\text{अ}) + \text{च}_2\text{फा}(\text{य}_1) + \text{च}_3\text{फा}(\text{य}_2) + \cdots\text{च}_\text{न}\text{फा}(\text{य}_{\text{न}-1})\}$ इस से बड़ी होगी।

इस लिये यहां भी मानो कि फ(य) के गा मान में वास्तव श्रेढी का योग = गा { $च_१$फा(अ) + $च_२$फा($य_१$) + $च_३$फा($य_२$) + · + $च_न$फा($य_{न-१}$) }

$= गा \int_{अ}^{क} फा(य)ताय = फ \{ अ + प(क—अ) \} \int_{अ}^{क} फा(य) ताय$

$= \int_{अ}^{क} फ(य)फा(य)ताय$ यह सिद्ध होता है।

यहां इसका कुछ नियम नहीं कि $\int_{अ}^{क}$फ(य)ताय इसके मान में जो फ { अ + प(क—अ) } इसमें प है वही $\int_{अ}^{क}$फ(य)फा(य)ताय इसके मान में भी हो इतना अवश्य नियम है कि ऐसे स्थानों मे प सर्वत्र रूपाल्प संख्या है।

४१। सान्तचलानयन से स्पष्ट है कि यदि $\int$फ(य)ताय = फा(य) तो

$\int_{अ}^{ग} फ(य)ताय = फा(ग)—फा(अ)$

$\int_{ग}^{क} फ(य)ताय = फा(क)—फा(ग)$

इस लिये $\int_{अ}^{ग}$फ (य)ताय + $\int_{ग}^{क}$फ(य) ताय = फा(क)

—फा(अ) = $\int_{अ}^{क}$फ(य) ताय, ... (१)

इसी प्रकार यह भी सिद्ध कर सकते हो कि

$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = — \int_{क}^{अ} फ(य) ताय$ . . . . (२)

यदि $\int$फ(य)ताय इस में य के स्थान में अ—ल इस का उत्थापन दें तो अ—ल = य ∴ अ—य = ल, —ताय = ताल,

इस लिये $\int$फ(अ—य)ताय = —$\int$फ(ल)ताल

और $\int_{अ}^{क}$ (अ—य) ताय = —$\int_{०}^{अ-क}$फ(ल)ताल = $\int_{अ-क}^{०}$ फ(ल)ताल, (२) से

मानो कि $\int$फ(ल)ताल = फा(ल) इस लिये

$\int_{अ}^{क}$फ (ल)ताल = फा(क)—फा(अ) = $\int^{क}$ फ(य)ताय

इस लिये $\int_{अ}^{क}$ (अ—य)ताय = $\int_{अ-क}^{०}$ फ(य)ताय . . . . . . (३)

(३) में मानो कि क = ० तो $\int_{अ}^{०}$ फ(अ—य) = $\int_{अ}^{०}$फ(य)ताय

इस लिये (२) से $\int_{०}^{अ}$ फ(अ—य)ताय = $\int_{०}^{अ}$ फ(य)ताय . . (४)

इसी प्रकार यदि $य = २अ — र$ तो $ताय = — तार$ और $र = २अ — य$

इस लिये $\int फ(य)\, ताय = — \int फ(२अ — र)\, तार$

और $\int_{अ}^{२अ} फ(य)\, ताय = — \int_{अ}^{०} फ(२अ — र) तार = \int_{०}^{अ} फ(२अ — र) तार$

परन्तु (३) की युक्ति से $\int_{०}^{अ} फ(२अ — र) तार = \int_{०}^{अ} फ(२अ — य) ताय$

इस लिये $\int_{अ}^{२अ} फ(य) ताय = \int_{०}^{अ} फ(२अ — य)\, ताय$

और (१) से $\int_{०}^{२अ} फ(य) ताय = \int_{०}^{अ} फ(य)\, ताय + \int_{अ}^{२अ} फ(य)\, ताय$

इस लिये $\int_{०}^{२अ} फ(य) ताय = \int_{०}^{अ} फ(य) ताय + \int_{०}^{अ} फ(२अ — य)$ . . . . (५)

(५) वे में यदि य के ० और अ के बीच सब मानों में $फ(य) = फ(२अ — य)$

तो $\int_{०}^{२अ} फ(य)\, ताय = २ \int_{०}^{अ} फ(य)\, ताय$ . . . . (६)

और यदि य के ० और अ के बीच सब मानों में $— फ(य) = फ(२अ — य)$

तो $\int_{०}^{२अ} फ(य) ताय = ०$ . . . . (७)

जैसे यदि $फ(य) = ज्या^{म} य$ तो $फ(\pi — य) = ज्या^{म}(\pi — य) = ज्या^{म} य$

त्रिकोणमिति से

$$इस\ लिये \int_{०}^{२अ} फ(य) ताय = \int_{०}^{\pi} फ(य) ताय = २ \int_{०}^{अ} फ(य) ताय$$

$$= २ \int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म} य\ ताय = \int_{०}^{\pi} ज्या^{म} य\ ताय \quad \cdots\cdots\cdots \cdot (६)\ से$$

और जब त्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि $कोज्याय = — कोज्या\ (\pi — य)$

इस लिये यदि म विषम संख्या हो और $फ(य) = कोज्या^{म} य$ तो (७) से

सिद्ध कर सकते हो कि $\int_{०}^{२अ} फ(य) ताय \int_{०}^{\pi} कोज्या^{म} य ताय = ०$

(२) प्रक्रम से यदि $\int_{०}^{\pi} ज्या^{म} य ताय$ इसका मान श्रेढी में लावो तो

$च \{ ज्या^{म} च + ज्या^{म} २च + ज्या^{म} ३च + \cdots + ज्या^{म}(न - १)च \}$ ऐसा होगा

जहाँ $नच = \pi$

यहाँ स्पष्ट देख पड़ता है कि $ज्या^{म} च = ज्या^{म}(न - १)च = ज्या^{म}(\pi — च) = ज्या^{म} च,$

$ज्या^म २च = ज्या^म (न—२)च = ज्या^म (\pi—२च) = ज्या^म २च$, इसी तरह और भी दिखा सकते हो कि दो दो पद तुल्य आवेंगे इस लिये इस पर से भी सिद्ध कर सकते हो कि $\int_0^{\pi} ज्या^म य ताय = २\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^म य ताय$ ।

इसी तरह से यह भी सिद्ध कर सकते हो कि $\int_0^{\pi} कोज्या^म य ताय = ०$ यदि म विषम हो

यदि अ से क बड़ा हो और य के अ और क के बीच किसी मान मे फ(य) सर्वदा धनात्मक हो तो स्पष्ट है कि $\int_अ^क फ(य) ताय$ इसका मान जो (२) प्रक्रम से श्रेढी मे आता है उस मे प्रत्येक पद धनात्मक ही रहेगे इस लिये श्रेढी का योग अर्थात् $\int_अ^क फ(य) ताय$ यह सर्वदा धनात्मक ही होगा ।

४२ । ऊपर के प्रक्रमों मे सान्तचल के लिये जो कुछ वर्णन किया गया है वह सब तभी ठीक दिखा सकते हो जब फल अर्थात् जिस का चल ज्ञान करना है, अ और क के बीच स्वतन्त्र राशि के मानो मे सान्त हो और यदि अ, और क के बीच किसी स्वतन्त्र राशि के मान मे फल अनन्त के तुल्य हो तो ऊपर की विधि से अर्थात् श्रेढी की विधि से सिद्ध होता है कि सान्तचल ज्ञान नही हो सकता। ऐसी स्थिति में अवश्य परीक्षा करनी चाहिये ।

जैसे चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{ताय}{(१—य)^२} = \frac{१}{१—य}$ इस लिये

$$\int_0^२ \frac{ताय}{(१—य)^२} = \frac{१}{१—२} — \frac{१}{१—०} = —१—१ = —२$$ यह मान आया

परन्तु $\int_0^२ \frac{ताय}{(१—य)^२}$ इस का मान यदि (२) प्रक्रम से श्रेढी मे ले आवो

तो $च \left\{ \frac{१}{(१—०)^२} + \frac{१}{(१—च)^२} + \qquad \right\}$ ऐसा होगा ।

इस मे स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धनात्मक है इस लिये श्रेढी का योग अर्थात् $\int_0^२ \frac{ताय}{(१—य)^२}$ यह धनात्मक ही होगा। इस कारण पहले सान्तचलानयन से —२ यह मान सिद्ध हुआ अशुद्ध ठहरा। यहां ० और २ के बीच य का मान १ के तुल्य मानो तो $\frac{१}{१—य}$ यह अनन्त के तुल्य होता है।

इसी प्रकार $\int_0^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{१—य}} = २—२\sqrt{१—अ}$ यह सान्तचलानयन से सिद्ध होता है परन्तु यहां यदि य = १ तो $\frac{१}{\sqrt{१—य}}$ यह अनन्त के तुल्य होता है। इस लिये यहां ऐसा कहना पड़ेगा कि $\int_0^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{१—य}}$ इसका मान सान्त होगा यदि अ <१ हो तो। और अ का मान जैसा जैसा १ के पास होता जायगा तैसा तैसा $\int_0^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{१—य}}$ यह २ के पास पास आवेगा।

४३। (२) प्रक्रम में $\int_{अ}^{क}$ फ(य)ताय इस के मान में क, और अ दोनों को जो फ(य) के ऐसा सान्त कल्पना किया है वह सर्वदा ठीक नही कभी एक कभी दोनो विशेष स्थल में अनन्त के भी समान हो सकते हैं।

जैसे $\int \frac{ताय}{१+य^२} = स्प^{-१}य$ इस लिये $\int_0^{अ} \frac{ताय}{१+य^२} = स्प^{-१}अ$ यहां स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों अ का मान वढ़ता जायगा त्यो त्यों $स्प^{-१}अ$ का मान $\frac{\pi}{२}$ के पास पास होगा इस लिये यदि अ = ∞ तो $स्प^{-१}अ = \frac{\pi}{२}$ ऐसा होगा इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{२}$ यह सिद्ध हुआ।

इसी प्रकार $\int \frac{ताय}{१+य} =$ ला (१ + य)

इस लिये $\int_0^{अ} \frac{ताय}{१+य} =$ ला (१ + अ) यहां भी स्पष्ट है कि ज्यों ज्यों अ का मान वढ़ेगा त्यों त्यों ला (१ + अ) का भी मान वढ़ेगा इस लिये यदि अ = ∞ तो ला (१ + अ) = ∞ ∴ $\int_0^{\infty} \frac{ताय}{१+य} = \infty$ यह सिद्ध होता है।

४४। कल्पना करो कि फ(य) का मान अनन्त होता है यदि य = ग जहां ग, अ और क के वीच में है तो (४२) प्रक्रम से स्पष्ट है कि यहां $\int_{अ}^{क}$ फ(य) ताय इसका मान साधारण सान्त चलानयन से ठीक नहीं

आवेगा इस लिये पहले यहां $\int_{अ}^{ग-इ_१} फ(य)ताय + \int_{ग+इ_१}^{क} फ(य)ताय$

इस का मान ले आवो इस में $इ_१$ का मान शून्य मानने से (४१) प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = \int_{अ}^{ग-इ_१} फ(य)ताय + \int_{ग+इ_१}^{क} फ(य)ताय$$

यह सिद्ध हो जायगा।

जैसे यदि $फ(य) = \frac{१}{ग-य}$ तो $\int फ(य)ताय = -ला\,(ग-य)$

इस लिये $\int_{अ}^{ग-इ_१} फ(य)ताय = -ला\,\{ग-(ग-इ_१)\}$

$$-\{-ला\,(ग-अ)\} = ला\,\frac{ग-अ}{इ_१}$$

इसी तरह $\int_{ग+इ_१}^{क} फ(य)ताय = \int_{ग+इ_१}^{क} \frac{ताय}{ग-य} = -\int_{ग+इ_१}^{क} \frac{ताय}{य-ग}$

$= -\int ला\frac{क-ग}{इ_१}$ इस लिये दोनो का योग $= ला\,\frac{ग-अ}{इ_१} - ला\,\frac{क-ग}{इ_१}$

$= ला\frac{ग-अ}{क-ग} = \int_{अ}^{क} \frac{ताय}{ग-य}$ क्योंकि यहाँ $इ_१ = ०$ मानने से भी $ला\frac{ग-अ}{क-ग}$ मे कुछ विकार न होगा।

ऐसे मान को क्यासी (Cauchy) साहब ने $\int_{अ}^{क} फ(य)ताय$ इसका मुख्य मान यह नाम रखा है।

४५। $\int \frac{ताय}{अ^२+य^२}$ इस का मान सिद्ध है कि $\frac{१}{अ}\, स्प^{-१}\frac{य}{अ}$ यह होगा इस लिये $\int$ यहां यदि $य = स्पप$ तो $ताय = छे^२पताप$ तव

$$\int \frac{ताय}{अ^२+य^२} = \int \frac{छे^२पताप}{अ^२+स्प^२प} = \frac{१}{अ}\, स्प^{-१}\left[\frac{स्पप}{अ}\right]$$

यहां यदि $प = ०$ और π हो तो $\int_{०}^{\pi} \frac{छे^२पताप}{अ^२+स्प^२प}$ इस का मान

$$\frac{१}{अ}\, स्प^{-१}\left(\frac{स्प\pi}{अ}\right) - \frac{१}{अ}\, स्प^{-१}\left(\frac{स्प०}{अ}\right) = स्प^{-१}(०) - स्प^{-१}(०)$$

देखो यहाँ दोनों खण्डों का रूप एक ही है इस लिये वहुधा भ्रान्ति से जो लोग कि सान्तचलानयन में निपुण नही हैं दोनों मानो को समान मान उत्तर शून्य के तुल्य कहेंगे जो कि वास्तव मे अशुद्ध है क्योंकि यदि सान्तचल का रूप (२) प्रक्रम से श्रेढ़ी मे ले आवो तो

$$\frac{च}{अ^२} + \frac{चछे^२च}{अ^२+स्प^२च} + \frac{चछे^२२च}{अ^२+स्प^२२च} + \cdots \frac{चछे^२(न-१)च}{अ^२+स्प^२(न-१)च}$$

यह होगा जिस मे स्पष्ट है कि प्रत्येक पद धन हैं इस लिये श्रेढ़ी का योग अर्थात् $\int_{०}^{\pi} \frac{छे^२पताप}{अ^२+स्प^२प}$ यह कोई धनात्मक संख्या है। यही ४१वें प्रक्रम के अन्त्य वाक्य से भी सिद्ध कर सकते हो कि यहाँ सान्तचल का मान अवश्य धनात्मक संख्या होगी।

इस लिये यहाँ पर विचार करना चाहिये कि वास्तव में प के ० और π मान में $स्प^{-१}\left(\frac{स्पप}{अ}\right)$ का क्या मान होगा। कल्पना करो कि ०, $प_१$, $प_२$ $प_३$, · · ·$प_न$, π यह एक श्रेढ़ी है जहाँ उत्तरोत्तर अधिक पद हैं और $\frac{छे^२प}{अ^२+स्प^२प} = र$ तो (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{०}^{\pi} \frac{छे^२पताप}{अ^२+स्प^२प} = \int_{०}^{\pi} रताप = \int_{०}^{प_१} रताप + \int_{प_१}^{प_२} रताप + \int_{प}^{प_३} रताप + \cdots$$

$$+ \int_{प_{न-१}}^{प_न} रताप + \int_{प^न}^{\pi} रताप$$

यहाँ स्पष्ट है कि न का मान अधिक करने से $प_इ$ और $प_{इ+१}$ के अन्तर को चाहे जितना छोटा कर सकते हो इस लिये

$$\int_{प_इ}^{प_{इ+१}} रताप = स्प^{-१}\left[\frac{स्पप_{इ+१}}{अ}\right] - स्प^{-१}\left[\frac{स्पप_इ}{अ}\right]$$ यह अवश्य शून्य के तुल्य हो सकता है यदि $प_{इ+१} - प_इ = ०$

इस पर से सिद्ध होता है कि ज्यों ज्यों प का मान बढ़ेगा त्यों त्यों $स्प^{-१}\left(\frac{स्पप}{अ}\right)$ इस का भी मान बढ़ता जायगा इस लिये प के ० मान से π मान तक एक वार यह भी बढ़ कर $\frac{न\pi}{२}$ इस मान के पार हो जायगा। जहाँ न कोई विषम संख्या है इस लिये यदि प के शून्य मान में

स्प$^{-1}$ $\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान नπ मानो तो प के π मान मे स्प$^{-1}$ $\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ इस का मान $(\text{न}+१)\pi$ अवश्य मानना पड़ेगा इस लिये

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{छे}^{२}\text{पताष}}{\text{अ}^{२}+\text{स्प}^{२}\text{ष}}$$

$$= \frac{१}{\text{अ}}\left\{\text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{स्प}\pi}{\text{अ}}\right] - \text{स्प}^{-१}\left[\frac{\text{स्प}०}{\text{अ}}\right]\right\} = \frac{१}{\text{अ}}\left\{\text{स्प}^{-१}(०) - \text{स्प}^{-१}(०)\right\}$$

$$= \frac{१}{\text{अ}}\left\{(\text{न}+१)\pi - \text{न}\pi\right\} = \frac{\pi}{\text{अ}}$$ यह सच्चा उत्तर होगा।

अथवा $\frac{१}{\text{अ}}$ स्प$^{-१}$ $\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ इस मे मानो कि स्प$^{-१}$ $\left(\frac{\text{स्पष}}{\text{अ}}\right)$ = षा

∴ स्पषा = $\frac{१}{\text{अ}}$ स्पष अब चलनकलन के (३०४) प्रक्रम के (१) समीकरण से

यदि म = न = $\frac{१}{\text{अ}}$ और म = $\frac{\text{अ}-१}{\text{अ}+१}$ तो

$$\text{षा} = \text{ष} - \text{म}\text{ज्या}२\text{ष} + \frac{\text{म}^{२}}{२}\text{ज्या}४\text{ष} - \frac{\text{म}^{३}}{३}\text{ज्या}६\text{प} + \cdots$$ ऐसा होगा

इस का उत्थापन चल मान मे देने से

$$\int \frac{\text{छे}^{२}\text{पताप}}{\text{अ}^{२}+\text{स्प}^{२}\text{प}} = \frac{१}{\text{अ}}\left(\text{प} - \text{म}\text{ज्या}२\text{ष} + \frac{\text{म}^{२}}{२}\text{ज्या}४\text{ष} - \frac{\text{म}^{३}}{३}\text{ज्या}६\text{प} + \cdots\right)$$ ऐसा हुआ

इस मे प का मान शून्य और π मानो तो स्पष्ट है कि

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{छे}^{२}\text{पताप}}{\text{अ}^{२}+\text{स्प}^{२}\text{प}} = \frac{१}{\text{अ}}\left(\pi - \text{म}\text{ज्या}२\pi + \frac{\text{म}^{२}}{२}\text{ज्या}४\pi - \frac{\text{म}^{३}}{३}\text{ज्या}६\pi + \cdots\right)$$

$$- \frac{१}{\text{अ}}\left(० - \text{म}\text{ज्या}० + \frac{\text{म}^{२}}{२}\text{ज्या}० - \frac{\text{म}^{३}}{३}\text{ज्या}० + \cdots\right)$$

$$= \frac{\pi}{\text{अ}} - ० = \frac{\pi}{\text{अ}}$$ यह बड़े लाघव से सिद्ध हुआ।

पहली क्रिया जो दिखलाई गई है उसे टाड्हण्टर (Todhunter) साहब ने अपने चलराशिकलन (Integral Calculus) के ४६वें प्रक्रम मे लिखा है। और दूसरी क्रिया से $\frac{१}{\text{अ}}$स्प$^{-१}$ $\frac{\text{स्पप}}{\text{अ}}$ इस का मान जो दिखलाया है वह मेरी कल्पना है।

इसी प्रकार दोनों सीमाओ के भीतर वास्तव मे क्या मान है इसकी परीक्षा के लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि बड़ी सावधानी से क्रिया करें क्योंकि ऐसे स्थानों में बहुधा संशयात्मक मान पड़ जाते है जिनका ठीक विचार न करने से

तुरन्त मान मे अशुद्धि हो जाती है ।

इस विषय पर एक और उदारण दिखाते हैं ।

चलानयन से सिद्ध है कि $\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-1} \frac{\text{य}}{\text{अ}}$, इस लिये

$$\int_{-\text{अ}}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}^{-1}}{\sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}} = \text{ज्या}^{-1}(+१) - \text{ज्या}^{-1}(-१)$$ यह संशयात्मक हुआ ;

क्योंकि त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि

ज्या $\{(४\text{म}+१)\frac{\pi}{२}\} = +१$ और ज्या $\{(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}\} = -१$ जहाँ म और न कोई अभिन्न संख्या है। इस लिये म और न का भिन्न-भिन्न मान मानने से अनेक मान आ सकते हैं।

इस संशय को दूर करने के लिये विचारो कि—अ से बढ़ते बढ़ते जब य, +अ के तुल्य होगा तो निश्चय है कि एक वार शून्य के तुल्य होगा इस लिये ज्या$^{-1}$(—१) यह बढ़ते बढ़ते जब ज्या$^{-1}$(+१) इस के तुल्य होगा तो अवश्य इस का एक ही मान ज्या$^{-1}$ (०) यह होगा इस लिये यदि ज्या$^{-1}$(—१) का मान $(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}$ यह मानो तो अवश्य ज्या$^{-1}$(०) का मान $(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\frac{\pi}{२}$ यह और ज्या$^{-1}$(+१) का मान

$(४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\frac{\pi}{२}+\frac{\pi}{२} = (४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\pi$ यह होगा। इस लिये

ज्या$^{-1}$(+१)— ज्या$^{-1}$(—१) $= (४\text{न}-१)\frac{\pi}{२}+\pi - (४\text{न}-१)\frac{\pi}{२} = \pi$ यह निश्चय मान हुआ। अथवा पहले ज्या$^{-1}$ $\frac{\text{य}}{\text{अ}}$ इस का मान चलनकलन के (२०) वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से श्रेढी के रूप में

$$\text{ज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \frac{\text{य}}{\text{अ}} + \frac{१}{१.२}\,\frac{\text{य}^3}{३\text{य}^3} + \frac{१.३}{२.४}\,\frac{\text{य}^5}{५\text{अ}^5} + \frac{१.३.५}{२.४.६}\,\frac{\text{य}^7}{७\text{अ}^7} + \cdots$$ यह ले आवो

इस में य = अ, और य = —अ, यह मान कर

$$\text{ज्या}^{-1}(+१) = १ + \frac{१}{१.२}\,\frac{१}{३} + \frac{१.३}{२.४}\,\frac{१}{५} + \cdot$$

$$\text{ज्या}^{-1}(-१) = -१ - \frac{१}{१.२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{१.३}{२.४}\,\frac{१}{५} - \cdots = -\text{ज्या}^{-1}(+१)$$ इस लिये

ज्या$^{-1}$(+१)—ज्या$^{-1}$(—१) = २ज्या$^{-1}$(+१) $= २\frac{\pi}{२} = \pi$ यह सिद्ध हुआ। परन्तु इस वात का यहाँ अवश्य ध्यान रखना चाहिये कि ज्या पर से इस श्रेढी द्वारा जो चाप का मान आता है वह सर्वदा $\frac{\pi}{२}$ इस से अल्प इस लिये यहाँ भी पहले के ऐसा इस एक मान को लेकर विचार करना चाहिये।

४६। जब ४० वे प्रक्रम से स्पष्ट है कि

$$\int_{अ}^{क} फ(य)ताय = च_1 फ(अ) + च_2 फ(य_1) + \cdots + च_न फ(य_{न-1}) \cdots (1)$$

$$\int_{अ}^{क} फा(य)\, ताय = च_1 फा(अ) + च_2 फा(य_1) + \cdots + च_न फा(य_{न-1}) \cdot (2)$$

और $$\int_{अ}^{क} फि(य)ताय = च_1 फि(अ) + च_2 फि(य_1) + \cdots + च_न फि(य_{न-1}) \cdots (3)$$

होंगे इस लिये फ (अ), फ($य_1$), फ($य_2$), ⋯ फ($य_{न-1}$) प्रत्येक क्रम से यदि फा (अ), फा ($य_1$), फा($य_2$), ⋯ फा($य_{न-1}$)

और फि(अ), फि($य_1$), फि($य_2$), ⋯ फि($य_{न-1}$) इन के प्रत्येक पद के भीतर हो अर्थात् फा(अ) और फि(अ) के बीच मे फ(अ), फा($य_1$) और फि($य_1$) के बीच मे फ ($य_1$) इत्यादि हो तो स्पष्ट है कि दूसरे और तीसरे के प्रत्येक पदों के योग अर्थात् $\int_{अ}^{क} फा(य)\, ताय$ और $\int_{अ}^{क} फि(य)\, ताय$ के बीच मे $\int_{अ}^{क} फ(य)ताय$ यह होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि फ(य) यह फा(य) और फि(य) के बीच में हो य के अ और क के बीच किसी मान में तो

$\int_{अ}^{क} फ(य)\, ताय$ यह भी $\int_{अ}^{क} फा(य)\, ताय$ और $\int_{अ}^{क} फि(य)ताय$ के बीच मे होगा।

जैसे त्रिकोणमिति से सिद्ध है कि $ज्या^{२न+१}य$ यह सर्वदा $ज्या^{२न}य$ और $ज्या^{२न+२}य$ के बीच मे रहता है अर्थात् $ज्या^{२न}य > ज्या^{२न+१}य > ज्या^{२न+२}य$ तो ऊपर के सिद्धान्त से $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ज्या^{२न}यताय > \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ज्या^{२न+१}यताय$

$> \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} ज्या^{२न+२}यताय$ यह होगा।

४७। यदि फ (य), य के स्थान मे अ और अ से बड़ी संख्या का उत्थापन देने से उत्तरोत्तर न्यून होता जाय तो

फ(अ) + फ(अ + १) + फ(अ + २) + ⋯ अनन्त यह श्रेढी और $\int_{अ}^{\infty} फ(य)ताय$

यह दोनों सान्त अथवा दोनों अनन्त होंगे।

क्योंकि (४०) वें प्रक्रम में क = अ + १ ऐसा मानो तो सिद्ध होगा कि

$$(\text{क}-\text{अ})\text{फ}(\text{अ}) = \text{फ}(\text{अ}) > \int_{\text{अ}}^{\text{अ}+१} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} > (\text{क}-\text{अ})\text{फ}(\text{अ}+१) = \text{फ}(\text{अ}+१)$$

$$\text{फ}(\text{अ}+२)$$

इसी तरह $\text{फ}(\text{अ}+१) > \int_{\text{अ}+१}^{\text{अ}+२} \text{फ}(\text{य})\,\text{ताय} >$

⋮

$$\text{फ}\{\text{अ}+(\text{न}-१)\} > \int_{\text{अ}+(\text{न}-१)}^{\text{अ}+\text{न}} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} > \text{फ}(\text{अ}+\text{न})$$

तीनों का योग कर न को अनन्त मानने से (४१) वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}(\text{अ}+१) + \text{फ}(\text{अ}+२) + \cdots > \int_{\text{अ}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} < \text{फ}(\text{अ}+१)$$

$$+ \text{फ}(\text{अ}+२) + \text{फ}(\text{अ}+३) + \cdots$$ यह सिद्ध हुआ।

इसलिये यदि श्रेढ़ी सान्त होगी तो $\int_{0}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\text{ताय}$ यह सान्त और श्रेढ़ी के अनन्त में अनन्त होगा।

४८। यदि लाय = ला, ला{ला(य)} = $\text{ला}^{२}(\text{य})$, ला[ला{ला(य)}] = $\text{ला}^{३}(\text{य})$ इत्यादि कल्पना करो तो चलनकलन से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left[\frac{\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{१-\text{त}}}{१-\text{त}}\right] = \frac{१}{\text{य}\,\text{ला}(\text{य})\,\text{ला}^{२}(\text{य})\cdots\text{ला}^{\text{द}}(\text{य})\,\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{\text{त}}}$$

ताय

इस लिये यदि $\text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \frac{}{\text{य}\,\text{ला}(\text{य})\,\text{ला}^{२}(\text{य})\,\text{ला}^{३}(\text{य})\cdots\text{ला}^{\text{द}}(\text{य})\,\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{\text{त}}}$

तो $\int \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \frac{\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{१-\text{त}}}{१-\text{त}}$ यदि त रूप के तुल्य न हो और यदि त रूप के तुल्य हो तो $\int \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \text{ला}^{\text{द}+२}(\text{य})$ होगा।

और $\int_{\text{अ}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = -\frac{\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{अ})\}^{१-\text{त}}}{१-\text{त}}$ यदि त > १ और यदि त = १ वा

त < १ तो $\int_{\text{अ}}^{\infty} \text{फ}(\text{य})\,\text{ताय} = \infty$ इस लिये (४७) वें प्रक्रम से

$\text{फ}(\text{य}) = \frac{१}{\text{य}\,\text{ला}(\text{य})\,\text{ला}^{२}(\text{य})\cdots\text{ला}^{\text{द}}(\text{य})\,\{\text{ला}^{\text{द}+१}(\text{य})\}^{\text{त}}}$ इस में य के स्थान में अ, अ + १, अ + २, इत्यादि का उत्थापन देने से जो श्रेढ़ी होगी वह सान्त

होगी अर्थात् उसके उत्तरोत्तर पास के दो पदो का सम्बन्ध एक से अल्प हो जायगा। चाहे पद की संख्या कितनी ही हो।

४९। कल्पना करो कि जिस में अनन्त पद हैं वैसी एक

$$\frac{१}{फा(न)} + \frac{१}{फा(न+१)} + \frac{१}{फा(न+२)} + \frac{१}{फा(न+३)} + \cdots$$ यह श्रेढ़ी है जिस

किसी एक पद का मान $\frac{१}{फा(य)}$ ऐसा समझो। अव यहाँ इस वात का पता लगाना है कि इस श्रेढ़ी का मान सान्त होगा वा अनन्त। यदि श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा तव तो स्पष्ट ही है कि ज्यो ज्यो य वढ़ता जायगा त्यो त्यो $\frac{१}{फा(य)}$ भी वढ़ता जायगा। इस लिये यदि श्रेढ़ी का मान सान्त होगा तो निश्चय है कि ज्यों ज्यो य वढ़ता जायगा त्यो त्यो फा(य) भी वढ़ता जायगा।

कल्पना करो कि न से आगे अनन्त तक चाहे जितना य वढ़ता जाय परन्तु $\frac{१}{फा(य)}$ इस का मान सर्वदा $\frac{ग}{य^{त}}$ इस से छोटा है जहां ग और त कोई स्थिर संख्या और त $>$ १ है। ऐसी स्थिति मे ४७ वे प्रक्रम से स्पष्ट है कि उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान $\frac{ग}{न^{त}} + \frac{ग}{(न+१)^{त}} + \frac{ग}{(न+२)^{त}} + \cdot$ इस श्रेढ़ी से अल्प होगा इस लिये स्वयं भी सान्त होगा।

यदि $\frac{१}{फा(य)} < \frac{ग}{य^{त}}$ $\quad$ $य^{त} < ग\ फा(य)$

और त ला (य) $<$ ला $\{ गफा(य) \}$ लघुरिक्थ लेने से

इस लिये त $< \frac{ला \{ गफा(य) \}}{लाय}$ इस मे यदि य $= \infty$ तो हर और अंश दोनो अनन्त होते है इस लिये चलनकलन के ५वे अध्याय से

$\frac{ला \{ गफा(य) \}}{लाय}$ इस का मान $\frac{यफा'(य)}{फा(य)}$ यह होगा। इस लिये इस में य के स्थान मे अनन्त का उत्थापन देने से इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक से अधिक हो तो त का ऐसा मान मान सकते है जो कि एक से अधिक अर्थात् सर्वदा $य^{त} < ग\ फा(य)$ हो। और इसी तरह यदि लुप्तभिन्न का मान एक से न्यून हो तो त का मान ऐसा छोटा मान सकते है जिस में सर्वदा $य^{त} > ग\ फा(य)$ हो ऐसी स्थिति में श्रेढी का मान अनन्त होगा।

इस पर से यह सिद्ध होता है कि किसी श्रेढी मे यदि य के स्थान में अनन्त का उत्थापन देने से $\frac{यफा'(य)}{(फाय)}$ इस का मान एक से अधिक हो तो श्रेढ़ी का मान सान्त और अल्प हो तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

परन्तु यदि $\frac{यफा'(य)}{फा(य)}$ इस का मान एक के बराबर हो तो (४८)वें प्रक्रम से

$\int फ(य) ताय = \frac{गय^{१-त}}{१-त}$ इस लिये $\int_{न}^{\infty} फ(य)\ ताय = \infty$ ऐसी स्थिति

मे अब यह नही कह सकते कि उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान सान्त होगा वा अनन्त।

अब मानो कि न से लेकर अनन्त तक य के मान में $\frac{१}{फा(य)}$ यह $\frac{ग}{य\{लाय\}^{त}}$ इससे छोटा रहता है जहां ग और त स्थिराङ्क और त > १ तो ४८वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि श्रेढ़ी का मान सान्त होगा। परन्तु

$\frac{१}{फा(य)} < \frac{ग}{य(लाय)^{त}}$ ∴ $\{ला(य)\}^{त} < \frac{गफा(य)}{य}$ लघुरिक्थ लेने से

$त\ ला^{२}(य) < ला\frac{गफा(य)}{य}$ ∴ $त < \frac{ला\frac{गफा(य)}{य}}{ला^{२}(य)} = \frac{लागफा(य) - ला(य)}{ला^{२}(य)}$

यहां भी य के अनन्त मान में यह लुप्तभिन्न हुआ जिस का मान चलनकलन के ३६वे प्रक्रम से $ला(य)\left\{\frac{य फा'(य)}{(फाय)} - १\right\}$ यह होगा

इस लिये इस का मान यदि एक से अधिक हो तो श्रेढ़ी का मान सान्त और एक से न्यून मे अनन्त होगा।

इस लुप्तभिन्न का मान यदि एक के बराबर हो तो फिर पहले के ऐसा अनिश्चय होगा। तब $\frac{१}{फा(य)}$ इस का मान $\frac{ग}{यला(य)\{ला^{२}(य)\}^{त}}$ इस से छोटा कल्पना कर पहले ऐसी क्रिया करो तो लुप्तभिन्न का मान

$ला^{२}(य)\left[ला(य)\left\{\frac{यफा'(य)}{फा(य)} - १\right\}\right]$ ऐसा होगा

इस मे यदि $\frac{यफा'(य)}{फा(य)} ता_{०}$, $ला(य)\left\{\frac{यफा'(य)}{फा(य)} - १\right\} = ता_{१}$,

$\text{ला}^{२}(\text{य})\ [\text{ला}(\text{य})\ \{\frac{\text{यफा}'(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} - १\}] = \text{ता}_{२}$ इत्यादि मानो तो

साधारण यह क्रिया उत्पन्न होती है

$\text{ता}_{१} = \text{ला}(\text{य})(\text{ता}_{०} - १),\ \text{ता}_{२} = \text{ला}^{२}(\text{य})(\text{ता}_{१} - १),\ \text{ता}_{३} = \text{ला}^{३}(\text{य})(\text{ता}_{२} - १)$

$\text{ता}_{\text{म}} = \text{ला}^{\text{म}}(\text{य})\ \{\text{ता}_{\text{म}-१} - १\}$ । इस लिये इस सिद्धान्त पर से $\text{ता}_{०}$, $\text{ता}_{१}$, $\text{ता}_{२}$ इत्यादि के मान बनाते चले जावो जिस का मान एक से भिन्न हो उस पर से उद्दिष्ट श्रेढ़ी का मान सान्त वा अनन्त है इस का विचार कर सकते हो ।

यदि $\frac{१}{\text{फा}(\text{य})} = \text{फि}(\text{य})$ तो $\text{फा}(\text{य}) = \frac{१}{\text{फि}(\text{य})}$ इस का उत्थापन $\text{ता}_{०}$ मे देने से

$\text{ता}_{०} = \frac{\text{यफा}'(\text{य})}{\text{फा}(\text{य})} = -\frac{\text{यफि}'(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$ ऐसा होगा फिर आगे $\text{ता}_{१}$, $\text{ता}_{२}$ इत्यादि का मान पूर्ववत् जान सकते हो ।

चलनकलन से— $\frac{\text{यफि}'(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})} = \text{य}\left\{\frac{\text{फि}(\text{य})}{\text{फि}(\text{य}+१)} - १\right\}$ यह भी सिद्ध कर सकते हो जब $\text{य} = \infty$ क्योंकि ऐसी दशा मे $\frac{\text{फि}'(\text{य}+\text{प})}{\text{फि}(\text{य}+१)} = \frac{\text{फि}'(\text{य})}{\text{फि}(\text{य})}$ जहां $\text{प} \angle १$ ।

इस प्रकार से श्रेढी का मान सान्त वा अनन्त होगा यह सब डिमार्गन (Demorgan) साहब ने अपने चलनकलन और चलराशिकलन (Differential and Integral Calculus) के २०८—२१० पृ० मे लिखा है । इस मे यह कुछ नियम नही कि लुप्तभिन्न ही के प्रकार से मान ले आवो चाहिये कि जिस प्रकार से लाघव हो वह क्रिया करो ।

जैसे जिस श्रेढ़ी का न संख्यक पद $\left(\frac{१}{\text{न}}\right)^{\text{अ}+\frac{\text{क}}{\text{न}}}$ यह है उस का मान कैसा होगा यह जानना है यहां

$$\left(\frac{१}{\text{य}}\right)^{\text{अ}+\frac{\text{क}}{\text{य}}} = \frac{१}{\frac{१}{\left(\frac{१}{\text{य}}\right)^{\text{अ}+\frac{\text{क}}{\text{य}}}}} = \frac{१}{\text{फा}(\text{य})},\quad \text{यदि } \text{फि}(\text{य}) = \left(\frac{१}{\text{य}}\right)^{\text{अ}+\frac{\text{क}}{\text{य}}}$$

इस लिये लघुरिक्थ लेने से

$$\text{ला}\ \{\text{फि}(\text{य})\} = \left(\text{अ}+\frac{\text{क}}{\text{य}}\right)\text{ला}\left(\frac{१}{\text{य}}\right) = -\left(\text{अ}+\frac{\text{क}}{\text{य}}\right)\text{ला}\ (\text{य})$$

तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{फि'(य)}{फि(य)} = -\left[\frac{अ}{य} + \frac{क}{य^{२}}\right] + \frac{कलाय}{य^{२}}$$

इस लिये

$$ता_{०} = -\frac{यफि'(य)}{फि(य)} = \left(अ + \frac{क}{य}\right) - \frac{कलाय}{य}$$ इस में यदि $य = \infty$ तो

$\frac{क}{य} = ०$, और $\frac{कलाय}{य} = क\frac{१}{य} = ०$ लुप्तभिन्न के आनयन से।

इस लिये $ता_{०} = अ$। इस लिये यदि $अ > १$ तो श्रेढ़ी का मान सान्त और यदि $अ < १$ तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

५०। कल्पना करो कि

$$फा(ल) = फ(य-ल) + लफ'(य-ल) + \frac{ल^{२}}{\lfloor २}फ''(य-ल) + \cdots + \frac{ल^{न}}{\lfloor न}फ^{न}(य-ल), \cdots (१)$$

ल के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$फा'(ल) = फ'(य-ल) + फ'(य-ल) - लफ''(य-ल) + लफ''(य-ल) - \frac{ल^{२}}{\lfloor २}फ'''(य-ल)$$

$$\cdots\cdots + \frac{ल^{न-१}}{\lfloor न-१}फ^{न}(य-ल) - \frac{ल^{न}}{\lfloor न}फ^{न+१}(य-ल)$$

$$= -\frac{ल^{न}}{\lfloor न}फ^{न+१}(य-ल)$$

ल के ० और च के बीच मान में दोनो के सान्त चल मान

$$फा(च) - फा(०) = -\frac{१}{\lfloor न}\int_{०}^{च} ल^{न}फ^{न+१}(य-ल)ताल$$

परन्तु (१) मे ल के स्थान मे ० और च का उत्थापन देने से

$$फा(च) - फा(०) = फ(य-च) + चफ'(य-च) + \frac{च^{२}}{\lfloor २}फ''(य-च) + \cdots$$

$$+ \frac{च^{न}}{\lfloor न}फ^{न}(य-च) - फ(य)$$

$$= -\frac{१}{\lfloor न}\int_{०}^{च} ल^{न}फ^{न+१}(य-ल)ताल$$

य के स्थान में $अ + च$ का उत्थापन देकर पक्षान्तरानयन से

$$फ(अ+च) = फ(अ) + चफ'(अ) + \frac{च^{२}}{\lfloor २}फ''(अ) + \cdots + \frac{च^{न}}{\lfloor न}फ^{न}(अ)$$

$+\frac{१}{\underline{|न}}\int_{०}^{च} ल^{न} फ^{न+१}(य-ल) ताल$

इस लिये फ(अ+च) इस का चलनकलन मे टेलर के सिद्धान्त से जो श्रेढी मे मान आवेगा उस मे न पद के अनन्तर न+१, न+२, इत्यादि जो पद होगे उनका योग $\frac{१}{\underline{|न}}\int_{०}^{च} ल^{न} फ^{न+१}(य-ल) ताल$ इस सान्तचल के तुल्य होगा जिस का मान (४०) वे प्रक्रम से $\frac{१}{\underline{|न}} प^{न} च^{न+१} फ^{न+१}(अ+च-पच)$ ऐसा था,

$$\frac{१}{\underline{|न}} फ^{न+१}(अ+च-पच)\int_{०}^{च} ल^{न} ताल = \frac{१}{\underline{|न}} फ^{न+१}\{अ+च(१-प)\}\int_{०}^{च} ल^{न} ताल$$

$=\frac{१}{\underline{|न}} फ^{न+१}(अ+चप_{१})\int_{०}^{च} ल^{न} ताल$ ऐसा होगा। [जहां $प_{१} = १ - प =$ कोई एक से न्यून संख्या है] $= \frac{च^{न+१}}{\underline{|न+१}} फ^{न+१}(अ+चप_{१})$ ऐसा होगा

५१ । जब चलनकलन से सिद्ध है कि फल का वा फल मे स्थिराङ्क युत वा रहित का तात्कालिक सम्बन्ध एक ही होता है इस लिये एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का यदि कई एक प्रकार से चलानयन करो तो स्पष्ट है कि वे सब तुल्य होगे वा उनका अन्तर कोई स्थिराङ्क के तुल्य होगा ।

जैसे $\int \frac{ताय}{(१-य)^{२}} = \int ताय\,(१-य)^{-२} = -\int -ताय\,(१-य)^{-२} = \frac{१}{१-य}$

यह प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से सिद्ध हुआ । और इसी में यदि

$य = \frac{१}{र}$ ऐसा मानो तो $ताय = -\frac{तार}{र^{२}}$ और $(१-य)^{२} = (\frac{र-१}{र})^{२}$ इस लिये

$$\int \frac{ताय}{(१-य)^{२}} = -\int \frac{तार}{(र-१)^{२}} = \frac{१}{र-१} = \frac{य}{१-य}$$ प्रथमाध्याय के तीसरे

सूत्र से। इस लिये दोनो का अन्तर $= \frac{य}{१-य} \sim \frac{१}{१-य} = १ =$ स्थिराङ्क के हुआ। ऐसे ही सब जगह जानना चाहिये ।

इसी जगह यदि $\int_{०}^{२} \frac{ताय}{(१-य)^{२}}$ इस का मान जानना हो तो स्पष्ट है कि दोनों पर से एक ही आवेगा क्योंकि $\int फ(य) ताय = फा(य)$ वा, $\int फ(य) ताय = फा(य) + स्थि$ ऐसा मानो तो पहले से $\int_{अ}^{क} फ(य) ताय = फा(क) - फा(अ)$

और दूसरे मान से भी $\text{फा}(\text{क})+\text{स्थि}-\{\text{फा}(\text{अ})+\text{स्थि}\} = \text{फा}(\text{क})-\text{फा}(\text{अ})$ वही हुआ ।

एक ही तात्कालिक सम्बन्ध का भिन्न भिन्न रूप में चलानयन कर और उन पर से दो सीमाओ के भीतर दो सान्त चलानयन कर अनेक चमत्कृत समता उत्पन्न कर सकते हो । जैसे खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int \text{य}^{\text{म}}(१-\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}(१-\text{य})^{\text{न}}}{\text{म}+१} + \frac{\text{न}}{\text{म}+१}\int \text{य}^{\text{म}+१}(१-\text{य})^{\text{न}-१}\text{ताय}$$

इस लिये $\int_०^१ \text{य}^{\text{म}}(१-\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{न}}{\text{म}+१}\int_०^१ \text{य}^{\text{म}+१}(१-\text{य})^{\text{न}-१}\text{ताय}$

वार वार यही क्रिया करने से

$$\int_०^१ \text{य}^{\text{म}}(१-\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)\cdots\cdot १}{(\text{म}+१)(\text{म}+२)\cdots(\text{म}+\text{न}+१)} \quad (१)$$

और द्वियुक्पदसिद्धान्त से

$$\text{य}^{\text{म}}(१-\text{य})^{\text{न}} = \text{य}^{\text{म}}\left\{१-\text{नय}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\underline{|२}}\text{य}^२-\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\underline{|३}}\text{य}^३+\cdots\right\}$$

$$=\text{य}^{\text{म}}-\text{नय}^{\text{म}+१}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\underline{|२}}\text{य}^{\text{म}+२}-\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\underline{|३}}\text{य}^{\text{म}+३}+\cdots$$

इस लिये प्रथमाध्याय के (३) सूत्र से

$$\int \text{य}^{\text{म}}(१-\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{\text{य}^{\text{म}+१}}{\text{म}+१}-\frac{\text{न}}{\text{म}+२}\text{य}^{\text{म}+२}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\underline{|२}(\text{म}+३)}\text{य}^{\text{म}+३}$$
$$-\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\underline{|३}(\text{म}+४)}\text{य}^{\text{म}+४}+\cdots$$

और $\int_०^१ \text{य}^{\text{म}}(१-\text{य})^{\text{न}}\text{ताय} = \frac{१}{\text{म}+१}-\frac{\text{न}}{१}\frac{१}{\text{म}+२}+\frac{\text{न}(\text{न}-१)}{\underline{|\ }}\frac{१}{\text{म}+३}$

$$-\frac{\text{न}(\text{न}-१)(\text{न}-२)}{\underline{|३}}\frac{१}{\text{म}+४}+\cdot+(-१)\frac{\text{न}_१}{\text{म}+\text{न}+१}\cdots(२)$$

इस लिये यहाँ ऊपर की युक्ति से निश्चय है कि (१) और (२) का दहिना पक्ष परस्पर तुल्य है ।

५२ । खण्ड चलानयन से सिद्ध है कि

$$\int \text{फ}(\text{य})\text{ताय} = \text{यफ}(\text{य}) - \int \text{यफ}'(\text{य})\,\text{ताय}$$

$$\int \text{यफ}'(\text{य})\,\text{ताय} = \frac{\text{य}^२}{२}\text{फ}'(\text{य}) - \frac{१}{२}\int \text{य}^२\text{फ}''(\text{य})\text{ताय}$$

$$\int य^2 फ''(य)\, ताय = \frac{य^3}{3} फ''(य) - \frac{1}{3}\int य^3 फ'''(य) ताय$$

. . . .

इन सब का एक एक मे उत्थापन देने से

$$\int फ(य) ताय = यफ(य) - \frac{य^2}{\underline{|२}} फ'(य) + \frac{य^3}{\underline{|३}} फ''(य) - \frac{य^4}{\underline{|४}} फ'''(य) + \cdots$$

$$+ \frac{(-१)^{न-१}}{\underline{|न}} य^न फ^{न-१}(य) + \frac{(-१)^न}{\underline{|न}} \int य^न फ^न(य) ताय$$

इस लिये

$$\int_0^अ फ(य) ताय = अफ(अ) - \frac{अ^2}{\underline{|२}} फ'(अ) + \frac{अ^3}{\underline{|३}} फ''(अ) - \frac{अ^4}{\underline{|४}} फ(अ) + \cdots$$

$$+ \frac{(-१)^{न-१} अ^न}{\underline{|न}} फ^{न-१}(अ) + \frac{(-१)^न}{\underline{|न}} \int_0^अ य^न फ^न(य) ताय$$

इस प्रकार से सान्तचल ज्ञान के लिये यह जो श्रेढ़ी उत्पन्न हुई है उसे वर्नली (Bernoulli) साहव ने निकाला है इस लिये उन के आदरार्थ इस को वर्नली की श्रेढ़ी (Bernoulli's Series) कहते है।

यह जहाॅ फ(य) का रूप $य^{न-१}$ इस तरह का हो वहां पर वड़े काम की है क्योकि ऐसी जगह पर

$फ^न(य) = \frac{ता^न(य^{न-१})}{ताय^न}$ यह शून्य के तुल्य होगा। अथवा जहां पर $\int$ फ(य) ताय इसकी अपेक्षा $\int य^न फ^न(य)$ताय इस का मान सहज में निकलता हो वहां पर भी यह वड़े काम की है।

जहापर $\int_0^अ य^न फ^न(य)$ ताय इसका मान वहुत थोड़ा हो वहां पर भी स्वल्पान्तर से $\int_0^अ$ फ(य)ताय इसके आसन्न मान का ज्ञान इस से सहज में हो सकता है।

५३। जव कि सिद्ध है कि $\int$फ(य)ताय यह य के उस फल को वताता है जिसका तात्कालिक सम्वन्ध फ(य) है तव स्पष्ट है कि एक फल ऐसा भी होगा जिसका तत्कालिक सम्वन्ध $\int$ फ(य)ताय यह हो अर्थात् यदि $\int$ फ(य)ताय = फा(य) मानो तो $\int$ फा(य)ताय यह भी एक मान जान सकते हो जिसका तात्कालिक सम्वन्ध फा(य) के समान होगा। ऐसे ही वार वार चलजान कर सकते हो।

इसको $\int$ फ(य)ताय = फा(य)। $\int$ फा(य)ताय = $\int\int$ फ(य)ताय ताय = फ(य)।
$\int$ फि(य)ताय = $\int\int$ फा(य)ताय ताय = $\int\int\int$ फ(य) ताय ताय ताय इस तरह से लिखते हैं। $\int\int\int$ फ(य)ताय ताय ताय यह प्रकाश करता है कि $\int$ फ(य)ताय इसके मान को ताय से गुणने से जो हो उसके चल मान को फिर ताय से गुणकर गुणित फल का चल है।

जैसे $\int$ ताय = य + $ग_1$

$$\int (य + ग_1)ताय = \int\int ताय\ ताय = \frac{य^2}{२} + ग_1य + ग_2$$

$$\int\left(\frac{य^2}{२} + ग_1य + ग_2\right) = \int\int (य + ग_1)ताय\ ताय = \int\int\int ताय\,ताय\,ताय$$

$= \frac{य^3}{६} + \frac{ग_1}{२}य^2 + ग_2य + ग_3$ जहां $ग_1, ग_2$ इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

इसी तरह यहां न वार चलज्ञान करे तो स्पष्ट है कि उस का मान $आ_0य^न + आ_1य^{न-१} + आ_2य^{न-२} + \cdots + आ_न$ ऐसा होगा जहां $आ_0$, $आ_न$, इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

५४। यदि $\int$ च ताय = $च_1$, $\int च_1$ताय = $च_2$, $\int च_2$ताय = $च_3$ इत्यादि मानो जहां च, $च_1$, इत्यादि य के फल हैं और $\frac{ताज}{ताय} = ज_1, \frac{ता^2ज}{ताय^2} = ज_2$, इत्यादि जहां ज य का कोई फल है तो खण्डचलानयन से

$\int$ चज ताय = $च_1ज - \int च_1ज_1$ ताय = $च_1ज_1 - च_2ज_1 + \int च_2ज_2$ ताय
$= च_1ज - च_2ज_1 + च_3ज_2 - च_4ज_3 + \cdots + (-१)^{न-१}च_नज_{न-१}$
$+ (-१)^न \int च_नज_न$ताय इसी श्रेढ़ी में यदि च = १ और ज = फ(य) मानो तो वर्नली की श्रेढ़ी उत्पन्न हो जायगी इस लिये इस श्रेढ़ी को वर्नली के श्रेढ़ी का मूल कह सकते हैं। यह श्रेढ़ी भी बहुत स्थानों मे वड़े काम की है।

जैसे इस श्रेढ़ी मे यदि च = $इ^य$ मानो तो स्पष्ट है कि $च_1$, $च_2$ इत्यादि सब परस्पर तुल्य होंगे इस लिये

$\int इ^य$ज ताय = $इ^य\{ज - ज_1 + ज_2 - ज_3 + \cdots (-१)^{न-१}ज_{न-१}\}$
$+ (-१)^न \int इ^यज_न$ ताय

इस में ज के स्थान मे भिन्न भिन्न फल का उत्थापन देने से हजारो उदाहरण वना सकते हो।

५५। यदि $च_1 = \int च\, ताय$, $च_2 = \int च_1\, ताय$, $च_3 = \int च_2\, ताय$ इत्यादि मानो तो खण्डचलानयन से

$$च_2 = \int च_1 ताय = यच_1 - \int य \frac{ताच_1}{ताय} ताय = य\int च\ ताय - \int य\, च\, ताय$$

$$च_3 = \int च_2 ताय = \int \{ य \int च\ ताय - \int यच\ ताय \} ताय$$

यहां भी खण्डचलानयन से

$$च_3 = \frac{य^2}{2}\int च\ ताय - \int \frac{य^2}{2} च\ ताय - य \int यच\ ताय + \int य^2 च\ ताय$$

$$= \frac{य^2}{2}\int च\ ताय - य\int यच\ ताय + \frac{1}{2}\int य^2 च\ ताय$$

इसी प्रकार से वार वार करते जाओ तो अन्त में

$$च_{न+1} \underline{|न} = य^न \int चताय - नय^{न-1}\int यचताय + \int \frac{न(न-1)}{\underline{|2}} य^{न-2}\int य^2 चताय \cdot$$

$$+ (-1)^द \frac{न(न-1)(न-2) \qquad (न-द+1)}{\underline{|द}} य^{न-द}\int य^द च\ ताय$$

$$+ (-1)^न \int य^न च\ ताय$$

यह एक सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा ।

इस की सत्यता के लिये मानो कि किसी न के मान मे यह सिद्धान्त सत्य है तो $च_{न+2} = \int च_{न+1} ताय$ और $\underline{|न}\ च_{न+2} = \int \underline{|न}\ च_{न+1}\ ताय$

$$= \int \{ य^न ताय \int च\ ताय \} - \int \{ नय^{न-1} ताय \int यच\ ताय \}$$

$$+ \int \left\{ \frac{न(न-1)}{\underline{|2}} य^{न-2}\, ताय \int य^2 च\ ताय \right\} \cdot$$ प्रत्येक { } अन्तर्गत का खण्डचलानयन से मान ले आने से

$$\underline{|न}\, च_{न+2} = \frac{य^{न+1}}{न+1}\int चताय - \frac{1}{न+1}\int य^{न+1} चताय - य^न \int यचताय + \int य^{न+1} चताय$$

$$+ \frac{न}{\underline{|2}} य^{न-1}\int य^2 चताय - \frac{न}{\underline{|2}}\int य^{न+1} चताय +$$

न + १ से दोनों पक्षों को गुणकर दहिने पक्ष को यथा क्रम लिखने से

$$च_{न+2} \underline{|न+1} = य^{न+1}\int चताय - (न+1) य^न \int यचताय$$

$$+ \frac{न(न+1)}{\underline{|2}} य^{न-1} \int य^2 च ताय -$$

$$वा,\ च_{म+1} \underline{|म} = य^म \int चताय - मय^{म-1}\int यचताय$$

$$+\frac{म(म-१)}{\lfloor २}य^{म-२}\int य^{२}चताय—$$

इस लिये यदि यह सिद्धान्त किसी न मान में सत्य हो तो न+१ में भी सत्य होगा परन्तु यदि न=२ तो $च_{३}$ के मान से स्पष्ट है कि यह सिद्धान्त सत्य है इसलिये न के सब मान मे यह सिद्धान्त सत्य ठहरा।

५६। $\int ज्या^{न}यताय$ वा $\int कोज्या^{न}यताय$ के मान के लिये यदि चलन-कलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से $ज्या^{न}य$ वा $कोज्या^{न}य$ का रूप ज्या और कोटिज्या की श्रेढ़ी में ले आवो तो वहुत ही सुगमता चलानयन मे होगी। जैसे चलनकलन के ३०० प्रक्रम की युक्ति से सिद्ध है कि

$८ ज्या^{४}य = कोज्या४य—४कोज्या२य + ३$

इस लिये

$$८\int ज्या^{४}यताय = \int कोज्या४यताय—४\int कोज्या२यताय + \int ३ताय$$

$$=\frac{ज्या४य}{४}—२ ज्या२य+३य$$

$$\therefore \int ज्या^{४}यताय = \frac{ज्या४य}{३२}-\frac{ज्या२य}{४}+\frac{३य}{८}$$ यह पहले लघूकरणसिद्धान्त की अपेक्षा बड़े लाघव से सिद्ध हुआ।

इस प्रकार और भी वहुत उपाय से जिस मे सुगमता हो वैसी क्रिया करनी चाहिये।

५७। इस प्रक्रम में विद्यार्थियों को जिस मे बोध हो इस लिये कुछ उदाहरण क्रिया समेत दिखाते हैं।

(१) $\left(\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{३}{२न}\right)^{त}+\cdot\cdot$ २ न पद तक जो यह श्रेढ़ी है

इस में $\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{२}{२न}\right)^{त}+\cdot$ न पद तक जो यह श्रेढ़ी है इसका भाग देने से क्या लब्धि होगी यदि न = ∞।

यहां प्रश्नानुसार न के अनन्त मान मे

$$\frac{\left(\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{३}{२न}\right)^{त}+\quad २\ न\ पद\ तक}{\left(\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{२}{२न}\right)^{त}+\left(\frac{१}{२}+\frac{३}{२न}\right)^{त}+\quad न\ पद\ तक}$$ इसका मान जानना है

अंश और हर को $\frac{१}{२न}$ से गुण देने से

$$\text{अंश} = \frac{१}{२न}\left\{\left(\frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{२}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{३}{२न}\right) + \quad २\,\text{न पद तक}\right\}$$

$$\text{हर} = \frac{१}{२न}\left\{\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{१}{२} + \frac{२}{२न}\right)^{त} + \left(\frac{१}{२} + \frac{३}{२न}\right)^{त} + \quad \text{न पद तक}\right\}$$

४०वे प्रक्रम के समीकरण के साथ अंश और हर दोनो की तुलना करो तो अंश मे $\frac{१}{२न} = च$, $अ = ०$, $क = ० + २नच = १$ और $फ(य) = (य)^{त}$

$$\text{इस लिये अंश का मान} = \int_{०}^{१} फ(य)ताय = \int_{०}^{१} य^{त}ताय = \frac{१}{त+१}$$

और हर मे पहला पद $फ(अ) = \left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२न}\right)^{त}$ ∵ $अ = \frac{१}{२} + \frac{१}{२न}$

और $\frac{१}{२न} = च$　$क - अ = चन = \frac{१}{२}$ और $क = \frac{१}{२} + अ = १ + \frac{१}{२न}$

$$\text{और } फ(य) = (य)^{त} \text{ इस लिये } \int फ(य)ताय = \int (य)^{त}ताय = \frac{(य)^{त+१}}{त+१}$$

$$\text{इस लिये हर} = \int_{\frac{१}{२}+\frac{१}{२न}}^{१+\frac{१}{२न}} फ(य)ताय = \frac{\left(१ + \frac{१}{२न}\right)^{त+१}}{त+१} - \frac{\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{२न}\right)^{त+१}}{त+१}$$

$$= \frac{१ - \left(\frac{१}{२}\right)^{त+१}}{त+१} \quad \text{यदि } न = \infty$$

$$\text{इस लिये ऊपर के भिन्न का मान} = \frac{अं}{ह} = \frac{\frac{१}{त+१}}{\frac{१-\left(\frac{१}{२}\right)^{त+१}}{त+१}} = \frac{१}{१-\left(\frac{१}{२}\right)^{त+१}}$$

यही उत्तर हुआ।

(२) सिद्ध करो कि यदि $फ(य) = फ(अ + य)$ तो

$$\int_{०}^{मअ} फ(य)ताय = म\int_{०}^{अ} फ(य)ताय$$

यहाँ $\int_{०}^{मअ} फ(य)ताय$ इसका मान यदि २ प्रक्रम से श्रेढ़ी में लावो तो

$$\frac{मअ}{न}\left\{फ(०) + फ\left(\frac{मअ}{न}\right) + फ\left(\frac{२मअ}{न}\right) + \quad फ\left[\frac{मअ(न-१)}{न}\right]\right\} \text{ ऐसा होगा}. \qquad (१)$$

परन्तु प्रश्न से $फ(य) = फ(अ + य)$　$फ(०) = फ(अ)$, $फ\left(\frac{मअ}{न}\right) = फ\left(अ + \left(\frac{मअ}{न}\right)\right)$, इत्यादि। इनका उत्थापन देने से (१) का मान

$$\frac{मअ}{न}\left\{(अ) + फ\left(अ + \frac{मअ}{न}\right) + फ\left(अ + २\frac{मअ}{न}\right) + \quad फ\left[अ + \frac{मअ(न-१)}{न}\right]\right\}$$

$= \int$　फ(य)ताय यह हुआ।

इसी रीति से फ(य) पर से

$$\int_{अ}^{\grave{म}अ + अ} फ(य)ताय = \frac{\grave{म}अ}{न}\left\{फ(अ) + फ(अ + \frac{\grave{म}अ}{न}) + फ(अ + \frac{२\grave{म}अ}{न}) + \cdots\right.$$

$$\left. + फ[अ + \frac{\grave{म}अ(न-१)}{न}]\right\} \cdots (२)$$

यहाँ भी जब फ(य) = फ(य + अ) ∵ फ(अ) = फ(२अ),

$फ(अ + \frac{\grave{म}अ}{न}) = फ(२अ + \frac{\grave{म}अ}{न})$, इ० इन का उत्थापन (२) में देने से (२) का मान

$$\frac{\grave{म}अ}{न}\left\{फ(२अ) + फ(२अ + \frac{\grave{म}अ}{न}) + \cdots + फ[२अ + \frac{\grave{म}अ(न-१)}{न}]\right\}$$

$$= \int_{२अ}^{\grave{म}अ + २अ} फ(य) ताय$$ यह हुआ

इस पर से सिद्ध हुआ कि

$$\int_{0}^{\grave{म}अ} फ(य) ताय = \int_{अ}^{\grave{म}अ + अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{मअ + २अ} फ(य)ताय$$ इत्यादि ।

$\grave{म}$ के एक स्थान में १, का उत्थापन देने से

$$\int_{0}^{अ} फ(य)ताय = \int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{३अ} फ(य) = \cdots = \int_{अ(म-१)}^{मअ} फ(य)ताय (३)$$

अब ४१ वे प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{0}^{मअ} फ(य)ताय = \int_{0}^{अ} फ(य)ताय + \int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय$$

$$+ \int_{२अ}^{३अ} फ(य)ताय + \cdot \int_{(म-१)अ}^{मअ} फ(य)ताय = म\int_{0}^{अ} फ(य)ताय$$

(३) से सिद्ध हुआ ।

अथवा जब फ(य) = फ(अ + य) इस लिये फ(०) = फ(अ) और फ(अ) = फ(२अ)

इस लिये य के ० और अ के वीच मानो में जो $\int_{0}^{अ} फ(य)$ ताय इस का मान होगा वही य के औ २ अर अ के वीच मानों मे भी

$\int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय$ इस का मान होगा यों आगे भी सिद्ध कर सकते हो कि

$\int_{अ}^{२अ} फ(य)ताय = \int_{२अ}^{३अ} फ(य)ताय$, इत्यादि । इस पर से ४१वें प्रक्रम के

(२) समीकरण से पहले के ऐसा उत्तर निकाल सकते हो।

(३) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ ला ज्याय ताय इस का मान क्या होगा?

यहाँ ४१ वे प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{लाज्यायताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ला}(\tfrac{\pi}{2}-\text{य})\,\text{ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ला कोज्याय ताय}$$

$$\text{२}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{लाज्यायताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\text{लाज्याय} + \text{लाकोज्याय})\,\text{ताय} = \text{२र}$$

यदि $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ला ज्याय ताय} = \text{र}$,

$$\text{वा २र} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ला (ज्यायकोज्याय)ताय} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\{\text{लाज्या२य} - \text{ला२}\}\,\text{ताय}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ला ज्या२यताय} - \tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला२}$$

२य के स्थान मे यं का उत्थापन देने से सिद्ध कर सकते हो

$$\text{कि}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{लाज्या२यताय} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\text{ला ज्यायंतायं} = \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ला ज्याय ताय}$$

४१वे प्रक्रम के (६) समीकरण से

इस लिये $\text{२र} = \text{र} - \tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला२}$ $\quad$ $\text{र} = -\tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला २} = \tfrac{1}{2}\pi\,\text{ला}\tfrac{1}{2}$

(४) $\int_0^{\pi}\frac{\text{यज्यायताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}}$ इस का क्या मान होगा।

इस का मान र_1 मान कर ४१वे प्रक्रम के (५)वे समीकरण से

$$\text{र}_1 = \int_0^{\pi}\frac{\text{यज्याय ताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{\text{यज्यायताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}} + \frac{(\pi - \text{य})\text{ज्यायताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}}\right\}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\text{यज्यायताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}} - \frac{\text{यज्यायताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}} + \frac{\pi\,\text{तायज्याय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}}\right]$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\pi\,\text{ज्याय ताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}} = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{ज्याय ताय}}{\text{१} + \text{कोज्या}^2\text{य}}$$

$$= -\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\text{तार}}{\text{१} + \text{र}^2}\ (\text{यदि र} = \text{कोज्याय})$$

परन्तु $\int \frac{\text{तार}}{१+\text{र}^२} = \text{स्प}^{-१}\text{र} = \text{स्प}^{-१}$ (कोज्याय)

इस लिये जब य = ० तो कोज्याय = १ और स्प$^{-१}$ (कोज्याय) = $\frac{\pi}{४}$

और जब य = $\frac{\pi}{२}$ तो कोज्याय = ० और स्प$^{-१}$ (कोज्याय) = ०

इस लिये $-\pi\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{तार}}{१+\text{र}^२} = -\pi(०-\frac{\pi}{४}) = \frac{\pi^२}{४}$ यह उत्तर हुआ।

(५) $\int_{०}^{१} \frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२}$ ताय इस का क्या मान होगा।

यहां यदि स्पर = य तो ताय = छे^{२}र तार = (१ + स्प^{२}र) तार

इस लिये $\frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२}\text{ताय} = \frac{\text{ला}(१+\text{स्पर})}{१+\text{स्प}^२\text{र}}(१+\text{स्प}^२\text{र})\text{तार} = \text{ला}(१+\text{स्पर})\text{तार}$

$\therefore \int_{०}^{१} \frac{\text{ला}(१+\text{य})}{१+\text{य}^२}\text{ताय} = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्पर})\text{तार} = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}\left\{१+\text{स्प}(\frac{\pi}{४}-\text{र})\right\}\text{तार}$

४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से। परन्तु स्प$(\frac{\pi}{४}-\text{र}) = \frac{१-\text{स्पर}}{१+\text{स्पर}}$

इस लिये $१+\text{स्प}(\frac{\pi}{४}-\text{र}) = \frac{२}{१+\text{स्पर}}$ और $\text{ला}\left\{१+\text{स्प}(\frac{\pi}{४}-\text{र})\right\} = \text{ला}२ - \text{ला}(१+\text{स्पर})$

इसका उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्पर})\text{तार} = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \left\{\text{ला}२\text{तार} - \text{ला}(१+\text{स्पर})\text{तार}\right\}$$

पक्षान्तरानयन से

$$२\int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्पर})\text{तार} = \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \text{तार ला}२ = \frac{\pi}{४}\text{ला}२$$

$$\therefore \int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \text{ला}(१+\text{स्पर})\text{तार} = \frac{\pi}{८}\text{ला}२।$$

यहां देखो इस प्रकार से कैसे लाघव से उत्तर निकला है।

यहां यदि ला (१ + य) का रूप $\text{य} - \frac{\text{य}^२}{२} + \frac{\text{य}^३}{३} - \frac{\text{य}^४}{४} + \cdots$ ऐसा बना कर

इस में साधारण बीजगणित की रीति से १ + य^२ का भाग दो तो

$\frac{ला(१+य)}{१+य^२} = य - \frac{य^२}{२} - \frac{२}{३} य^३ + \frac{य^४}{४} + \frac{१३}{१५} य^५ \cdots$ ऐसा होगा

इस मे य के गुणक १ को $गु_१$, और $य^२$ के गुणक $-\frac{१}{२}$ को $गु_२$ ... $य^{न-२}$ के गुणक को $गु_{न-२}$ मानो तो $य^न$ का गुणक $-(\frac{१}{न} + गु_{न-२})$ यह होगा यदि न सम हो। और विषम हो तो $(\frac{१}{न} - गु_{न-२})$ यह गुणक होगा।

यदि $\frac{ला(१+य)}{१+य^२}$ इसमे ऊपर के श्रेढ़ी का उत्थापन देकर चलमान निकालो तो

$$\int \frac{ला(१+य)ताय}{१+य^२} = \frac{य^२}{२} - \frac{१}{२}\frac{य^३}{२} - \frac{२}{३}\frac{य^४}{४} + \frac{१}{४}\frac{य^५}{५} + \frac{१३}{१५}\frac{य^६}{६}$$ ऐसा होगा

इस लिये $\int_०^१ \frac{ला(१+य)ताय}{१+य^२} = \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{२}{३}\cdot\frac{१}{४} + \frac{१}{४}\cdot\frac{१}{५} + \frac{१३}{१५}\cdot\frac{१}{६} \cdot$

इस लिये $\frac{\pi}{८}ला२ = \frac{१}{२} - \frac{१}{२}\cdot\frac{१}{३} - \frac{२}{३}\cdot\frac{१}{४} + \frac{१}{४}\cdot\frac{१}{५} + \frac{१३}{१५}\cdot\frac{१}{६} \cdots$

ऐसा यह अत्यन्त चमत्कार सिद्ध होता है।

(६) $\int_०^\pi प^न ज्याप\ ताप$ इसका मान $\int_०^\pi प^२ ज्याप\ ताप$ इस का फल होगा यह सिद्ध करो। यदि न $>$ २।

यहां ४१ वे प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_०^\pi प^न ज्याप\ ताप = \int_०^\pi (\pi - प)^न ज्याप\ ताप = \int_०^\pi \pi^न (१ - \frac{प}{\pi})^न ज्याप\ ताप$$

$$= \pi^न \int_०^\pi \left\{ १ - न\frac{प}{\pi} + \frac{न(न-१)}{२}\frac{प^२}{\pi^२} - \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}}\frac{प^३}{\pi^३} + \cdots + (-१)^न \frac{प^न}{\pi^न} \right\} ज्याप\ ताप$$

$$= \pi^न \int_०^\pi \left\{ १ - न\frac{प}{\pi} + \frac{न(न-१)}{\underline{|२}}\frac{प^२}{\pi^२} - \frac{न(न-१)(न-२)}{\underline{|३}}\frac{प^३}{\pi^३} + \cdots \right\} ज्यापताप$$

$$+ \int_०^\pi (-१)^न प^न ज्याप\ ताप$$

समशोधन से

$$\int_0^\pi प^न लाज्याष\, ताष - \int_0^\pi (-१)^न ष^न लाज्याप\, ताप$$

$$= \pi^न \int_0^\pi लाज्याष\, ताष - न\pi^{न-१} \int_0^\pi पलाज्याप\, ताप$$

$$+ \frac{न(न-१)}{\lfloor २} \pi^{न-२} \int_0^\pi प^२ लाज्याप\, ताप \cdots$$

$$+ (-१)^{न-१} \pi \int_0^\pi ष^{न-१} लाज्याप\, ताष \cdot \cdot \cdot \quad (१)$$

(१) इस में न के स्थान में २ का उत्थापन देने से

$० = \pi^२ \int_0^\pi लाज्याषताष - २\pi \int_0^\pi षज्याषताप$ ऐसा होगा

इस लिये

$$२\pi \int_0^\pi षलाज्याषताष = \pi^२ \int_0^\pi लाज्याप\, ताप$$

$$\therefore \int_0^\pi पलाज्यापताप = \frac{\pi}{२} \int_0^\pi लाज्याषताप$$

परन्तु ४१वें प्रक्रम के (६)वें समीकरण से और इस प्रक्रम के (३) उदाहरण से $\frac{\pi}{२} \int_0^\pi लाज्याषताप = \frac{\pi^२}{२} ला \frac{१}{२}$

इस लिये $\int_0^\pi षलाज्याषताष = \frac{\pi^२}{२}\ ला\ \frac{१}{२}$ यह सिद्ध हुआ।

यदि $\int_0^\pi लाज्याषताप = \pi\ ला\ \frac{१}{२} = च_१$ तो

$$\int_0^\pi षलाज्याषताप = \frac{\pi^२}{२}\ ला\ \frac{१}{२} = \frac{\pi}{२}\ च_१$$

इन का उत्थापन (१) में देने से और न के स्थान में ३ मानने से

$$२\int_0^\pi ष^३ लाज्यापताष = \pi^३ च_१ - \frac{३}{२}\, \pi^३ च_१ + ३\pi \int_0^\pi प^२ लाज्यापताष$$

इस प्रकार से वार वार उत्थापन देने से

$\int_0^\pi ष^न लाज्यापताष = फ(च_२)$ ऐसा हो जायगा जहाँ

$च_२ = \int_0^\pi ष^२ लाज्यापताय$ ।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि यदि फ(य) = फ(—य) तो

$$\int_{-\text{अ}}^{\text{अ}} \text{फ(य)ताय} = २\int_{0}^{\text{अ}} \text{फ(य)ताय}। \int_{-\text{अ}}^{0} \text{फ(य)ताय} = \int_{0}^{+\text{अ}} \text{फ(य)ताय}।$$

$$\text{और} \int_{0}^{-\text{अ}} \text{फ(य)} = -\int_{0}^{+\text{अ}} \text{फ(य)ताय}$$

२। यदि फ(य) = —फ(—य) तो सिद्ध करो कि

$$\int_{-\text{अ}}^{+\text{अ}} \text{फ(य)ताय} = ०। \int_{-\text{अ}}^{0} \text{फ(य)ताय} = -\int_{0}^{+\text{अ}} \text{फ(य) ताय}।$$

$$\text{और} \int_{0}^{-\text{अ}} \text{(फ)ताय} = \int_{0}^{+\text{अ}} \text{फ(य)}।$$

३। यदि फ(य) = फ(-य) और फा(य) = —फा(-य) तो सिद्ध करो कि

$${}_{-\text{अ}}^{+\text{अ}} \{ \text{फ(य)} + \text{फा(य)} \} \text{ताय} = \int_{-\text{अ}}^{+\text{अ}} \text{फ(य)ताय} = \int_{-\text{अ}}^{+\text{अ}} \{ \text{फ(य)} - \text{फा(य)} \} \text{ताय}।$$

४। सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \text{इ}^{-\text{य}^{२}} \text{ताय} = \sqrt{\pi} \text{ और } \int_{-\text{अ}}^{+\text{अ}} \text{ज्याय}^{७} = ०$$

५। सिद्ध करो कि

$$\int_{-\text{अ}}^{+\text{अ}} \frac{\text{कोज्यायताय}}{१+\text{य}^{२}} = \int_{-\text{अ}}^{+\text{अ}} \frac{\text{कोज्या२यताय}}{(१+\text{य}^{२})(\text{कोज्याय}-\text{ज्याय})}$$

६। सिद्ध करो कि

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय} = \frac{\text{क}-\text{अ}}{२\text{ग}} \int_{-\text{ग}}^{+\text{ग}} \text{फ}\left(\frac{\text{क}+\text{अ}}{२} + \frac{\text{क}-\text{अ}}{२\text{ग}}\text{य}\right)\text{ताय}$$

७। सिद्ध करो कि

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \text{फ(य)ताय} = \frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{ग}-\text{घ}} \int_{\text{घ}}^{\text{ग}} \text{फ}\left(\frac{\text{अग}-\text{कघ}}{\text{ग}-\text{घ}} + \frac{\text{क}-\text{अ}}{\text{ग}-\text{घ}}\text{य}\right) \text{ताय}$$

८। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(१+\text{नकोज्याय})\text{ताय} = \text{य ला}\frac{\text{न}}{२\text{ना}} + २\text{नाज्याय} - \frac{२}{२\,२}\text{ना}^{२}\text{ज्या२य}$$

$$+ \frac{२}{३\,३}\text{ना}^{३}\text{ज्या३य} - \frac{२}{४\,४}\text{ना}^{४}\text{ज्या४य} + $$

$$\text{जहां ना} = \frac{१-\sqrt{१-\text{न}^{२}}}{\text{न}}$$

९। सिद्ध करो कि

$$\int_{0}^{-} \text{ला}(१+\text{नकोज्याय})\text{ताय} = {}^{-}\text{ला} \frac{\text{न}^{२}}{२(१-\sqrt{१-\text{न}^{२}})}$$

१०। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(१+२\text{म}\text{कोज्या}\text{य}+\text{म}^{२})\text{ताय}$$

$$=२(\text{म}\text{ज्या}\text{य}-\frac{\text{म}^{२}}{२^{२}}\text{ज्या}२\text{य}+\frac{\text{म}^{३}}{२^{३}}\text{ज्या}३\text{य}-\frac{\text{म}^{४}}{२^{४}}\text{ज्या}४\text{य}+\cdots)$$

वा, $\int \text{ला}\,(१+२\text{म}\text{कोज्या}\text{य}+\text{म}^{२})\text{ताय}$

$$=२\text{य}\text{ला}\text{म}+२\left\{\frac{\text{ज्या}\text{य}}{\text{म}}-\frac{\text{ज्या}२\text{य}}{२^{२}\text{म}^{२}}+\frac{\text{ज्या}३\text{य}}{३^{२}\text{म}^{३}}-\frac{\text{ज्या}४\text{य}}{४^{२}\text{म}^{४}}+\cdots\right\}$$

११। सिद्ध करो कि

$$\int \text{ला}(१+\text{न}\text{कोज्या}\text{य})\text{ताय}=२\text{य}\ \text{ला}\text{कोज्या}\,\frac{\text{ष}}{२}$$
$$+२(\text{स्प}\,\frac{\text{ष}}{२}\,\text{ज्या}\text{य}-\frac{१}{२^{२}}\text{स्प}^{२}\,\frac{\text{ष}}{२}\,\text{ज्या}२\text{य}+\ldots)$$

यदि न = ज्याष

१२। सिद्ध करो कि

$$\int_{०}^{\frac{\pi}{२}}\text{ला}(१+\text{न}_{०}\text{ज्या}^{२}\text{य})\text{ताय}=\frac{\pi}{४}\text{ला}\left\{(१+\text{न}_{०})(१+\text{न}_{१})^{\frac{१}{२}}(१+\text{न}_{२})^{\frac{१}{४}}(१+\text{न}_{३})^{\frac{१}{८}}\cdots\right\}$$

$$\text{जहां}\quad \text{न}_{\text{द}+१}=\frac{\text{न}_{\text{द}}^{२}}{४(\text{न}_{\text{द}}+१)}$$

यहां ४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से $\int_{०}^{\frac{\pi}{२}}\text{ला}(१+\text{न}_{०}\text{ज्या}^{२}\text{य})\text{ताय}$ $=\int_{०}^{\frac{\pi}{२}}\text{ला}(१+\text{न}\text{कोज्या}^{२}\text{य})\text{ताय}$ फिर इन दोनों को जोड़ कर एक नियम परम्परा बनावो।

१३। १२वें और ९वें प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\left\{\frac{१+(१+\text{न}_{०})^{\frac{१}{२}}}{२}\right\}^{४}=(१+\text{न}_{०})(१+\text{न}_{१})^{\frac{१}{२}}(१+\text{न}_{२})^{\frac{१}{४}}(१+\text{न}_{३})^{\frac{१}{८}}\cdots$$

१४। सिद्ध करो कि

$$\left\{\text{फ}(\text{अ})\text{फ}(\text{अ}+\frac{\text{ग}}{\text{न}})\text{फ}(\text{अ}+\frac{२\text{ग}}{\text{न}})\cdots\text{फ}(\text{अ}+\frac{\text{न}-१}{\text{न}}\text{ग})\right\}^{\frac{१}{\text{न}}}<\frac{१}{\text{ग}}\int_{\text{अ}}^{\text{अ}+\text{ग}}\text{फ}(\text{य})\text{ताय}$$

यदि न का मान अनन्त हो तो।

१५। प्रथमाध्याय के ३३वें प्रश्न से पहले यह सिद्ध करो कि

$$\int \text{इ}^{\text{क}\text{य}}\text{कोज्या}\text{अ}\text{य}\text{ताय}=\frac{\text{इ}^{\text{क}\text{य}}\text{कोज्या}(\text{अ}\text{य}-\text{ष})}{(\text{अ}^{२}+\text{क}^{२})^{\frac{१}{२}}}+\text{स्थि},\ \text{जहां}\ \text{स्प}\text{ष}=\frac{\text{अ}}{\text{क}}$$

फिर इस पर से यह सिद्ध करो कि $\text{इ}^{\text{क}\text{य}}$कोज्याअय ताय इस के चल का चल फिर उस के चल का चल यों न वार तक जो चल होगा उस का प्रमाण

$$\frac{\text{इ}^{\text{कय}}\text{कोज्या}(\text{अय}-\text{नष})}{(\text{अ}^2+\text{क}^2)^{\frac{\text{न}}{2}}}+\text{गा}+\text{गा}_1\text{य}+\text{गा}_2\text{य}^2+\text{गा}_3\text{य}^3+\cdots$$

$$+\text{गा}_{\text{न}-1}\text{य}^{\text{न}-1}$$ यह होगा।

जहां गा, गा_1, गा_2 इत्यादि स्थिराङ्क हैं।

१६। ८वें से सिद्ध करो कि

$$\text{लाज्याय}=\text{ला}\tfrac{1}{2}-\text{कोज्या}2\text{य}-\tfrac{1}{2}\text{कोज्या}4\text{य}-\tfrac{1}{3}\text{कोज्या}6\text{य}$$

$$-\tfrac{1}{4}\text{कोज्या}8\text{य}\cdots$$, और

$$\text{लाकोज्याय}=\text{ला}\tfrac{1}{2}+\text{कोज्या}2\text{य}-\tfrac{1}{2}\text{कोज्या}4\text{य}+\tfrac{1}{3}\text{कोज्या}6\text{य}$$

$$-\tfrac{1}{4}\text{कोज्या}8\text{य}+\cdots$$

१७। सिद्ध करो कि यदि किसी श्रेढ़ी का न संख्यक पद

$$\frac{\text{त}(\text{त}+\text{अ})(\text{त}+2\text{अ})\cdots(\text{त}+\text{नअ})}{\text{द}(\text{द}+\text{अ})(\text{द}+2\text{अ})\cdots(\text{द}+\text{नअ})}$$ यह हो तो यह श्रेढ़ी सान्त होगी

यदि द$>$त + अ और यदि द$<$त + अ तो श्रेढ़ी का मान अनन्त होगा।

१८। सिद्ध करो कि किसी श्रेढ़ी के न + १ संख्यक पद में न संख्यक पद का भाग देने से यदि लब्धि

$$\frac{\text{य}^{\text{त}}+\text{आय}^{\text{त}-1}+\text{काय}^{\text{त}-2}+\cdots}{\text{य}^{\text{त}}+\text{अय}^{\text{त}-1}+\text{कय}^{\text{त}-2}+\cdots}$$ यह हो तो यदि अ $>$ का + १ तो श्रेढ़ी का मान सान्त और यदि अ$<$का + १ तो अनन्त होगा।

१९। यदि $\text{आ}=\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{च}^2\text{ताय}$, $\text{का}=\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{चजताय}$ और $\text{गा}=\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{ज}^2\text{ताय}$ तो सिद्ध करो कि आ × गा $>$ का^2।

वीजगणित का $(\text{अ}_1^2+\text{अ}_2^2+\cdots+\text{अ}_{\text{न}}^2)(\text{क}_1^2+\text{क}_2^2+\cdots+\text{क}_{\text{न}}^2)$ $>(\text{अ}_1\text{क}_1+\text{अ}_2\text{क}_2+\cdots\text{अ}_{\text{न}}\text{क}_{\text{न}})^2$ यह सिद्धान्त देखो।

२०। सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{ला कोस्पय ताय}=0$$

२१। सिद्ध करो कि $$\int_0^{\infty}\frac{2\text{ अकताय}}{\text{य}^4+\text{य}(\text{अ}^2+\text{क})+\text{अ}^2\text{क}^2}=\frac{\pi}{\text{अ}+\text{क}}$$

२२। सिद्ध करो कि $$\int_0^{\text{अ}}\frac{(1-\text{क}^2\text{य}^2)\text{ ताय}}{\sqrt{(\text{अ}^2-\text{य}^2)}}=\frac{\pi}{2}\left[1-\frac{\text{अ}^2\text{क}^2}{2}\right]$$

२३। सिद्ध करो कि यदि न का मान अनन्त हो तो

$$\frac{१}{न^{६}}\left\{ १^{५}+२^{५}+३^{५}+\cdots\cdots+(न-१)^{५} \right\}=\frac{१}{६}$$

२४। सिद्ध करो कि यदि न का मान अनन्त हो तो

$$\frac{१+(१+\frac{१}{न})^{२}+(१+\frac{२}{न})^{२}+\cdots+(१+\frac{न-१}{न})^{२}}{१+(१+\frac{१}{न})^{३}+(१+\frac{२}{न})^{३}+\cdots+(१+\frac{न-१}{न})^{३}}=\frac{२८}{४५}$$

२५। सिद्ध करो कि $\int_{०}^{\frac{\pi}{२}}$ कोज्यायलाकोज्यायताय = ला (२)—१

२६। सिद्ध करो कि

$\int$ लाज्यायताय = यला$\frac{१}{२}$–($\frac{१}{२}$ज्या २ य + $\frac{१}{२\cdot४}$ज्या ४ य + $\frac{१}{३\cdot६}$ज्या ६ य + ...)

२७। सिद्ध करो कि

$\int$लाकोज्यायताय=यला$\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{२}$ज्या२य– $\frac{१}{२\cdot४}$ज्या४य + $\frac{१}{३\cdot६}$ज्या६य– $\frac{१}{४\cdot८}$ज्या८य+ ..

२८। सिद्ध करो कि $\int$ लास्पयताय = —ज्या२य—$\frac{१}{६}$ज्या६य— . . . . .

२९। सिद्ध करो कि $\frac{१}{{}_{२}अ(ला२)^{क}}+\frac{१}{{}_{३}अ(ला३)^{क}}+\frac{१}{{}_{४}अ(ला४)^{क}}+\quad+$ अनन्त

इस श्रेढ़ी का मान सान्त होगा यदि अ $>$ १ और क का मान चाहे जो हो।

३०। $(अ-१)+(अ^{\frac{१}{२}}-१)+(अ^{\frac{१}{३}}-१)+(अ^{\frac{१}{४}}-१)+\quad+(अ^{\frac{१}{न}}-१)$

यह सान्त होगा यदि न = ∞ उ० नहीं।

३१। सिद्ध करो कि

$य+\frac{य^{२}}{\lfloor२}+\frac{य^{३}}{\lfloor३}+\frac{य^{४}}{\lfloor४}+$ यह सर्वदा सान्त होगा।

३२। सिद्ध करो कि $\int इ^{-य}\{फ(य)+फ'(य)\}$ ताय = $इ^{य}$फ(य)

३३। सिद्ध करो कि $\int_{०}^{१}\frac{यइ^{य}ताय}{(१+य)^{२}}=\frac{इ-२}{२}$

३४। सिद्ध करो कि यदि

$फ(य)=अ_{०}+अ_{१}य+अ_{२}य^{२}+अ_{३}य^{३}+\quad+$ अनन्त यह सान्त हो तो $\int$फ(य)ताय इस का मान भी यदि श्रेढ़ी में ले आवें तो उस श्रेढ़ी का मान भी सान्त होगा।

३५। यदि $इ^{कय}$ताय का न वार चल निकालें तो सिद्ध करो कि उसका मान $=\frac{इ^{कय}}{क^{न}}+आ_{१}य^{न-१}+आ_{२}य^{न-२}+\ .+आ_{न-१}य+आ_{न}$

जहां $आ_१$, $आ_२$, इत्यादि स्थिराङ्क है ।

३६ । एक आदमी अपने (अ) स्थान से पूर्व को चला । दूसरा जिस का (क) स्थान अ से ठीक उत्तर की ओर एक मील पर था वहाँ से उसके मिलने के लिये चला । पहले की प्रतिक्षण की गति को उस के और अ स्थान के सैक अन्तर के लघुरिक्थ से गुण देने और उस के और क स्थान के अन्तरवर्ग का भाग देने से जो लब्ध हो उतना प्रतिक्षण मे दूसरा चलता था तो बताओ कि जब पहला अपने स्थान से एक मील गया उस समय दूसरा अपने स्थान से कितना गया होगा ।

उ० $\frac{\pi}{८}$ ला (२) = $\frac{२६}{१००}$ मील

३७ । अ स्थान से साथ ही घोड़ दौड़ मे क, ख, और ग घोड़े दौड़े । किसी क्षण में अ स्थान से जितनी मील दूरी पर क होता था उस से और उस के वर्ग से उस के उस क्षण की गति को गुण दो तो वह क्रम से ख और ग की उस क्षण की गति होती है तो बतावो कि क और ख, फिर अ स्थान से क और ख, क और ग, और ख और ग कितनी कितनी दूरी पर मिलेंगे ।

उ० ख, ग $\frac{३}{२}$ । क, ग, $\sqrt{३}$ = १$\frac{३}{४}$ और क, ख, २ मील दूरी पर मिलेगे ।

इति चतुर्थाध्याय ।



म० म० सुधाकरद्विवेदिविरचितं

चलराशिकलनम्

पञ्चमाध्यायतोऽवशिष्टभागः

THE

CHALARĀŚIKALANA

BY

M. M. Sudhakara Dwivedi

PART II

Edited

BY

PANDIT BALDEVA MISHRA
JYAUTISHACHARYA JYAUTISH TIRTH
SARASVATI BHAVANA
BENARES

1943

मुद्रक—
माधव विष्णु पराड़कर,
ज्ञानमण्डल यन्त्रालय, काशी । १९९९

पुनर्निवेदनम् ।

ग्रन्थस्यास्य प्रथमभागस्य प्रकाशनावसरे मया निवेदितं यद्ग्रन्थान्ते विशेष-प्रपञ्चः प्रदर्शितो भविष्यति । परञ्च महादुस्तरेऽस्मिन्महायुद्धकाले पत्रप्राप्त्यभावा-द्विशेषलेखनादिदानीं विरम्यते । युरोपीयगणिते 'लिमिट' शब्देनाव्यक्तस्य यन्मानं कल्प्यते तत्रास्मिन्ग्रन्थे एकधैव तन्मानं शून्यं मत्वा गणितं प्रदर्शितम् । एवं स्वरूपाणां लेखनेऽपि किञ्चिद्वैशिष्ट्यमस्ति । सर्वमिदं कालान्तरे चलराशिकलन-परिशिष्टरूपेण प्रकाशितं भविष्यतीत्याशासे ।

अत्र विशेषत इदं कथनीयमस्ति यद्गणितविद्याप्रचाराय विद्यारसिकैः काशिकराजकीयसंस्कृतविद्यालयाध्यक्षैः श्रीमद्भिर्डाक्टरमङ्गलदेवशास्त्रिवर्यैर्यया शुभेच्छयैतादृशदुर्लभपुस्तकप्रकाशनाय यतितं तत्रास्माकं दौर्भाग्यात्प्रायो मूलच्छेद एव दृश्यते गणितविषयकपरीक्षाया अपाकरणात् । तथापि दृढमाशासे यद्विश्वेश्वर-कृपया तादृशो गणितप्रकर्षकालः समागमिष्यति यदा पुनरपि बह्वादरेण ग्रन्थरत्नमिदं काशिकराजकीयसंस्कृतपरीक्षासु पाठ्यरूपेण स्वीकरिष्यते इति निगदति

काश्यां सरस्वतीभवने
१-३-४३

बलदेवमिश्रो
ज्यौतिषाचार्यः

पञ्चमाध्याय ५ ।

प्रक्रम		पृष्ठ
५८।	द्विगुणचल का वर्णन	१२१
५९।	$\frac{\text{ता}^2\text{स}}{\text{तायतार}}$ इससे स का पता लगाना	१२१
६०।	स के मान में दो विधि पर से विशेष ...	१२१—१२२
६१।	$\int\int$ फ(य,र) ताय तार का अर्थ ..	१२२—१२३
६२।	६० प्रक्रम से सान्त द्विगुणचलानयन	१२३—१२४
६३।	६२ वें प्रक्रम के सिद्धान्त को २ प्रक्रम से सिद्ध करना	१२४—१२६
६४।	$\int$ फ(य,र) तार में विशेष ...	१२६
६५।	यदि फ(य,र) = फा(य) × फि(र) तो इसके सान्तद्विगुणचल में विशेष .	१२६—१२७
६६।	त्रिगुणचलानयन	१२७
६७।	क्रिया समेत कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न	१२७—१३२
६८।	चलराशिकलन में कुछ विशेष ...	१३२—१३३

षष्ठाध्याय ६ ।

६९।	वक्रक्षेत्रों के चापानयन में विधि ...	१३४
७०।	परवलय (Parabola) का चाप जानना ...	१३४—१३५
७१।	चक्राभ (Cycloid) का चाप जानना ...	१३५
७२।	र = अय$^{\frac{\text{म}}{\text{न}}}$ इस वक्र का चापानयन ..	१३५—१३६
७३।	कातन्वली (Catenary) का चापानयन ..	१३६
७४।	य$^{\frac{2}{3}}$ + र$^{\frac{2}{3}}$ = अ$^{\frac{2}{3}}$ इस वक्र का चापानयन	१३६
७५।	६९ वे प्रक्रम से विशेष ..	१३७—१३८
७६।	लाघुरिक्थिक वक्र (Logarithmic Curve) का चापानयन ...	१३८
७७।	दीर्घवृत्त का चापानयन ..	१३९—१४०
७८।	अतिपरवलय का चापानयन ...	१४०—१४१

७९। आर्किमिडिज के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes) . १४१—१४२
८०। श्रु = अ(१ + कोज्याप) इस वक्र का चापानयन १४२
८१। लाघुरिक्थिक सर्पिल का चापानयन . १४२
८२। अपचक्रालद (Epicycloid) का चापानयन १४२—१४३
८३। अतिचक्रालद (Hypocycloid) का चापानयन . १४३—१४४
८४। स्पर्शरेखा पर मूलविन्दु से पड़े लम्ब और य अक्ष से उत्पन्न कोण इन दोनो के वश से वक्र का चापानयन १४४—१४८
८५। ८४ प्रक्रम की व्याप्ति के लिये दो उदाहरण १४८—१५१
८६। अतिपरवलय के चापानयन मे ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc) १५१—१५३
८७। डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Dr graves) १५३—१५४
८८। एकनाभिक अतिपरवलय और दीर्घवृत्त मे विशेष १५४—१५५
८९। डिकार्टेस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन १५५—१५६
९०। वक्र के अनवलूत से चलज्ञान के विना चापानयन १५६—१५७
९१। भुज, कोटि के रूप मे यदि चाप विदित हो तो अनवलूत का समीकरण १५७—१५९
९२। अक्षीय भुजयुग्म के रूप मे जो चाप है उससे अनवलूत का अक्षीय भुजयुग्म सम्बन्धी समीकरण का ज्ञान .. १५९—१६०
९३। वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतविन्दु की स्पर्श-रेखा से उत्पन्न कोण जो हो उसके फलरूप मे चापानयन १६०—१६१
९४। चापस्पार्शिकसमीकरण से वक्र का समीकरण जानना ... १६२—१६५
९५। चापस्पार्शिकसमीकरण से वक्रजातीयवृत्त का व्यासार्द्ध जानना १६५
९६। चापस्पार्शिकसमीकरण से अवलूत का समीकरण जानना १६६—१६७
९७। चाप पर से वक्र के भुज, कोटि का ज्ञान १६७—१६८
९८। आकाशीय वक्र का चापानयन . १६८—१७०
९९। $\frac{\text{नाना}}{\text{नाना}}$ के मान का आनयन १७०—१७१

प्रक्रम		पृष्ठ
१००।	आकाशीय वक्र में अक्षीय भुजयुग्म से विशेष ...	१७१
१०१।	अन्तरिक्षीय वक्र की स्पर्शरेखा पर मूलविन्दु से पड़े लम्ब से चापानयन, और अभ्यास के लिये प्रश्न	१७१—१७५

सप्तमाध्याय ७।

१०२।	वक्र के फलानयन की विधि	१७६
१०३।	वृत्त का फलानयन .	१७६—१७७
१०४।	दीर्घवृत्त का फलानयन	१७७
१०५।	परवलय का फलानयन ..	१७७
१०६।	$र = अय^{न}$ इस वक्र का फलानयन .	१७७
१०७।	अतिपरवलय का फलानयन	१७७—१७८
१०८।	चक्रालद का फलानयन	१७८—१७९
१०९।	कातन्वली का फलानयन ..	१७९
११०।	$\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{२}{२म+१}} + \left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{२}{२न+१}} = १$ इस वक्र का फलानयन	१७९—१८०
१११।	फलानयन में सीमा के विचार मे विशेष .	१८०—१८२
११२।	सम्पूर्ण वक्र के फलानयन में विशेष	१८२—१८३
११३।	दो कोटियों के भीतर फलानयन मे विशेष	१८३
११४।	दो वक्रो के चाप और उनके कोट्यन्तर से वने क्षेत्र का फलानयन .	१८४—१८५
११५।	दो वक्रों से सीमित क्षेत्र का फलानयन ..	१८५
११६।	११४-११५ प्रक्रमों की व्याप्ति के लिये एक उदाहरण	१८५—१८८
११७।	अक्षीय भुजयुग्म से वक्र का फलानयन ...	१८८—१८९
११८।	समास्रिक सर्पिल (Equiangular Spiral) का फलानयन .	१८९
११९।	अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन	१९०
१२०।	श्रु = अ(ष + ज्याष) इस वक्र का फलानयन .	१९०
१२१।	$श्रु = २अ\frac{कोज्याष - \sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^{२}ष}$ इस वक्र का फलानयन	१९०—१९१
१२२।	$श्रु = अष^{न}$ इस वक्र का फलानयन .	१९१—१९३

प्रक्रम		पृष्ठ
१२३।	इलामूलक का फलानयन	१९३
१२४।	दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से वने क्षेत्र का फलानयन	१९३—१९५
१२५।	१२४ वे प्रक्रम मे विशेष	१९५
१२६।	१२४ - १२५ प्रक्रमो के लिये उदाहरण	१९६—१९८
१२७।	१२६ वे प्रक्रम मे विशेष	१९८—१९९
१२८।	आर्किमिडिज़ के सर्पिल के फलानयन मे १२४ वे प्रक्रम की युक्ति	१९९—२००
१२९।	अक्षीय समीकरण से अपचक्रालद का फलानयन	२००—२०१
१३०।	वक्रो के साजात्य अवयवो के फलो का संवन्ध	२०१—२०३
१३१।	वक्रचाप और अवलूतचाप से वने क्षेत्र का फलानयन	२०३
१३२।	कातन्वली उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इनसे वने क्षेत्र का फलानयन	२०३—२०४
१३३।	पाददल का लक्षण	२०४
१३४।	मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओ पर दो लम्ब डाले जायं तो पाददल का चाप और इन दोनो लम्वो से वने क्षेत्र का फलानयन	२०४—२०५
१३५।	$अय^2 + कयर + गर^2 + घय + चर + फ = 0$ इस पर से पता लगाना कि कौन वक्र है	२०५—२०८
१३६।	१३४ प्रक्रम में विशेष	२०८
१३७।	एक निर्दिष्टरेखा के दोनो अग्र दो वक्र के परिधि पर घूमने से निर्दिष्टरेखास्थ निर्दिष्ट विन्दु के घूमने से जो वक्र होगा उसका फलानयन	२०९—२१०
१३८।	स्वल्पान्तर से वक्रो का फलानयन	२१०—२१४
१३९।	फलानयन मे प्रकारान्तर	२१४
१४०।	फलसाधन के लिये यन्त्र (Planimeters) और अभ्यास के लिये प्रश्न	२१४—२२३

अष्टमाध्याय ८ ।

१४१।	पृष्ठफलानयन विधि	२२४—२२५
१४२।	शङ्कु का पृष्ठफल	२२५

प्रक्रम		पृष्ठ
१४३।	शङ्कु के पृष्ठफल का प्रकारान्तर	२२५
१४४।	गोल का पृष्ठफलानयन ...	२२६—२२७
१४५।	वृहद्व्यास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका पृष्ठफलानयन .	२२७—२२८
१४६।	परवलय का चाप य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्ठफलानयन ..	२२८
१४७।	कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन ..	२२८—२३०
१४८।	पृष्ठफल मे विशेष .	२३०—२३१
१४९।	श्र = अ (१ + कोज्याप) इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो वक्र हो उसका पृष्ठफलानयन ...	२३१
१५०।	स्पर्शधरातल का साधन ..	२३१—२३४
१५१।	परिणतक्षेत्र का फलानयन	२३४—२३५
१५२।	स्पर्शधरातल से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल ...	२३५—२३८
१५३।	घनक्षेत्र के पृष्ठ में विशेष	२३८—२३९
१५४।	स्पर्शधरातल से पृष्ठफलानयन में विशेष	२३९
१५५।	पृष्ठ के अक्षीय समीकरण से पृष्ठफलानयन	२४०
१५६।	घनफलानयनविधि	२४०—२४१
१५७।	समसूची का घनफलानयन .	२४१
१५८।	गोल का घनफलानयन	२४१
१५९।	परवलय के य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन .	२४१—२४२
१६०।	य अक्ष के चारो ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन ..	२४२—२४३
१६१।	र अक्ष के चारो ओर घूमने से चक्रालद के घनक्षेत्र का घनफलानयन ...	२४३
१६२।	परवलय के र अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसका घनफलानयन	२४३
१६३।	दो घनक्षेत्र और दो धरातलो के भीतर घनक्षेत्र खण्ड का घनफलानयन .	२४३—२४४

प्रक्रम		पृष्ठ
१६३।	१६२वे प्रक्रम मे विशेष ..	२४४—२४५
१६४।	घनफल मे विशेष	२४५
१६५।	दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का पृष्ठफलानयन .	२४५
१६६।	किसी सूचीक्षेत्र का घनफलानयन	२४५—२४६
१६७।	शङ्कु, अतिपरवलयिक और दो लम्बरूपी धरातल के भीतर घनक्षेत्र का घनफलानयन ...	२४६
१६८।	१६७ वें प्रक्रम का विशेष	२४६—२४७
१६९।	स्वग्रान्तर से घनफलानयन ...	२४७
१७०।	द्विगुणचलानयन से घनफल	२४७—२४८
१७१।	विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन .	२४८
१७२।	व्याप्ति दिखाने के लिये प्रकार .	२४८—२४९
१७३।	घनफलानयन मे विशेष ...	२४९
१७४।	घनफलानयन मे विशेष	२४९—२५०
१७५।	दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का घनफलानयन ...	२५०
१७६।	एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन ..	२५०—२५१
१७७।	दूसरे एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन	२५१
१७८।	प्रकारान्तर से घनफलानयन ..	२५१—२५२
१७९।	जिस पृष्ट का $ल = अ इ - \frac{श्रु^2}{ग^2}$ यह समीकरण है उस के और यर अक्ष के भीतर के घनक्षेत्र का पृष्ठफलानयन	२५२
१८०।	घनफलसाधन में विशेष ...	२५२—२५३
१८१।	नलक के खण्ड का घनफलानयन ...	२५३
१८२।	१७८ वे प्रक्रम मे विशेष ..	२५३—२५४
१८३।	एक विशेषघनक्षेत्र का घनफलानयन ...	२५४
१८४।	श्रु = अ (१ + कोज्याप) इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफलानयन	२५४—२५५
१८५।	दो विशिष्टघनक्षेत्रों के घनफल मे सबन्ध, और अभ्यास के लिये प्रश्न ...	२५५—२६३

प्रक्रम पृष्ठ

नवमाध्याय ९।

१८६। सान्तचल का वर्णन ... २६४

१८७। $\int_{0}^{\pi}$ ज्यामय ज्यानय ताय का मान ... २६४—२६५

१८८। $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}$ ज्या^{म}य को ज्या^{न}य ताय का मान .. २६५—२६७

१८९। $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{फ(य)}{फा(य)}$ ताय का मान . २६७—२६९

१९०। १८९ वें प्रक्रम का एक चमत्कृत उदाहरण .. २६९—२७०

१९१। $\int_{0}^{\infty} \frac{य^{२म}}{१ - य^{२न}}$ ताय का मान . २७०—२७१

१९२। १९०—१९१ प्रक्रमों मे विशेष . . २७१—२७२

१९३। सान्तचलानयन की विधि से तात्कालिकसंवन्ध ज्ञान ... २७२—२७३

१९४। $स = \int_{अ}^{क}$ फ(य,ग) ताय यहां ग को स्वतन्त्र मान
$\frac{तास}{ताग}$ का मान जानना २७३—२७५

१९५। १९४ वें प्रक्रम में विशेष २७५—२७६

१९६। $\frac{तास}{ताग}$ का मान क्षेत्र की रीति से .. २७६—२७७

१९७। कुछ उदाहरण ... २७७—२७९

१९८। फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Frullani) २७९—२८१

१९९। यूलर के चल (Eulerian Integrals) . २८१—२८२

२००। यूलर के पहले चल में विशेष ... २८२

२०१। यूलर के दूसरे चल मे विशेष ... २८१—२८३

२०२। यूलर के दूसरे चल में दूसरा विशेष . २८३

२०३। यूलर के दोनों चलों मे संवन्ध . २८३—२८४

२०४। $\frac{\{गा(न)\}^{२}}{\{गा(न-म\}\ \{गा(न+म)\}}$ का मान ... २८४—२८५

प्रक्रम		पृष्ठ
२०५।	गा (१—म) गा (म) का मान	२८५
२०६।	गा$\left(\text{१} - \frac{\text{१}}{\text{न}}\right)$ गा $\left(\text{१} - \frac{\text{१}}{\text{न}}\right)$ · गा $\left(\frac{?}{\text{न}}\right)$ का मान .	२८५—२८६
२०७।	गास (Gauss) का सिद्धान्त .	२८६
२०८।	२०७ प्रक्रम मे विशेष .	२८७—२८९
२०९।	२०८ प्रक्रम मे विशेष	२८९—२९०
२१०।	ला (१ + य) का मान श्रेढी मे ..	२९०
२११।	गा (१ + य) का न्यूनतम मान	२९०—२९१
२१२।	$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^2\text{य}^2}$ ताय का मान गाढफल मे .	२९१—२९२
२१३।	$\iiint \cdot \text{य}^{\text{र}-1}\text{र}^{\text{म}-1}\text{ल}^{\text{न}-1}$ ·तालतारताय का मान गाढफल के रूप मे	२९२
२१४।	$\iiint \cdot \text{अ}_1^{\text{ल}-1}\text{क}_1^{\text{म}-1}\text{ख}_1^{\text{न}-1}$ ताख$_1$ ताक$_1$ ताअ$_1$ का मान गाढफल के रूप मे	२९२—२९३
२१५।	एक अनेक गुणचल को एक चल मे ले आना .	२९३—२९४
२१६।	एक त्रिगुणचल को एक चल मे ले आना	२९४
२१७।	एक द्विगुणचल को एक चल मे ले आना	२९४—२९५
२१८।	$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^2\text{य}^2}$ कोज्या२रय ताय का मान ...	२९५—२९६
२१९।	$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{जय}} \frac{\text{ज्या रय}}{\text{य}}$ ताय का मान	२९६—२९७
२२०।	$\int_0^\infty \text{इ}^{-\left(\text{य}^2 + \frac{\text{अ}}{\text{य}^2}\right)}$ ताय का मान	२९७—२९८
२२१।	$\int_0^1 \text{य}^{\text{म}}(\text{लाय})^{\text{न}}$ ताय इसका मान ...	२९८
२२२।	$\int_0^1 \frac{\text{लाय ताय}}{\text{१}-\text{य}}$ का मान	२९८
२२३।	मान्तचलानयन के लिये एक सिद्धान्त .	२९९

प्रक्रम		पृष्ठ
२२४।	$\int_{o अ_1}^{\infty क_1}$ फ(य,ज) ताय ताज का मान ..	२९९
२२५।	$\int_0^\infty \frac{इ^{-अय} - इ^{-कय}}{य}$ कोज्या अ, य ताय का मान	२९९—३००
२२६।	$\int_0^\infty \frac{ज्याअ_1 य}{य}$ ताय, $\int_0^\infty \frac{कोज्या अ_1 य}{१+य^२}$ ताय के मान ..	३००—३०१
२२७।	$\int_0^\infty \frac{ज्यागय}{य(१+य^२)}$ ताय का मान	३०१
२२८।	कोज्या (∞), ज्या (∞) के मान ..	३०२—३०३
२२९।	सान्तचलानयन में विशेष ..	३०३—३०४
२३०।	२२९ वें प्रक्रम में विशेष	३०४
२३१।	२२९ वें प्रक्रम में दूसरा विशेष	३०४—३०५
२३२।	२३१ वें प्रक्रम में विशेष	३०५
२३३।	$\frac{१ - अ^२}{१-२अकोज्याय+अ^२}$ का मान श्रेढी मे	३०५
२३४।	$\int_0^\infty \frac{१}{१+य^२} \frac{ताय}{१-२अकोज्यागय+अ^२}$ का मान	३०५—३०६
२३५।	$\int_0^\infty$ ला (१-२अकोज्या गय+अ^२) $\frac{ताय}{१+य^२}$ का मान	३०६
२३६।	$\int_0^\infty \frac{य ज्या गय ताय}{१-२अकोज्यागय+य^२}$ का मान	३०६
२३७।	टेलर के सिद्धान्त से सान्तचलानयन ...	३०६—३०७
२३८।	असम्भाव्यसंख्या से सान्तचलानयन	३०७—३०८
२३९।	दैर्घ्यवृत्तीय चल से विशेष	३०८—३१०
२४०।	२३९ वे प्रक्रम मे विशेष ..	३१०
२४१।	दैर्घ्यवृत्तीय चल से और विशेष .	३१०—३१२
२४२।	प्रथम और द्वितीय दैर्घ्यवृत्तीय चल मे संबन्ध ...	३१२—३१४
२४३।	प्रथम और तृतीय दैर्घ्यवृत्तीयचल में संबन्ध ...	३१४

प्रक्रम		पृष्ठ
२४४।	फ(य) का मध्यम मान सान्तचल से	३१४—३१६
२४५।	लागा (१ + य) का मान जानने के लिये सारणी	३१६—३२२
२४६।	यूलर के दूसरे चल मे विशेष और अभ्यास के लिये प्रश्न	३२२—३३२

दशमाध्याय १०।

प्रक्रम		पृष्ठ
२४७।	क्रम को बदल कर चलानयन	३३३
२४८।	२४७ प्रक्रम का एक और उदाहरण	३३३—३३४
२४९।	$\int\int$ शातार ताय को व और श के रूप मे बदलना	३३४—३३७
२५०।	कुछ उदाहरण	३३७—३४१
२५१।	द्विगुणचल का परिवर्त्तन क्षेत्ररीति से	३४१—३४३
२५२।	त्रिगुणचल को नये तीन चल के रूप मे बदलना	३४३—३४५
२५३।	ऊपर के प्रक्रमो के कुछ उदाहरण	३४५—३४६
२५४।	चलराशिकलन से त्रिकोणमितिफलो को श्रेढी मे ले आना	३४६—३४८
२५५।	२३३ वे प्रक्रम मे विशेष	३४८—३५०
२५६।	२५५ वे प्रक्रम मे विशेष	३५०—३५१
२५७।	ऊपर के प्रक्रमो के कुछ उदाहरण	३५१—३५५
२५८।	२५६ वे प्रक्रम में विशेष	३५५
२५९।	२५६ वे प्रक्रम मे और विशेष	३५६
२६०।	ज्या और कोटिज्या के रूप मे एक श्रेढी बनाना जिस का योग ग के तुल्य हो	३५६—३५७
२६१।	कोटिज्या के रूप में दूसरी श्रेढी जिसका योग निर्दिष्ट-संख्या के तुल्य हो। और अभ्यास के लिये प्रश्न	३५७—३५८
२६२।	चलनसमीकरण के लक्षण	३५८
२६३।	$मा + \frac{तार}{ताय} = ०$ इसमे य, र का मान जानना	३५८—३६०
२६४।	$\frac{तार}{ताय} + पार = वा$ मे र का मान जानना	३६०—३६१

प्रक्रम		पृष्ठ
२६५।	२६४ वे प्रक्रम में विशेष .	३६१
२६६।	चलनसमीकरण में विशेष	३६१—३६३
२६७।	चलनसमीकरण संबन्धि कुछ उदाहरण	३६३—३६८
२६८।	महत्तम और न्यूनतम में विशेष और वैशेषिककलन का लक्षण	३६८—३६९
२६९।	तावैर = वैतार को सिद्ध करना ...	३६९
२७०।	$\int^{न}$ इस का अर्थ	३७०
२७१।	२६८-२७० प्रक्रमो में विशेष ..	३७०
२७२।	वै $\int$ स वा $\int$ वैस का मान जानना	३७०—३७२
२७३।	$\int$ शाताय का वैशेषिक जानना	३७२—३७४
२७४।	स = फ(य,र,ल) इस मे वैशा का मान जानना	३७४
२७५।	वैशेषिक पर से महत्तम और न्यूनतम मान ...	३७४—३८१
२७६।	साम्बन्धिक महत्तम और न्यूनतम, उनके कुछ उदाहरण और अभ्यास के लिये प्रश्न ..	३८१—३८९

इति विशेषवर्णन।



विषयसूचनिका (Contents)

अध्याय		पृष्ठ
१	चलराशिकलन का अभिप्राय और साधारण चलानयन	१—३४
२	अकरणीगत भिन्न संवन्ध का चलानयन (Rational Fractions)	३५—६५
३	लघूकरणपरम्परा (Formulae of Reduction)	६६—८५
४	प्रकीर्णक (Miscellaneous Remarks)	८६—१२०
५	द्विगुणचल (Double Integration)	१२१—१३३
६	वक्रक्षेत्रो का चापानयन (Lengths of Curves)	१३४—१७५
७	वक्र का फलानयन (Areas of Plane Curves)	१७६—२२३
८	वक्र के पृष्ठ और घनफलानयन (Areas of Surfaces and volumes of solids)	२२४—२६३
९	सान्तचलानयन (Definite Integrals)	२६४—३३२
१०	क्रमपरिवर्त्तन (Change of the variables in a multiple Integral)	३३३
११	वैशेषिकलन (The calculus of variations)	४१९—४४



पञ्चमाध्याय।

दो वा अनेक चलराशियों के वश से चलानयन।

वा द्विगुण चल।

५८। पिछले अध्यायो मे उन चलानयनो का वर्णन है जिन मे एक ही चल है अर्थात् जब तात्कालिक सम्बन्ध फ(य) इस चाल का है तब इस के चलानयन का वर्णन हो चुका। परन्तु चलनकलन से जहाँ दो चलराशि वा अनेक चलराशि के फल हों वहाँ सिद्ध है कि

$$स = फ(य,र) \text{ तो } \frac{ता^2स}{तायतार} = फा(य,र) \text{ वा } स = फ(य,र,ल) \text{ तो}$$

$$\frac{ता^3स}{तायतारताल} = फा(य,र,ल)$$ इस लिये अब इस अध्याय का मुख्य उद्देश्य यह है कि फा(य,र) वा फा(य,र,ल) परसे स के मान को लेआनेका नियम जानना।

५९। चलनकलन के (६)वे अध्याय से प्रसिद्ध है कि

$$\frac{ता^2स}{ताय\, तार} = \frac{ता}{ताय}\left[\frac{तास}{तार}\right] = \frac{तास_1}{ताय} = फ(य,र)$$

इस लिये $स_1 = \int फ(य,र)ताय$ यह ठीक पिछले अध्यायों से सिद्ध हो जायगा यदि फल मे र को स्थिर मान लो। मानो कि

$$\int फ(य,र)\, ताय = फा(य,र) \text{ इस लिये } \frac{तास}{तार} = फा(य,र)$$

$\therefore स = \int फा(य,र)\, तार$ यह भी पिछले अध्यायो से प्रसिद्ध हो जायगा यदि इस मे य को स्थिर मानो।

यह भी विचारो तो जिस तरह से $\frac{ता^2स}{तायतार}$ इस का मान चलनकलन से आता है ठीक उस के विपरीत क्रिया से यहाँ स आता है।

६०। चलनकलन के (६)वे अध्याय से सिद्ध है कि $\frac{ता^2स}{तायतार} = \frac{ता^2स}{तारताय}$

इस लिये

$स = \int फा(य,र)तार = \int \{ \int फ(य,र)ताय \} तार$ वा, $स = \int \{ फ(य,र)तार \} ताय$
इस तरह से दो रीति स के जानने के लिये उत्पन्न होती है कि फ(य,र) मे पहले र को स्थिर मान ताय के वश से चल ज्ञान करो फिर इस चल मे य को स्थिर मान तार के वश से नया चल निकालो तो स का मान होगा। वा पहले य को स्थिर मान तार के वश से चल निकालो फिर इस मे र को स्थिर मान ताय के वश से चलज्ञान करो तो यही स का मान होगा।

इस प्रकार से स का दो मान आया। कल्पना करो कि एक मान श, दूसार $श_1$ है तो विपरीत क्रिया से

$$\frac{ता^2 श_1}{ताय\ तार} = फ\ (य,र) = \frac{ता^2 श}{तार\ ताय}$$ अन्तर करने से

$$o = \frac{ता^2 श_1}{ताय\ तार} - \frac{ता^2 श}{तायतार} = \frac{ता}{ताय}\left[\frac{ताश_1}{तार} - \frac{ताश}{तार}\right] = \frac{ता}{ताय}\left[\frac{ताश_2}{तार}\right]$$

यदि $श_1 - श = श_2$ इस लिये $\frac{ताश_2}{तार}$ यह य का कोई फल नही हो सकता सेवाय स्थिराङ्क के क्योंकि $\frac{ता(स्थि)}{ताय}$ यही शून्य के समान होता है इस लिये $\frac{ताश_2}{तार} = फि\ (र)$ $\therefore श_2 = \int फि\ (र)\ तार + स्थि$ इस मे भी स्थिराङ्क य का कोई फल होगा क्योंकि फि (र) मे य को स्थिर माना है। मानो कि स्थि = फी(य)
इस लिये $श_2 = श_1 - श = \int फि\ (र)\ तार + फी\ (य) = फा(र) + फी\ (य)$

यदि $\int फि\ (र)\ तार = फा\ (र)$

इस से यह सिद्ध होता है कि दोनो विधियो से जो दो प्रकार के स उत्पन्न होते हैं उनका अन्तर दो फलो के योग तुल्य है जिन मे एक केवल य का और दूसरा केवल र का फल है।

९१। पिछले प्रक्रम मे जो $स = \int \{ \int फ(य,र)ताय \} तार$ यह है इस मे यदि { } इस को उड़ा दे तो $\int\int फ(य,र)तायतार$ ऐसा होगा। अब यदि $\int\int फ(य,र)तायतार$ इस का अर्थ ऐसा समझे कि पहले ताय के वश मे चल निकाल फिर तार के वश से निकाला है तो { } इस के देने का कुछ आवश्यक नहीं। इसी प्रकार $\int\int फ(य,र)तारताय$ इस से यह समझो कि

पहले तार के वश से फिर ताय के वश से चल निकाला गया है। इसी तरह $\int\int\int$ फ(य, र, ल) तायतारताल इस से समझना चाहिये कि पहले ताय, तब तार, और फिर ताल के वश से चल का मान अपेक्षित है अर्थात् फल के पास जो ता रहे उस के वश से पहले फिर ज्यों ज्यों दूर में ता हैं क्रम से उन के वश से चल निकालना है।

मैंने लाघव के लिये बार बार अनेक कोष्ठ न लिखकर यह संकेत मान लिया है इस में कुछ विशेष नहीं चाहे उलटेही रीति से तुम उसी अर्थ को प्रकाश कर सकते हो अर्थात् जो ता सब से दूर हो उसी के वश से पहले फिर यथासन्नो के वश से।

जैसे यदि फ(य,र) = अय^{2}र + कर^{2}य तो

$\int\int$ फ(य,र) ताय तार = $\int\int$(अय^{2}र + कर^{2}य)तायतार

$$=\int\left[\frac{\text{अय}^3\text{र}}{3}+\frac{\text{कर}^2\text{य}^2}{2}\right]\text{तार}$$

$$=\frac{\text{अय}^3\text{र}^2}{6}+\frac{\text{कर}^3\text{य}^2}{6}=\frac{\text{य}^2\text{र}^2}{6}(\text{अय}+\text{कर})$$ यह पहला स का मान हुआ।

और $\int\int$फ(य,र) तार ताय = $\int\int$(अय^{2}र + कर^{2}य) तारताय

$$=\int\left[\frac{\text{अय}^2\text{र}^2}{2}+\frac{\text{कर}^3\text{य}}{3}\right]\text{ताय}$$

$$=\frac{\text{अय}^3\text{र}^2}{6}+\frac{\text{कर}^3\text{य}^2}{6}=\frac{\text{य}^2\text{र}^2}{6}(\text{अय}+\text{कर})$$ यह दूसरा स हुआ।

यहाँ पर स्थिराङ्कों को छोड़ दिया है।

६२। जब साठवें प्रक्रम से सिद्ध है कि

$\int\int$फ(य,र)तारताय—$\int\int$फ(य,र)तायतार = फि(य) + फी(र)

इस लिये $\int\int$फ(य,र)तारताय = $\int\int$फ(य,र)तायतार + फि(य) + फी(र) (१)

यहाँ यदि $\int$फ(य,र) ताय = फा(य,र) और $\int$फ(य,र)तार = फा$_1$(य,र)

तो $\int\int$फ(य,र) ताय तार = $\int$फा(य,र) तार = फा$_2$(य,र)

और $\int\int$फ(य,र) तारताय = $\int$फा$_1$(य,र)ताय = फा$_3$(य,र)

इस लिये $\int_{\text{ग}}^{\text{घ}}\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$फ(य,र)तारताय = $\int_{\text{ग}}^{\text{घ}}$ { फा$_1$(य,क)—फा$_1$(य,अ) } ताय

वा $\int_{\text{ग}}^{\text{घ}}\int_{\text{अ}}^{\text{क}}$फ(य,र)तारताय = $\int_{\text{ग}}^{\text{घ}}$फा$_1$(य,क)ताय—$\int_{\text{ग}}^{\text{घ}}$फा$_1$(य,अ)ताय

= फा$_3$(घ,क)—फा$_3$(ग,क)—फा$_3$(घ,अ) + फा$_3$(ग,अ), ... (२)

इसी तरह $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$फ(य,र)तायतार = $\int_{अ}^{क}$ { फा(घ,र)—फा(ग,र) } तार

= $\int_{अ}^{क}$फा(घ,र) तार—$\int_{अ}^{क}$फा(ग,र) तार

= $फा_२$(घ,क)—$फा_२$(घ,अ)—$फा_२$(ग,क) + $फा_२$(ग,अ) (३)

परंतु (१) से

$फा_३$(य,र) = $फा_२$(य,र) + फि(य) + फी(र)

इस लिये, $फा_३$(घ,क) = $फा_२$(घ,क) + फि(घ) + फी(क)

$फा_३$(ग,क) = $फा_२$(ग,क) + फि(ग) + फी(क)

$फा_३$(घ,अ) = $फा_२$(घ,अ) + फि(घ) + फी(अ)

$फी_३$(ग,अ) = $फा_२$(ग,अ) + फि(ग) + फी(अ)

इन का उत्थापन (२) मे देने से

{ $फा_३$ (घ,क) + $फा_३$ (ग,अ) } — { $फा_३$ (ग,क) + $फा_३$(घ,अ) }

= { $फा_२$ (घ,क) + $फा_२$ (ग,अ) } — { $फा_२$ (घ,अ) + $फा_२$(ग,क }

अर्थात् (२) और (३) तुल्य हुए। इस लिये इस पर से

$\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क}$फ(य,र) तार ताय = $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$फ(य,र) तायतार

यह सिद्ध हुआ।

९३। ऊपर के प्रक्रम से जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ उसे (२) प्रक्रम के ऐसा श्रेढ़ी द्वारा भी प्रकाश कर सकते है।

मानो फ(य,र) मे य के मान, अ से लेकर क तक बीच मे

अ, $य_१$, $य_२$, · $य_{न-१}$, क हैं।

जहाँ $य_१$—अ = $च_१$, $य_२$—$य_१$ = $च_२$ · · क—$य_{न-१}$ = $च_न$ ।

और र के मान ग से लेकर घ तक बीच मे

ग, $र_१$, $र_२$, · $र_{म-१}$, घ हैं

जहाँ $र_१$—ग = $ज_१$, $र_२$—$र_१$ = $ज_२$ घ—$र_{-१}$ = $ज_म$ ।

अब यहाँ यह इच्छा है कि $च_त ज_द$फ($य_{त-१}$, $र_{द-१}$) इस मे द के स्थान मे १, २, ३ · · म का और त के स्थान मे १, २, ३, न का उत्थापन देने से जो श्रेढ़ियाँ उत्पन्न होंगी उन का योग जाने। यहाँ न और म का मान अनन्त है।

लाघव के लिये कल्पना करो कि श्रेढ़ियो का कोई पद बनाने के लिये च ज फ(य,र) यह एक मुद्रा अर्थात् साँचा है जहाँ च, ज, और य, र के

स्थान में जिस पद का मान जानना होगा उस की संख्या रख देना होगा और $य_{०} = अ$, $र_{०} = ग$ ऐसा समझना। इस साँचे में च के स्थान में $\triangle य$ और ज के स्थान में $\triangle र$ को रख दें जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है तो साँचे का रूप $\triangle य \triangle र$ फ(य,र) ऐसा होगा।

जैसे किसी खेलौने के साँचे में मिट्टी, लोहा चाँदी, सोना इत्यादि के रखने से जितनी मूर्त्तियाँ बनेगी सब के मोल और रंग में तो फ़र्क परन्तु रूप एकसा होगा इसी तरह इस साँचे से जितने पद बनेगे सब के रंग और मोल अर्थात् मान तो भिन्न भिन्न परन्तु रूप एकसा होगा।

साँचे में त के स्थान में १, द के स्थान मे १, २, ३ · म का उत्थापन देने से

$$च_{१} \{ ज_{१}फ(अ,ग) + ज_{२}फ(अ,र_{१}) + ज_{३}फ(अ,र_{२}) + \cdots ज_{म}फ(अ,र_{म-१}) \} \cdot \cdot \quad (१) \text{ श्रेढ़ी}$$

त के स्थान में २ का और द के स्थान में १, २, · म का उत्थापन देने से

$$च_{२} \{ ज_{१}फ(य_{१},ग) + ज_{२}फ(य_{१},र_{१}) + ज_{३}फ(य_{१},र_{२}) + \cdots + ज_{म}फ(य_{१},र_{म-१}) \cdots \quad (२) \text{ श्रेढ़ी}$$

इसी तरह

$$च_{३} \{ ज_{१}फ(य_{२},ग) + ज_{२}फ(य_{२},र_{१}) + ज_{३}फ(य_{२},र_{२}) + \cdot + ज_{म}फ(य_{२},र_{म-१}) \cdots \quad (३) \text{ श्रेढ़ी}$$

$$\vdots$$

$$च_{त+१} \{ ज_{१}फ(य_{त},ग) + ज_{२}फ(य_{त},र_{१}) + ज_{३}फ(य_{त},र_{२}) + \cdot \cdot ज_{म}फ(य_{त},र_{म-१}) \} \cdot \cdot (त+१) \text{ श्रेढ़ी}$$

$$\vdots$$

$$च_{न} \{ ज_{१}फ(य_{न-१},ग) + ज_{२}फ(य_{न-१},र_{१}) + ज_{३}फ(य_{न-१}) + \cdots + ज_{म}फ(य_{न-१},र_{म-१}) \} \cdots (न) \text{ श्रेढ़ी}$$

इन में यदि $म = \infty$ तो { } कोष्ठकान्तर्गत (त + १) श्रेढ़ी का योग (२) प्रक्रम से $\int_{ग}^{घ}$फ($य_{त}$,र) तार यह होगा। कल्पना करो कि यह फा ($य_{त}$) के समान है तो त के स्थान मे ०, १, २, · · · · न—१ का उत्थापन देने से क्रम से ऊपर के श्रेढ़ियो का मान।

$$\left. \begin{array}{l} च_{१}फा(अ) \\ च_{२}फा(य_{१}) \\ च_{३}फा(य_{२}) \\ \vdots \\ च_{न}फा(य_{न-१}) \end{array} \right\}$$

इन का योग अब (२) ही प्रक्रम से सिद्ध है कि यदि $न = \infty$ तो $\int_{अ}^{क}$फा(य)ताय यह अर्थात् $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$फ(य,र) तारताय यह होगा।

इसी तरह यदि हर एक श्रेढ़ियो का { } कोष्ठकान्तर्गत ऊर्ध्वाधर एक एक पदो का पहले योग करो तो

$\int_{अ}^{क}$ फ(य,ग) ताय = फा$_1$(ग),फा$_1$(र$_1$) इत्यादि होगा फिर सब पदो का योग अर्थात् श्रेढ़ियो का योग = ज$_1$फा$_1$(र) + ज$_2$फा$_1$(र$_1$) + ज$_3$फा$_1$(र$_2$) + ·

$$+ \int ज_म फा_1(र_{म-1}) = \int_{ग}^{घ} फा_1(र)\ तार = \int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क} फ(य,र) तायतार$$

परन्तु श्रेढ़ियो के तिर्यक् पदो का योग कर वा ऊर्ध्वाधर पदो का योग कर फिर उन को जोड़ने से श्रेढ़ियो का योग तो एक ही होगा इस लिये

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य,र)तारताय = $\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क}$ फ(य,र) तायतार यह सिद्ध हुआ।

६४। जब निश्चय है कि $\int$फ(य,र)तार इस मे य स्थिर मान है तो

$\int_{फ_1(य)}^{फ_2(य)}$ फ(य,र) तार इस का भी मान जान सकते हैं फिर इस पर से

$\int_{अ}^{क}\int_{फ_1(य)}^{फ_2(य)}$ फ(य,र)तायतार इस का मान आजायगा।

यहाँ भी यदि (६३)वे प्रक्रम से श्रेढ़ियो की परम्परा बनावोगे तो विशेष इतना ही होगा कि ग, र$_1$, र$_2$ इत्यादि प्रत्येक श्रेढ़ियो मे य के वश से भिन्न भिन्न होगे जैसे (त + १) श्रेढ़ी के { } अन्तर्गत

ज$_1$फ(य$_त$,ग) + ज$_2$फ(य$_त$,र$_1$ + ज$_3$फ(य$_त$,र$_2$) + · ज$_म$फ(य$_त$,र$_{म-1}$)

इन पदो मे

ग = फ$_1$(य$_त$),ज$_1$ = र$_1$—फ$_1$(य$_त$),ज$_2$ = र$_2$—र$_1$, · · ज$_म$ = फ$_2$ (य$_त$)—र$_{म-1}$

ऐसा मानना पड़ेगा फिर पूर्ववत् सिद्ध कर सकते हो कि इन पदो का योग

$\int_{फ_1(य_त)}^{फ_2(य_त)}$ फ(य$_त$,र) तार यही होगा।

कल्पना करो कि $\int_{फ_1(य_त)}^{फ_2(य_त)}$ फ(य$_त$,र)तार

यह फा(य$_त$)के समान है तो, त के स्थान मे$_{0,1,2,}$ · न−१का उत्थापन देने से

$\int_{अ}^{क}\int_{फ_1(य)}^{फ_2(य)}$ फ(य,र) तारताय का भी मान जान जाओगे।

६५। यदि फ(य,र) = फा(य) × फि(र) तो तार के वश चलानयन से

$\int$फा(य) × फि(र)तार = फा(य) $\int$ फि(र)तार = फा(य)फि$_1$(र) + फा(य)स्थि जहाँ

$\int$ फि(र)तार = $फि_1$(र) + स्थि इस लिये

$\int_{ग}^{घ}$ फा(य) फि(र)तार = फा(य) { $फि_1$(घ)—$फि_1$(ग) }

और $\int$ फा(य) { $फि_1$(घ)-$फि_1$(ग) } ताय = { $फि_1$(घ)-$फि_1$(ग) } $\int$ फा(य)ताय

= { $फि_1$(घ)—$फि_1$(ग) } { $फा_1$(य) + $स्थि_1$ }

यदि $\int$ फा(य)ताय = $फा_1$(य) + $स्थि_1$

इस लिये

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फ(य) × फि(र)तारताय = { $फि_1$(घ)-$फि_1$(ग) } { $फा_1$(क)-$फा_1$(अ) }

= $\int_{ग}^{घ}$ फि(र)तार × $\int_{अ}^{क}$ फा(य)ताय

इस से यह सिद्ध होता है कि यदि अ, क, ग, घ स्थिराङ्क हो अर्थात् य, वा र का कोई फल न हों तो

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}$ फा(य) × फि(र)तारताय = $\int_{अ}^{क}$ फा(य)ताय × $\int_{ग}^{घ}$ फि(र)तार ऐसा होगा।

६६। इसी तरह जहाँ तीन चलराशि के वश से

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}\int_{त}^{थ}$ फ(य,र,ल)तालतारताय ऐसा स्वरूप हो वहाँ यह समझना चाहिये कि पहले र,य को स्थिर मान ताल के वश से त,थ के भीतर सान्तचल निकाला गया फिर इस मे य,ल को स्थिर मान, तार के वश से ग,घ के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया फिर इस का ताय के वश से अ,क के भीतर सान्तचल का मान निकाला गया है। इसे त्रिगुणचल कहते हैं।

६३प्रक्रम से फ(य,र,ल)△ल△र△य△इस साँचे से जो श्रेढ़ियाँ बनेंगी उन का (२)प्रक्रम से यदि योग करो तो वह

$\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ}\int_{त}^{थ}$ फ(य,र,ल)तालतारताय इसी के समान होगा।

विद्यार्थियो को चाहिये कि श्रेढ़ियो का रूप फैला कर उनके योग पर से परस्पर सब की तुलना कर अपना मन भरले।

यहाँ पूर्व युक्ति से प्रसिद्ध है कि थ, और त य,र के फल, घ और ग केवल य के फल हो सकते हैं परन्तु क और अ सर्वदा स्थिराङ्क ही रहेगे।

६७। इस प्रक्रम मे कुछ उदाहरण दिखलाते है।

(१) $\int\int$ ($य^2$ + र + $र^2$)तायतार इसका क्या मान होगा।

यहाँ $फ(य,र) = य^2 + र + र^2$

इस लिये $\int फ(य,र)\ ताय = य\left(\frac{य^2}{३} + र + र^2\right)$ र को स्थिर मानने से

फिर $\int\int फ(य,र) तायतार = \int य\left(\frac{य^2}{३} + र + र^2\right) तार = य\left[\frac{य^2 र}{३} + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३}\right]$

यको स्थिर मानने से

इस लिये $स = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३}$

यहाँ यदि $\int\int फ(य,र) तारताय$ इसका मान जानना हो तो पहले

$\int फ(य,र) तार = \int (य^2 + र + र^2) तार = य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३}$, य को स्थिर मानने से फिर

$\int\int फ(य,र) तारताय$

$= \int\left[\left(य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३}\right]\right. ताय = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३}$ यह दूसरा स हुआ। दोनो स्थानों में स्थिराङ्क छोड़ दिया है। स्थिराङ्क लेने से पहले

$\int फ(य,र)\ ताय = \int (य^2 + र + र^2) ताय = \frac{य^3}{३} + र\ य + र^2\ य + स्थि$

फिर $\int\int फ(य,र) तायतार = \int\left(\frac{य^3}{३} + र\ य + र^2 य + स्थि\right) तार$

$= \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} + स्थि\ र + स्थि_1 = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} + फी\ (र)$

यह स का मान हुआ।

फिर $\int फ(य,र)\ तार = \int (य^2 + र + र^2) तार = य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३} — स्थि_2$

और $\int\int फ(य,र) तारताय = \int \left(य^2 र + \frac{र^2}{२} + \frac{र^3}{३} — स्थि_2\right)\ ताय$

$= \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} — स्थि_2 य — स्थि_3 = \frac{य^3 र}{३} + \frac{र^2 य}{२} + \frac{र^3 य}{३} — फा\ (य)$

इस लिये दोनो स का अन्तर फी (र) + फा(य) यह हुआ।

(२) $\int\int फ(य,र) तारताय$ इस का क्या मान होगा।

यदि $फ(य,र) = ज्यायर$

यहाँ $\int फ(य,र)\ तार = \int ज्यायर\ तार = — \frac{कोज्यायर}{य}$।

और $\int\int$ फ(य,र) तार ताय $= -\int \frac{\text{कोज्या(यर)ताय}}{\text{य}}$

$= -\int \frac{\text{कोज्यायर तायर}}{\text{यर}} = -\int \frac{\text{कोज्यालताल}}{\text{ल}}$, यदि ल = यर,

परन्तु

$$\frac{\text{कोज्याल}}{\text{ल}} = \frac{१ - \frac{\text{ल}^२}{|२} + \frac{\text{ल}^४}{|४} - \frac{\text{ल}^६}{|६} + \cdots}{\text{ल}} = \frac{१}{\text{ल}} - \frac{\text{ल}}{|२} + \frac{\text{ल}^३}{|४} - \frac{\text{ल}^५}{|६} + \cdots$$

इस लिये

$$-\int \frac{\text{कोज्यालताल}}{\text{ल}} = -\int \frac{\text{कोज्यायरतायर}}{\text{यर}} = \text{लाल} + \frac{\text{ल}^२}{२|२} - \frac{\text{ल}^४}{४|४} + \frac{\text{ल}^६}{६|६} - \cdots$$

$= -\text{लायर} + \frac{\text{य}^२\text{र}^२}{२|२} - \frac{\text{य}^४\text{र}^४}{४|४} + \frac{\text{य}^६\text{र}^६}{६|६} - \cdots$, यही उत्तर हुआ।

(३) (२)उदाहरण मे $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{०}^{१}$ फ(य,र)तारताय का क्या मान होगा।

(२) उदाहरण से $\int$ फ(य,र)तार $= -\frac{\text{कोज्यायर}}{\text{य}}$

इस लिये $\int_{०}^{१}$ फ(य,र)तार $= -\frac{\text{कोज्याय}}{\text{य}} + \frac{१}{\text{य}}$

और $\frac{१}{\text{य}} - \frac{\text{कोज्याय}}{\text{य}} = -\frac{१}{\text{य}} + \frac{\text{य}}{|२} - \frac{\text{य}^३}{|४} + \cdots + \frac{१}{\text{य}}$

$= \frac{\text{य}}{|२} - \frac{\text{य}^३}{|४} + \frac{\text{य}^५}{|६} - \frac{\text{य}^७}{|८} + \cdots$

इस लिये $\int\int_{०}^{१}$ फ(य,र)तारताय $= \frac{\text{य}^२}{२|२} - \frac{\text{य}^४}{४|४} + \frac{\text{य}^६}{६|६} - \frac{\text{य}^८}{८|८} + \cdots$

और $\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{०}^{१}$ फ(य,र)तारताय $= \frac{\text{क}^२-\text{अ}^२}{२|२} - \frac{\text{क}^४-\text{अ}^४}{४|४} + \frac{\text{क}^६-\text{अ}^६}{६|६} - \frac{\text{क}^८-\text{अ}^८}{८|८} +$

यही उत्तर हुआ।

(४) $\int_{०}^{\text{अ}}\int_{०}^{\text{य}}\int_{०}^{\text{य+र}} \text{इ}^{\text{य+र+ल}}$ तालतारताय इस का मान जानना चाहिये।

यहाँ $\int \text{इ}^{\text{य+र+ल}}\text{ताल} = \text{इ}^{\text{य+र+ल}}$, य, और र को स्थिर मानने से

इस लिये $\int_{०}^{\text{य+र}} \text{इ}^{\text{य+र+ल}}\text{ताल} = \text{इ}^{२\text{य}+२\text{र}} - \text{इ}^{\text{य+र}}$।

$\int\int_{०}^{\text{य+र}} \text{इ}^{\text{य+र+ल}}\text{तालतार} = \int \text{इ}^{२\text{य}+२\text{र}}\text{तार} - \int \text{इ}^{\text{य+र}}\text{तार}$

२

$= \frac{इ^{२य+२र}}{२} - इ^{य+र}$ इस लिये

$\int_{०}^{य}\int_{०}^{य+र} इ^{य+र+ल} तालतार = \frac{इ^{४य}}{२} - \frac{इ^{२य}}{२} - इ^{२य} + इ^{य} = \frac{इ^{४य}}{२} - \frac{३}{२} इ^{२य} + इ^{य}$

और $\int\int_{०}^{य}\int_{०}^{य+र} इ^{य+र+ल} तालतारताय = \frac{इ^{४य}}{८} - \frac{३इ^{२य}}{४} + इ^{य}$

इस लिये

$\int_{०}^{अ}\int_{०}^{य}\int_{०}^{य+र} इ^{य+र+ल} तालतारताय = \frac{इ^{४अ}}{८} - \frac{१}{८} - \frac{३}{४} इ^{२अ} + \frac{३}{४} + इ^{अ} - १$

$= \frac{इ^{४अ}}{८} - \frac{३}{४} इ^{२अ} + इ^{अ} - \frac{३}{८}$ यही उत्तर हुआ ।

(५) यदि $फ(य,र) = (य^{२} + य)(र^{३} + र)$

तो $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ} फ(य,र) तारताय$ इस का क्या मान होगा ।

यहाँ $\int फ(य,र) तार = (य^{२} + य)\left[\frac{र^{४}}{४} + \frac{र^{२}}{२}\right]$

$\int_{ग}^{घ} फ(य,र) तार = (य^{२} + य)\left[\frac{घ^{४} - ग^{४}}{४} + \frac{घ^{२} - ग^{२}}{२}\right]$

फिर $\int\int_{ग}^{घ} फ(य,र) तारताय = \left[\frac{य^{३}}{३} + \frac{य^{२}}{२}\right]\left[\frac{घ^{४} - ग^{४}}{४} + \frac{घ^{२} - ग^{२}}{२}\right]$

इस लिये $\int_{अ}^{क}\int_{ग}^{घ} फ(य,र) तारताय$

$= \left[\frac{क^{३} - अ^{३}}{३} + \frac{क^{२} - अ^{२}}{२}\right]\left[\frac{घ^{४} - ग^{४}}{४} + \frac{घ^{२} + ग^{२}}{२}\right]$ यह

$\int_{अ}^{क}(य^{२} + य) ताय \times \int_{ग}^{घ}(र^{३} + र) तार$ इस के तुल्य होता है ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। $\frac{(\frac{अ}{ग} - कय) ताय}{\sqrt{(अ + य\sqrt{ग - कय})(कअ + य\sqrt{ग - अ})}}$ इस का मान क्या होगा ।

यहाँ $र = \frac{अ}{य} + कय$ कल्पना करो तो चल का मान $कोज्या^{-१} \frac{र}{\sqrt{(ग+४अक)}}$

२। $\int \frac{२(म^{२}—१) \text{ स्पयताय}}{१+म^{२}स्प^{२}य}$ इस का क्या मान होगा।

उ० $ला (कोज्या^{२}य + म^{२}ज्या^{२}य)$

३। सिद्ध करो कि $\int \frac{ताय}{य^{न+१}\sqrt{१+(\frac{अ}{य})^{२न}}} = \frac{१}{नअ^{न}} ला \frac{य^{न}}{अ^{न}+\sqrt{अ^{२न}+य^{२न}}}$

४। सिद्ध करो कि $\int \frac{१-स्पय}{१+स्पय} ताय = ला\ ज्या\ (\frac{\pi}{४}+य)—य$

५। सिद्ध करो कि $\frac{३}{२} \frac{य^{\frac{१}{२}}}{\sqrt{(अ^{३}-य^{३})}} = ज्या^{-१}\frac{य^{\frac{३}{२}}}{अ^{\frac{३}{२}}}$ (मानो कि $र = य^{\frac{३}{२}}$)

६। सिद्ध करो कि

$$\int \frac{४अ^{३}ताय}{य^{४}+अ^{२}य^{२}+अ^{४}} = ला\frac{य^{२}+अय+अ^{२}}{य^{२}—अय+अ^{२}} + \frac{२}{\sqrt{३}} स्प^{-१}\frac{यअ\sqrt{३}}{अ^{२}—य^{२}}$$

७। सिद्ध करो कि यदि $प = \frac{\pi}{न}$ और $न = \infty$ तो

$\{ज्यापज्या२पज्या३प \cdot \quad \cdot ज्याप\ (न-१)\}^{\frac{१}{न}} = \frac{१}{२}$

८। सिद्ध करो कि यदि $प = \frac{\pi}{न}$ और न = अनन्त तो

$\{स्पपस्प२पस्प३प \cdots\cdots स्पप\ (न—१)\}^{\frac{१}{न}} = १$

९। सिद्ध करो कि यदि $प = \frac{\pi}{न}$ और $न = \infty$ तो

$कोज्यापकोज्या२पकोज्या३प \cdot \quad \cdot\cdot कोज्याप\ (न—१)$

$= ज्यापज्या२पज्या३प \quad \cdot\cdot ज्याप\ (न—१)$

१०। सिद्ध करो कि यदि $फ(य,र) = यरकोज्यायर$ तो यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें तो $फ(य,र) —\int\int फ(य,र)तारताय = कोज्यायर\ (यर+१)$

११। सिद्ध करो कि यदि $\int_{क}^{अ} फ(य)ताय = १$ और फ(य) सर्वदा धन हो तो

$\{\int_{क}^{अ} फ(य)कोज्यागयताय\}^{२} + \{\int_{क}^{अ} फ(य)ज्यागयताय\}^{२} \angle १$

यहाँ (२)प्रक्रम और (४०)वे प्रक्रम से पहले सिद्ध करो कि

$\int_{क}^{अ} फ(य)ताय = (अ—क)\ फ\{क+प\ (अ—क)\} = १$

इस लिये $\int_{क}^{अ} \{फ(य)\}^{२}ताय = \int_{क}^{अ} फ(य)\ फ(य)ताय =$

$$= फ\{क+प(अ-क)\}\int_{क}^{अ} फ(य)ताय = फ\{क+प(अ-क)\}$$

और $\int_{क}^{अ}$ कोज्या^{2}गयताय $= \frac{1}{ग}\int_{क}^{अ}$ कोज्या^{2}गयतायग

$$= \frac{1}{ग}\left\{\frac{गअ-कग}{2} + \frac{ज्या2अग - ज्या2गक}{4}\right\}$$

(क्योंकि $\int$ कोज्या^{2}गयतायग $= \frac{यग}{2} + \frac{ज्या2गय}{4}$) इस लिये

$$\int_{क}^{अ}\{फ(य)\}^2 ताय \times \int_{क}^{अ} कोज्या^2 गयताय$$

$$= फ\{क+प(अ-क)\}\left\{\frac{अ-क}{2} + \frac{ज्या2अग - ज्या2गक}{4ग}\right\}$$

यह $\left\{\int_{क}^{अ} फ(य)\ कोज्यागयताय\right\}^2$ इस से बड़ा होगा (४अध्याय के १९वें प्रश्न से)

इसी तरह $\int$ ज्या^{2}गय ताय $= \frac{1}{ग}\int$ ज्या^{2}गय तायग $= \frac{यग}{2} - \frac{ज्या2गय}{4}$

इस लिये $\int_{क}^{अ}$ ज्या^{2}गय ताय $= \frac{1}{ग}\left\{\frac{अग-कग}{2} - \frac{ज्या2अग - ज्या2कग}{4}\right\}$

इस लिये $\int_{क}^{अ}\{फ(य)\}^2$ ताय $\times \int_{क}^{अ}$ ज्या^{2}गय ताय

$$\angle फ\{क+प(अ-क)\}\left\{\frac{अ-क}{2} - \frac{ज्या2अग - ज्या2कग}{4ग}\right\}$$

यह बड़ा होगा $\left\{\int_{क}^{अ} फ(य) ज्या गय\ ताय\right\}^2$ इस से।

और तब दोनों का योग $\angle फ\{क+प(अ-क\}\{अ-क\} = १$ यह बड़ा होगा $\left\{\int_{क}^{अ} फ(य)\ कोज्यागयताय\right\}^2 + \left\{\int_{क}^{अ} फ(य) ज्यागयताय\right\}^2$ इस से।

१२। सिद्ध करो कि यदि $\int_{क}^{अ} फ(य)ताय = १$ और फ(य) सर्वदा धन हो तो

$$\int_{क}^{अ} य\ फ(य)\ ताय > \left\{\int_{क}^{अ} यफ(य)\ ताय\right\}$$

६८। चलराशिकलन अब समाप्त हो गया। पिछले अध्यायों में जो अनेक सिद्धान्त और उदाहरण दिखला आये हैं उन्हीं का प्रपञ्च सब अगले अध्यायों में है।

जैसे व्यक्तगणित में परिकर्माष्टक और बीजगणित में वर्गप्रकृति पर्यन्त गणित मुख्य है आगे सब दोनों गणितों में इन्हीं का सर्वत्र प्रपञ्च है उसी तरह यहाँ भी आगे सर्वत्र पिछले सिद्धान्तों का ही प्रपञ्च है इस लिये विद्यार्थियों को चाहिये कि इन पांचों अध्यायों में जो कुछ लिखा गया है उन का अच्छी तरह से ध्यान देकर अभ्यास करें बिना उन के जाने अगले अध्यायों का ज्ञान होना अत्यन्त दुर्घट है।

इति पञ्चमाध्याय।

षष्ठाध्याय

वक्रक्षेत्रों का चापानयन।

६९। चलनकलन के १६वे अध्याय से सिद्ध है कि यदि किसी वक्र का $र = फ(य)$ ऐसा समीकरण हो तो $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$ ऐसा होगा

इस लिये $ताचा = \sqrt{ताय^2 + तार^2}$। यहाँ पर वक्र के समीकरण पर से ताचा का मान फा(य) ताय ऐसा होगा फिर पिछले अध्यायो के वल से $\int ताचा = चा + स्थि = \int ताय\sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}} = \int \sqrt{ताय^2 + तार^2} = \int तायफा(य)$ यह सिद्ध हो जायगा।

$चा + स्थि = \int ताय \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$ इस लिये कल्पना करो कि

जब $य = य_१$ तब $चा = चा_१$ और जब $य = य_२$ तब $चा = चा_२$

इस लिये $चा_२ - चा_१ = \int_{य_१}^{य_२} ताय \sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$

इस लिये दो कोटियो के वीच मे वक्र का जो चाप है उसके जानने के लिये स्थिराङ्क का कुछ भी प्रयोजन नही केवल $य_१$ और $य_२$ जो उन दो कोटियो के भुज हो उन के वीच $\int ताय\sqrt{१ + \frac{तार^2}{ताय^2}}$ इस का मान ले आना चाहिये।

७०। जिस परवलय (Parabola) का $र^2 = ४ अय$ यह समीकरण है उसके चाप का प्रमाण जानना है।

यहाँ $र^2 = ४ अय$, $\therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{२अ}{र}$ और $१ + \frac{तार^2}{ताय^2} = \frac{र^2 + ४अ^2}{र^2} = \frac{४अय + ४अ^2}{४ अय}$

$= \frac{य + अ}{य}$। इस लिये $\int \left[\frac{य + अ}{य}\right]^{\frac{1}{2}} ताय = \int \frac{य + अ}{\sqrt{य^2 + अय}} ताय$

$= \int \frac{य + \frac{अ}{२}}{\sqrt{य^2 + अय}} ताय + \int \frac{\frac{अ}{२} ताय}{\sqrt{य^2 + अय}} = \sqrt{य^2 + यअ} + \frac{अ}{२} ला\left(य + \frac{अ}{२} + \sqrt{य^2 + अय}\right)$

(९)वें प्रक्रम के (३) उदाहरण से।

इस लिये $चा + स्थि = \sqrt{य^2 + यअ} + \frac{अ}{२} ला\left(य + \frac{अ}{२} + \sqrt{य^2 + अय}\right) \cdots\cdots (१)$

इस में यदि $य = ०$ तो क्षेत्र लक्षण से $चा = ०$

इस लिये स्थि = $\frac{अ}{२}$ ला ($\frac{अ}{२}$)

इस का उत्थापन (१) में देने से

परवलय का चाप $= \sqrt{य^२ + यअ} + \frac{अ}{२}$ ला $(य + \frac{अ}{२} + \sqrt{य^२ + अय}) - \frac{अ}{२}$ ला $\frac{अ}{२}$

$$= \sqrt{य^२ + यअ} + \frac{अ}{२}ला \left[\frac{२य + अ + २\sqrt{य^२ + अय}}{अ}\right]$$

इस मे यदि य = अ तो नाभी से जो लम्ब य अक्ष पर होगा वह एक भाग मे जहाँ परवलय को काटेगा वहाँ से शिरः स्थान तक का चाप मान $अ\sqrt{२} + \frac{अ}{२}ला \left[\frac{३अ + २\sqrt{२अ^२}}{अ}\right] = अ\sqrt{२} + \frac{अ}{२}ला\,(३ + २\sqrt{२})$ यह हुआ

७१। चक्रालद का चापानयन (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का ११वाँ वक्र देखो)

इस में $\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\frac{२क}{य}}$ (चलनकलन का ३८८ पृष्ठ देखो)

इस लिये $\int ताचा = चा = (२क)^{\frac{१}{२}} य^{-\frac{१}{२}} ताय = २\,(२क)^{\frac{१}{२}}\,(य)^{\frac{१}{२}} = \sqrt{८कय}$

यहाँ क्षेत्रलक्षण से जब य = ० तब चा = ० इस लिये स्थिराङ्क का मान शून्य होगा।

७२। जिस वक्र का $र = अ\, य^{\frac{म'}{न'}}$ यह समीकरण है उसके चाप का आनयन।

$$र = अय^{\frac{म'}{न'}} \therefore \frac{तार}{ताय} = \frac{म'}{न'} अय^{\frac{म'}{न'} - १}$$

और $\sqrt{\frac{तार^२}{ताय^२} + १} = \sqrt{१ + \frac{म'^२ अ^२}{न'^२} य^{\frac{२म' - २न'}{न'}}}$

अब $\int ताय \sqrt{१ + \frac{म'^२ अ^२}{न'^२} य^{\frac{२म' - २न'}{न'}}}$ इस का मान १२वें प्रक्रम के (४)

उदाहरण मे यदि $\frac{प}{व} = \frac{१}{२}$ । म = १, न = $\frac{२म' - २न'}{न'}$ मानो तो

$\frac{म}{न} = \frac{न'}{२(म' - न')}$ यह यदि अभिन्न और धन हो तो विश्लिष्ट हो जायगा।

अथवा $\frac{न'}{२(म' - न')} + \frac{१}{२}$ यह अभिन्न और ऋण हो तो भी उसी उदाहरण से

चल का मान विदित हो जायगा। यदि पहला ऋण अभिन्न दूसरा धन अभिन्न हो तो भी द्वितीयाध्याय से चल का मान विदित हो जायगा।

जैसे यदि $\frac{म}{न} = \frac{३}{२}$ तो $\frac{म - न}{न} = \frac{१}{२}$ $\quad \frac{न}{२(म - न)} = १$ अभिन्न

इस लिये $\sqrt{१ + \frac{तार^२}{ताय^२}} = \sqrt{१ + \frac{९अ^२}{४} य} = \frac{३अ}{२}\sqrt{\frac{४}{९अ^२} + य}$

इस लिये $\int ताचा = चा + स्थि = \frac{३अ}{२}\int \left[\frac{४}{९अ^२} + य\right]^{\frac{१}{२}} ताय = अ\left[\frac{४}{९अ^२} + य\right]^{\frac{३}{२}}$

इस मे यदि य = ० तो क्षेत्रलक्षण से चा = ० इस लिये

$स्थि = अ \times \frac{८}{२७अ^३} = \frac{८}{२७अ^२}$ इस का उत्थापन देने से

$$चा = \left\{\left[\frac{४}{९अ^२} + य\right]^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{२७अ^२}\right\}$$

७३। कातन्वली (Catenary) के चाप का आनयन।

इस मे $र = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$ इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

और $\sqrt{१ + \frac{तार^२}{ताय^२}} = \sqrt{\frac{१}{४}\left(इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{-\frac{२य}{ग}} + २\right)} = \frac{१}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

इसलिये $\int ताय \sqrt{१ + \frac{तार^२}{ताय^२}} = चा + स्थि = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

यदि मूल विन्दु से कणना करे जहाँ य = ० तो यहाँ स्थिराङ्क शून्य होगा।

७४। जिस वक्र का $य^{\frac{२}{३}} + र^{\frac{२}{३}} = अ^{\frac{२}{३}}$ यह समीकरण है उस के चाप का आनयन।

यहाँ $\frac{तार}{ताय} = -\frac{र^{\frac{१}{३}}}{य^{\frac{१}{३}}}$ इस लिये $\frac{ताचा}{ताय} = \left[\frac{य^{\frac{२}{३}} + र^{\frac{२}{३}}}{य^{\frac{२}{३}}}\right]^{\frac{१}{२}} = \frac{अ^{\frac{१}{३}}}{य^{\frac{१}{३}}}$

इस लिये $च = अ^{\frac{१}{३}}\int ताय\, य^{-\frac{१}{३}} = \frac{३}{२}अ^{\frac{१}{३}}य^{\frac{२}{३}} + स्थि$

यहाँ य = ० उस विन्दु से यदि गणना करें तो स्थिराङ्क शून्य होगा।

चलितवृत्त का व्यासार्द्ध यदि स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध का चतुर्थांश हो तो इस वक्र को एक प्रकार का अनिचक्राल्द कहते हैं। (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वाँ वक्र देखो)।

७५। ६९ वें प्रक्रम से यह भी कह सकते हो कि यदि र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध का ज्ञान करें तो $\frac{ताचा}{तार} = \sqrt{१ + \frac{ताय^२}{तार^२}}$, ऐसा होगा। इसलिये

$$चा = \int तार\sqrt{१ + \frac{ताय^२}{तार^२}} + स्थि। \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (१)$$

इसी तरह यदि य और र तीसरे चलराशि का फल हो तो चलनकलन के १५३ वे प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$\int ताचा = चा = \int\sqrt{\left[\frac{ताय^२}{ताका^२} + \frac{तार^२}{ताका^२}\right]} ताका + स्थि \cdots\cdots (२)$$

ऐसे ही चलनकलन के १५५ वे प्रक्रम से यदि अक्षीय भुज युग्म हो तो

$$चा = \int\left[श्रु^२ + \frac{ताश्रु^२}{ताभ^२}\right]^{\frac{१}{२}} ताभ + स्थि \cdots\cdots\cdots\cdots (३)$$

$$वा\ चा = \int\left[१ + श्रु^२\frac{ताभ^२}{ताश्रु^२}\right]^{\frac{१}{२}} ताश्रु + स्थि \cdots\cdots\cdots\cdots (४)$$

अथवा यदि स्प भ = श्रु$\frac{ताभ}{ताश्रु}$ जहाँ भ, श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है तो

$$\left.\begin{array}{l} \frac{ताचा}{ताभ} = \frac{श्रु}{ज्याभ}\ इस\ लिये\ चा = \int\frac{श्रु}{ज्याभ} ताभ + स्थि \\ और\ \frac{ताचा}{ताश्रु} = \frac{१}{कोज्याभ},\ इसलिये\ चा = \int\frac{ताश्रु}{कोज्याभ} + स्थि \end{array}\right\}\cdots\cdots (५)$$

चलनकलन के १२१ वें प्रक्रम से ज्याभ $= \frac{ल}{श्र}$, और कोज्याभ $= \frac{\sqrt{श्रु^२ - ल^२}}{श्र}$

इन का उत्थापन (५) वें मे देने से

$$चा = \int\frac{श्रु^२ ताभ}{ल} + स्थि,\ और\ चा = \int\frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{श्रु^२ - ल^२}} + स्थि \cdots\cdots (६)$$

यहाँ ध्रुवविन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल है।

(चलनकलन का १४ वाँ अध्याय देखो)

इन सब पर से जहाँ जिस प्रकार से चलानयन में लाघव देख पड़े वहाँ उस प्रकार से चाप का मान निकालो।

जिन प्रकारों मे मूल लेने से ताचा का मान आता है वहाँ बीजगणित से स्पष्ट है कि एक ताचा का मान धन और दूसरा ऋण होगा इस लिये बुद्धिमानों को

चाहिये कि प्रश्न के अनुसार जहाँ जिस का प्रयोजन हो उसको ग्रहण करे जैसे ७२ वे प्रक्रम में कातन्वली के चापानयन मे जो $\frac{१}{४}(इ^{\frac{२य}{ग}} + इ^{-\frac{२य}{ग}} + २)$ इस का मूल लिया है वह धन माना है इस पर से जो चाप का मान आता है वह भी धन आता है अर्थात् मूलविन्दु से य अक्ष मे दहनी और यदि य का मान धन मानो तो र अक्ष से दहने भाग में जो वक्र का भाग है उस के चाप का मान वह है। और इसी मे यदि मूल ऋण मानो तो चाप का मान पूर्व ही के तुल्य ऋण आवेगा ऐसी दशा मे य, अक्ष मे मूल विन्दु से वाम भाग मे य और र अक्ष से वाम भाग मे जो वक्र खण्ड है उसके चाप का मान समझना चाहिये। (चलकलन में २८६ प्रक्रम का १३ वॉ वक्र देखो)।

७६। लाघुरिक्थिक वक्र के चाप का आनयन।

यहाँ वक्र का समीकरण $र = अइ^{\frac{य}{क}}$ (चलनक०, २८६ प्र०, १ वक्र)

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \frac{अ}{क} इ^{\frac{य}{क}} = \frac{र}{क} \therefore \frac{\sqrt{र^२ + क^२}}{क} = \sqrt{१ + \frac{तार^२}{ताय^२}}$

और $चा = \frac{१}{क} \int \sqrt{(र^२ + क^२)}\, ताय$ देखो यहाँ फल मे र का मान है और चल ताय के वश से निकालना है इस लिये र के स्थान मे जब तक कोई तत्तुल्य य के फल का उत्थापन न दोगे तब तक चलज्ञान कठिन है। इस लिये यहाँ ७५ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{ताय}{तार} = \frac{क}{र} \text{ और } \sqrt{१ + \frac{ताय^२}{तार^२}} = \frac{ताचा}{तार} = \frac{\sqrt{र^२ + क^२}}{र}$$

$$\text{और } चा = \int \frac{\sqrt{(र^२ + क^२)}तार}{र} = \int \frac{क^२ तार}{र\sqrt{(र^२ + क^२)}} + \int \frac{रतार}{\sqrt{(र^२ + क^२)}}$$

$= क\, ला \frac{र}{क + \sqrt{(र^२ + क^२)}} + \sqrt{र^२ + क^२} + स्थि$ (१२ वे प्रक्रम का २३ वॉ अभ्यास के लिये जो प्रश्न है उसे देखो)

अब यहाँ जो य = ० तो र = अ इस मे मानो कि चा = $चा_१$ तो

$$चा_१ = क \cdot ला \frac{अ}{क + \sqrt{अ^२ + क^२}} + \sqrt{अ^२ + क^२} + स्थि$$

$$\text{इसलिये } चा - चा_१ = क \cdot ला \frac{र(क + \sqrt{अ^२ + क^२})}{अ(क + \sqrt{र^२ + क^२})} + \sqrt{र^२ + क^२} - \sqrt{अ^२ + क^२}।$$

७७। दीर्घवृत्त के चाप का आनयन।

दीर्घवृत्त का समीकरण, $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}(अ^2 - य^2) \therefore \frac{र^2}{क^2} + \frac{य^2}{अ^2} = १$

(चलनकलन का १०९वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि य = अज्याप और र = ककोज्याप मान लें तो

$\frac{ताय}{ताप}$ = अकोज्याप, $\frac{तार}{ताप} = -$ कज्याप। अब ७५वें प्रक्रम के (२) समीकरण से $\frac{ताचा}{ताप} = \sqrt{(अ^2 कोज्या^2 प + क^2 ज्या^2 प)}$ इस लिये

$$चा = \int \sqrt{(अ^2 कोज्या^2 प + क^2 ज्या^2 प)} ताप = अ \int \sqrt{(कोज्या^2 प + \frac{क^2}{अ^2} ज्या^2 प)} ताप$$

$$= अ \int \sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)} ताप$$ यहाँ $१ - इ^2 = \frac{क^2}{अ^2}$ और अ = बृहद्व्यासार्द्ध,

क = लघुव्यासार्द्ध, $स्पप = \frac{कय}{अर} = \frac{य}{\sqrt{अ^2 - य^2}}$।

यहाँ $\sqrt{(१ - इ^2 ज्या^2 प)}$ इस का मान द्वियुक्पद सिद्धान्त से विना फैलाये चल ज्ञान नही हो सकता इस लिये फैलाने से

$$चा = अ \int (१ - \frac{१}{२} इ^2 ज्या^2 प - \frac{१.१}{२.४} इ^4 ज्या^4 प - \frac{१.१.३}{२.४.६} इ^6 ज्या^6 प - \cdots) ताप$$

यदि ० और अ के वीच य के मान में अथवा ० और $\frac{\pi}{२}$ के वीच प के मान मे यदि ऊपर के चल का ज्ञान ३५वे प्रक्रम के लघूकरण सिद्धान्त से वा १२वें प्रक्रम के १५वे उदाहरण से करो तो दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश

$$= अ \left\{ \int_0^{\frac{\pi}{२}} ताप - \frac{१}{२} इ^2 \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^2 पताप - \frac{१.१}{२.४} इ^4 \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^4 पताप - \frac{१.१.३}{२.४.६} इ^6 \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^6 प \cdots \right\}$$

$$= \frac{\pi अ}{२} \left[१ - \frac{१}{२^2} इ^2 - \frac{१^2.३}{२^2.४^2} इ^4 - \frac{१^2.३^2.५}{२^2.४^2.६^2} इ^6 - \frac{१^2.३^2.५^2.७}{२^2.४^2.६^2.८^2} इ^8 - \cdots \right]$$

इस का चौगुना करने से यदि प = २πअ = बृहद्व्यास से उत्पन्न वृत्त की परिधि। तो दीर्घवृत्त की परिधि

$$= प \left(१ - \frac{१}{२^2} इ^2 - \frac{१^2.३}{२^2.४^2} इ^4 - \frac{१^2.३^2.५}{२^2.४^2.६^2} इ^6 - \cdots \right)$$

इस मे यदि आदि के दो पदो को केवल ग्रहण करो और $इ^2$ का मान बहुत अल्प होने के कारण और पदो को छोड़ दो तो दीर्घवृत्त की परिधि $= प\,(१ - \frac{१}{२}\,इ^2)$

$$= प\left(\frac{४ - इ^2}{४}\right) = प\left(\frac{३ - \frac{क^2}{अ^2}}{४}\right) = प\left(\frac{३अ^2 - क^2}{४अ^2}\right)$$

यो अनेक प्रकार बना सकते हो (दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

७८। अतिपरवलय के चाप का आनयन।

इस का समीकरण $र^2 = \frac{क^2}{अ^2}\,(य^2 - अ^2)$ वा $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} = १$

(चलनकलन का १११ वाँ प्रक्रम देखो)

यहाँ यदि य = अछेप और र = कस्पष ऐसा मानो तो

$\frac{ताय}{ताष} = -$ अस्पपछेप, $\frac{तार}{ताष} = कछे^2प$

इसलिये ७५ वे प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{ताचा}{ताष} = \sqrt{(अ^2स्प^2पछे^2ष + क^2छे^4प)}$$

$$= \sqrt{(अ^2स्प^2प + अ^2स्प^4प + क^2स्प^4प + २क^2स्प^2ष + क^2)}$$

$$= \sqrt{\{(अ^2 + क^2)स्प^4प + स्प^2प(अ^2 + २क^2) + क^2\}}$$

$$= क\sqrt{\left\{\frac{अ^2 + क^2}{क^2}\,स्प^4प + \frac{अ^2 + २क^2}{क^2}\,स्प^2प + १\right\}}$$

इसको फैलाने से सर्वत्र स्पप का कोई घात रहेगा जिस के चल का ज्ञान ३७ वे प्रक्रम के (३) उदाहरण से स्पष्ट हो जायगा।

अथवा $र = \frac{क}{अ}\sqrt{य^2 - अ^2}$ इसी समीकरण से यहाँ

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{क}{अ}\,\frac{य}{\sqrt{(य^2 - अ^2)}} \therefore \frac{ताचा}{ताय} = \left\{\frac{(क^2 + अ^2)\,य^2 - अ^4}{अ^2\,(य^2 - अ^2)}\right\}^{\frac{१}{२}}$$

$$= \left[\frac{इ^2य^2 - अ^2}{य^2 - अ^2}\right]^{\frac{१}{२}} \text{ यदि } \frac{क^2 + अ^2}{अ^2} = इ^2$$

इस लिये

$$चा = \int\sqrt{\left[\frac{इ^2य^2 - अ^2}{य^2 - अ^2}\right]}\,ताय = अ\int\sqrt{\left[\frac{इ^2ल^2 - १}{ल^2 - १}\right]}\,ताल। \quad \{ \text{यदि } य = अल \}$$

$$= \text{अइ} \int \text{ल} \frac{\sqrt{(१ - \frac{१}{\text{इ}^२\text{ल}^२})}}{\sqrt{\text{ल}^२ - १}} \text{ताल}$$

$$= \text{अ} \left\{ \int \frac{\text{इल}}{\sqrt{(\text{ल}^२ - १)}} \left(१ - \frac{१}{२} \frac{१}{\text{इ}^२\text{ल}^२} - \frac{१}{२} \frac{१}{४} \frac{१}{\text{इ}^४\text{ल}^४} - \frac{१}{२} \frac{१.३}{४\ ६} \frac{१}{\text{इ}^६\text{ल}^६} - \cdots \right) \text{ताल} \right\}$$

$$= \text{अ} \left\{ \int \frac{\text{इल}}{\sqrt{(\text{ल}^२ - १)}} \text{ताल} - \frac{१}{२\text{इ}} \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^२ - १}} \right.$$

$$\left. - \frac{१.१}{२.४\text{इ}^३} \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}^३\sqrt{\text{ल}^२ - १}} - \frac{१.१.३}{२.४.६\text{इ}^५} \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}^५\sqrt{\text{ल}^२ - १}} \cdots \right\}$$

यहाँ $\frac{\text{ताल}}{\text{ल}^\text{म}\sqrt{\text{ल}^२ - १}} = \frac{१}{\text{म}-१} \frac{\sqrt{\text{ल}^२ - १}}{\text{ल}^{\text{म}-१}} + \frac{\text{म}-२}{\text{म}-१} \int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}^{\text{म}-२}\sqrt{\text{ल}^२ - १}}$ इस लघूकरण सिद्धान्त से आदि पद को छोड़ और सब पदों के चल का मान जान सकते हो।

और आदि पद $\frac{\text{इल}}{\sqrt{\text{ल}^२ - १}}$ ताल इस का चल $\text{इ}\sqrt{\text{ल}^२ - १}$ यह है।

यहाँ म का मान विषम है इस लिये सब खण्डों मे अन्त में $\int \frac{\text{ताल}}{\text{ल}\sqrt{\text{ल}^२ - १}}$ $= \text{छे}^{-१}\text{ल}$ यह होगा

यदि ० और अनन्त के बीच ल के मान में चाप का मान अपेक्षित हो तो ऊपर के लघूकरण सिद्धान्त से

$$\text{अइल} - \text{चा} = \frac{\pi\text{अ}}{२} \left(\frac{१}{२} \frac{१}{\text{इ}} + \frac{१.१}{२^२.४} \cdot \frac{१}{\text{इ}^३} + \frac{१.१.३^२}{२^२.४^२.६} \frac{१}{\text{इ}^५} \right.$$

$$\left. + \frac{१.१.३^२.५^२}{२^२.४^२.६^२.८} \cdot \frac{१}{\text{इ}^७} + \cdots \right)$$ यह सिद्ध होगा।

७९। आर्किमिडिज़ के सर्पिल का चापानयन (The Spiral of Archimedes) (चलनकलन मे २८६ प्रक्रम का (४) वक्र देखो)

इस का समीकरण $\text{श्रु} = \text{अष}$ इस लिये $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}} = \text{अ}$। ७५ प्रक्रम के (३) समीकरण से $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताष}} = \sqrt{\left[\text{श्रु}^२ + \frac{\text{ताश्रु}^२}{\text{ताष}^२} \right]}$

इस लिये $\text{चा} = \int \sqrt{\left[\text{श्रु}^२ + \frac{\text{ताश्रु}^२}{\text{ताष}^२} \right]} \text{ताष} = \int \sqrt{(\text{श्रु}^२ + \text{अ}^२)}\ \text{ताष}$

$$= अ \int \sqrt{(१+प^२)} ताप = \frac{अप}{२}\sqrt{१+प^२} + \frac{अ}{२} ला \{ प + \sqrt{१+प^२} \} + स्थि।$$

यदि प = ० तो चा = ० इस लिये स्थिराङ्क का मान्य शून्य होगा।

८०। जिस वक्र का श्रु = अ (१ + कोज्याप) यह समीकरण है उस के चाप का मान जानना। (चलनकलन के २८५ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो) यहाँ $\frac{ताश्रु}{ताप} = -$ अज्याप इस लिये

$$चा = \int \sqrt{\{ अ^२(१ + कोज्याप)^२ + अ^२ज्या^२प \}} ताप$$

$$= अ \int \sqrt{(२ + २कोज्याप)} ताप = २अ \int कोज्या \frac{प}{२} ताप = ४ अज्या\frac{प}{२} + स्थि।$$

यदि चाप की गणना वहाँ से करे जहाँ प = ० तो स्थिराङ्क का मान शून्य होगा। मूल का मान ऋण लेने से दूसरी दिशा का चाप $= -४अज्या\frac{प}{२}$ ऐसा होगा। यहाँ यदि प = π तो ऊपर के आधे का प्रमाण $= ४अज्या\frac{प}{२} = ४अ$ और ऋण मान से नीचे के आधे का प्रमाण $= ४अज्या\frac{प}{२} = ४अ$।

इस लिये समग्र चाप का प्रमाण = ८अ यह हुआ।

इस वक्र को अङ्गरेजी मे क्यारडियाइड (Cardioid) कहते हैं।

८१। लाघुरिकथिक सर्पिल के चाप आनयन।

(चलनकलन मे २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो)

यहाँ $श्रु = अ इ^{\frac{प}{क}}$, इस लिये $प = क ला\frac{श्रु}{अ}$ और $\frac{ताप}{ताश्रु} = \frac{क}{श्रु}$

इस लिये ७५ प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$चा = \int \sqrt{\left[श्रु^२\frac{ताप^२}{ताश्रु^२} + १ \right]} ताश्रु = \int \sqrt{(क^२+१)} ताश्रु = श्रु\sqrt{क^२+१}$$

श्रुति का प्रमाण $श्रु_१$, $श्रु_२$ मानो तो उन के बीच के चाप का प्रमाण $(श्रु_२ - श्रु_१)\sqrt{क^२+१}$ यह होगा। . . (१)

चलनकलन से सिद्ध है कि इस सर्पिल मे श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण की स्पर्शरेखा सर्वदा स्थिर क है इस लिये इस कोण को यदि भ कहो तो (१) को $(श्रु_२ - श्रु_१)$ छेभ ऐसे भी लिख सकते हो

८२। अपचक्राकृत (Epicycloid) के चाप का आनयन।

(चलनकलन मे २८६ प्रक्रम का (१३) वक्र देखो)

इस मे चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि मूल विन्दु से स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान

$= ल = (अ + २क) ज्या \frac{अप}{२क}$ और $श्रु^2 = अ^2 + ४क (अ + क) ज्या^2 \frac{अप}{२क}$

इस लिये $ल^2 = \frac{ग^2(श्रु^2 - अ^2)}{ग^2 - अ^2}$ जहाँ $ग = अ + २क$

अव ७५ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण से

$$चा = \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ} \int \frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}} = - \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ} \sqrt{(ग^2 - श्रु^2)} + स्थि$$

परमनीच और परमउच्च मे जहाँ क्रम से अ, अ + २क = ग श्रुति है इन के बीच में

$$चाप का मान = {}^{अ+२क}_{अ} \frac{श्रुताश्रु}{\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}} = \frac{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}{अ} \sqrt{ग^2 - अ^2} = \frac{ग^2 - अ^2}{अ}$$

$$= \frac{(अ^2 + ४अक + ४क^2 - अ^2)}{अ} = \frac{४क(अ + क)}{अ}$$ इस लिये इस का दूना

$\frac{८क(अ+क)}{अ}$ यह अपचक्रालद के पूरे चाप का प्रमाण है जिस की उत्पत्ति चलितवृत्त के एक वार समग्र भ्रमण करने से होगी।

८३। इसी प्रकार अतिचक्रालद (Hypocycloid) के चापानयन में भी

$ल^2 = \frac{ग^2(अ^2 - श्रु^2)}{अ}$, जहाँ $ग = अ - २क$

मानो कि $ग^2 \angle अ^2$ तो $\frac{ताचा}{ताश्रु} = \pm \frac{\sqrt{अ^2 - ग^2}}{अ} \frac{श्रु}{\sqrt{(श्रु^2 - ग^2)}}$ इस पर से पूर्ववत्

$चा = \pm \frac{\sqrt{अ^2 - ग^2}}{अ} \sqrt{श्रु^2 - ग^2} + स्थि$ और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

$चाप = \frac{८क(अ-क)}{अ}$ ।

यदि $ग^2 7 अ^2$ तो पहले सम्वन्ध को अर्थात् $\frac{ताचा}{ताश्रु}$ इस के मान को

$\pm \frac{\sqrt{ग^2 - अ^2}}{अ} \frac{श्रु}{\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}}$ ऐसे लिख सकते हो। इस स्थिति मे क 7 अ तव चलितवृत्त के एक वार घूम जाने मे वक्र के चाप का प्रमाण $\frac{८क(क-अ)}{अ}$ यह होगा। जव अ = २क तव ग = ० और ल = ०। ऐसी स्थिति मे

$\frac{ताचा}{ताश्रु} = १$ इस लिये चा = श्रु + स्थि। और चलितवृत्त के एक वार घूम जाने में

चा = २ अ = स्थिरवृत्त का व्यास ।

यदि अ = क तो ल = $\frac{१}{०}$ और $\text{ग}^२ = \text{अ}^२$, श्रु = अ । ऐसी स्थिति मे अतिचक्रालद् विन्दु रूप होगा ।

जब $\text{ल}^२ = \dfrac{\text{ग}^२(\text{श्रु}^२ - \text{अ}^२)}{\text{ग}^२ - \text{अ}^२}$ $\therefore$ $\text{श्रु}^२ - \text{ल}^२ = \dfrac{\text{श्रु}^२\text{ग}^२ - \text{श्रु}^२\text{अ}^२ - \text{ग}^२\text{श्रु}^२ + \text{ग}^२\text{अ}^२}{\text{ग}^२ - \text{अ}^२}$

$= \dfrac{\text{अ}^२(\text{ग}^२ - \text{श्रु}^२)}{\text{ग}^२ - \text{अ}^२}$ $\therefore$ $\sqrt{\text{ग}^२ - \text{श्रु}^२} = \dfrac{\sqrt{\text{ग}^२ - \text{अ}^२}\sqrt{\text{श्रु}^२ - \text{ल}^२}}{\text{अ}}$ इस का उत्थापन अपचक्रालद के चापमान मे देने से चा $= \pm \dfrac{(\text{ग}^२ - \text{अ}^२)\sqrt{\text{श्रु}^२ - \text{ल}^२}}{\text{अ}^२} + \text{स्थि}$ ऐसा भी हो सकता है ।

८४। मूलविन्दु से वक्र के किसी स्पर्श रेखा पर पड़े लम्ब और लम्ब और य अक्ष से उत्पन्न कोण इन दोनो के वश से वक्र का चापानयन ।

कल्पना करो किसी वक्र का ना मूलविन्दु नार = र अक्ष, नाय = य अक्ष। व विन्दु की स्पर्शरेखा वल। ना से इस पर पड़ा हुआ लम्ब = ल और $\angle$लनाय = प है ।

वक्र मे मानो कि चाप की गणना अ विन्दु से आरम्भ हो कर व की ओर है। व विन्दु का भुज = य = नाम और कोटि = र = वम। म विन्दु से नाल पर पड़े हुए लम्ब का मूल विन्दु $\text{ल}_१$ और $\text{मल}_१$ पर व विन्दु से पड़े हुए लम्ब को $\text{वल}_२$ समझो। दोनो अक्षो को परस्पर लम्बरूप मान लो ।

त्रिकोणमिति से, नाल = ल = नाम कोज्याप + $\text{वल}_२$ = यकोज्याप + रज्याप

और वल = च = नाम ज्याप — $\text{मल}_२$ = यज्याप — रकोज्याप

चलनकलन से—कोस्पप = $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ क्योंकि गणना अ से व की ओर है इस लिये ज्यों ज्यों र बढ़ेगा त्यों त्यों य की गति ऋण होगी।

$\sqrt{\text{१} + \text{कोस्प}^{\text{२}}\text{प}} = \sqrt{\text{१} + \frac{\text{तार}^{\text{२}}}{\text{ताय}^{\text{२}}}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = -\text{कोछेप}$ (ऊपर की युक्ति से)

ताप के वश से ल का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से।

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{यज्याप} + \text{ज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{रकोज्याप}$$

$$= \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{ज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - (\text{यज्याप} - \text{रकोज्याप})$$

$$= \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{च} = -\text{च}$$

एक वार और तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{\text{ता}^{\text{२}}\text{ल}}{\text{ताप}^{\text{२}}} = -\frac{\text{ताच}}{\text{ताप}} = -(\text{ज्याप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्यापय} - \text{कोज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} + \text{ज्यापर})$$

$$= -\frac{\text{ज्या}^{\text{२}}\text{प}}{\text{ज्याप}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{कोज्याप}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल}$$

$$= \text{ज्या}^{\text{२}}\text{पकोछेप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \text{कोज्याप कोस्पप}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} - \text{ल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}(\text{ज्या}^{\text{२}}\text{पकोछेप} + \text{कोज्या}^{\text{२}}\text{पकोछेप}) - \text{ल}$$

$$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\text{कोछेप} - \text{ल} = -\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\cdot\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} - \text{ल} = -\text{ल} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$$

इस लिये चलानयन से

$$\int\frac{\text{ता}^{\text{२}}\text{ल}}{\text{ताप}^{\text{२}}}\text{ताप} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = -\int\text{लताप} - \int\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}\text{ताप} = -\int\text{लताप} - \text{चा} = \text{च}.$$

वा $\text{च} - \text{चा} = \int\text{लताप}$।

वक्र के समीकरण पर से और $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\text{कोस्पप}$ इस से य और र का मान प के रूप में आ सकता है इन का उत्थापन ल में देने से ल भी कोई प का फल होगा फिर चा = $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} + \int\text{ल ताप}$ इस पर से चाप का मान जान सकते हो। व की ओर गणना करने से चा का ऋण चिह्न छोड़ दिया है।

ऊपर जो प, ल इत्यादि का परस्पर सम्बन्ध दिखलाया है वह सब हम ने द्युचरचार नामक ग्रन्थ मे लिखा है। वालावबोध के लिये यहाँ भी थोड़ा सा दिखला दिया है।

ऊपर जो ल = यकोज्याप + रज्याप

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = -\text{च} = -\text{यज्याप} + \text{रकोज्याप}$$

ये सिद्ध हुए हैं इन पर से

लकोज्याप = यकोज्या²प + रज्यापकोज्याप

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}\text{ज्याप} = -\text{चज्याप} = -\text{यज्या}^2\text{प} + \text{रज्यापकोज्याप}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{अन्तर करने से} & \text{ल कोज्याप} - \text{ज्याप}\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{य} \\ \text{इसी प्रकार} & \text{ल ज्याप} + \text{कोज्याप}\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{र}\end{array}\right\} \qquad (१)$$

यदि एक ऐसे वक्र का ज्ञान करना हो जिस के चाप पर से उद्दिष्ट $\int$लताप इस का ज्ञान अपेक्षित हो जहाँ ल कोई प का फल है तो (१) समीकरण से स्पष्ट है कि ल, कोज्याप, ज्याप, और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$ इन सब पर से उस वक्र का भुज, और कोटि विदित हो जायँगे।

इसी क्षेत्र मे यदि वक्रजातीय वृत्त का केन्द्र ग और व्यासार्द्ध गव = वि मानो (चलनकलन का १७वाँ अध्याय देखो) तो चलनकलन के १६८ और १७१ प्रक्रमो से, वि = श्रु $\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}}$, इस लिये $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{श्रु}\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताचा}}$

और $\text{च} = \text{श्रुकोज्या}\angle\text{नावल} = -\text{श्रु}\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताच}}$

इसलिये $-\text{च} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}$।

ना विन्दु से वक्रजातीय व्यासार्द्ध के ऊपर नात लम्ब डालो तो स्पष्ट है कि नात = च = वल। और वक्र के प्रति विन्दु के भिन्न भिन्न जो वक्रजातीय वृत्तकेन्द्र होंगे उन पर गये हुए वक्र अर्थात् अवलूत (चलनकलन का १७५ वॉ प्रक्रम देखो) के साथ नात का वैसाही सम्बन्ध रहेगा

जैसा कि व विन्दु के साथ वल अर्थात् च का है। यदि त विन्दु का अक्षीय भुज युग्म $ल'$, $ष'$ मानें और तग = $च'$ तो

$ष' = ष - \frac{π}{२}$ और $ल' = च$

$$\text{और } गत = च' = -\frac{ता ल'}{ता ष'} = -\frac{ता ल'}{ता ष} = -\frac{ता च}{ता ष} = \frac{ता^२ ल}{ता ष^२}$$

क्योंकि अवलूत के लक्षण से गव रेखा अवलूत की स्पर्शरेखा होगी

$$\text{और } वि = वत + तग = ल + च' = ल + \frac{ता^२ ल}{ता ष^२}$$

$$\text{परंतु } वि = \frac{ता चा}{ता ष}, \text{ इस लिये } \frac{ता चा}{ता ष} = ल + \frac{ता^२ ल}{ता ष^२}$$

$$\text{और } \quad चा = \int ल\, ता ष + \frac{ता ल}{ता ष} \text{ यही पहले भी सिद्ध हुआ था।}$$

यदि प्रत्येक स्पर्शरेखाओं के ऊपर ना विन्दु से लम्ब डाले जायँ और उन लम्बमूलों मे लगाकर एक वक्र करें और इसके ल विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर ना विन्दु से जो लम्ब पड़ा उसको $ल_१$ कहो तो चलनकलन के १३१ वे प्रक्रम से $\frac{१}{ल_१^२} = \frac{१}{ल^२} + \frac{१}{ल^४} \cdot \frac{ता ल^२}{ता ष^२}$ (क्योंकि इस वक्र की श्रुति = ल है) इस मे $\frac{ता ल}{ता ष}$ के स्थान में −च का उत्थापन देने से

$$\frac{१}{ल_१^२} = \frac{१}{ल^२} + \frac{च^२}{ल^४} = \frac{ल^२ + च^२}{ल^४} = \frac{श्रु^२}{ल^४}$$

इसलिये $ल_१ = \frac{ल^२}{श्रु}$ यह एक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होता है।

ऊपर के क्षेत्र में अ विन्दु से ब की ओर जब $चा = चा_१$ तो $च = च_१$ और जब $चा = चा_२$ तब $च = च_२$ ऐसा मानो तो

$$चा_२ - चा_१ + च_२ - च_१ = \int_{ष_१}^{ष_२} ल ता ष \text{ यह उत्पन्न होगा}$$

जहाँ $चा_२$ और $चा_१$ सम्बन्धी $ष_२$ और $ष_१$ है।

ध्रुव स्थान से किसी $ष_१$ में यदि श्रुति का मान $श्रु_१$ और च का मान $च_१$ हो तो स्पष्ट है कि श्रुति नियत अक्ष के चारो ओर घूम कर जब फिर अपने पहले

स्थान पर पहुँचेगी तब प का मान $\text{प}_2 = \text{प}_1 + 2\pi$ यह और $\text{श्रु}_2 = \text{श्रु}_1$। $\text{च}_2 = \text{च}_1$ ऐसी स्थिति मे ज्ञो सीमित वक्र होंगे

उनके परिधि का मान $= \int_{\text{प}_1}^{\text{प}_1 + 2\pi}$ लताप यही होगा।

८५। ८४ प्रक्रम के सिद्धान्त की व्याप्ति दिखाने के लिये दो उदाहरण दिखलाते है।

(१) मानो कि अतवक एक दीर्घवृत्त का चतुर्थांश है जिस का केन्द्र न, वृहद्व्यासार्द्ध नअ = अ, लघुव्यासार्द्ध नक = क, व विन्दु की स्पर्शरेखा लवस और उस पर केन्द्र से पड़ा लम्ब नल = ल है तो न को मूलविन्दु मानने से इसका समीकरण $\frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} = 1$ यह होगा। यहाँ यदि

$\angle$ लनस = प_1 तो ८४ प्रक्रम से ल = यकोज्याप + रज्याप।

वल = च = यज्याप—रकोज्याप।

$$\text{और} \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} = 1 - \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} \cdot \frac{2\text{र}}{\text{क}^2} \frac{\text{ता र}}{\text{ता य}} = -\frac{2\text{य}}{\text{अ}^2} \text{ और } \frac{\text{ता र}}{\text{ता य}} = -\frac{\text{य}}{\text{र}} \frac{\text{क}^2}{\text{अ}^2}$$

(१)

$$\text{और ल} = \text{यकोज्याप} + \text{रज्याप} = \text{ज्यापर} \left(\text{कोस्पप} \times \frac{\text{य}}{\text{र}} + 1 \right) \cdots$$

$$= \text{ज्यापर} \left[\frac{\text{अ}}{\text{क}} \text{कोस्प}^2\text{प} + 1 \right] \cdots \quad (१)$$

$$\text{परन्तु } \frac{\text{यक}^2}{\text{रअ}^2} = \text{कोस्पप} \therefore \frac{\text{य}^2\text{क}^4}{\text{र}^2\text{अ}^4} = \text{कोस्प}^2\text{प} \text{। } \frac{\text{य}^2}{\text{र}^2} = \frac{\text{अ}^4\text{कोस्प}^2\text{प}}{\text{क}^4}$$

और $\frac{\frac{य^2}{अ^2}}{\frac{र^2}{क^2}} = \frac{अ^2 कोस्प^2 प}{क^2}$ । एक में जोड़ देने से

$\frac{क^2}{र^2} = \frac{अ^2 कोस्प^2 प + क^2}{क^2}$,

मूल लेने से $\frac{क}{र} = \sqrt{१ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 प}$ . . (२)

$\therefore र = \frac{क}{\sqrt{१ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 प}}$

इस का उत्थापन (१) में देने से

$ल = ज्याप र \left[\frac{अ^2}{क^2} कोस्प^2 प + १ \right]$

$= ज्याप \frac{क}{\sqrt{१ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 प}} \{ (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 प + १ \}$

$= ज्यापक \sqrt{\{ १ + (१-इ^2)^{-१} कोस्प^2 प \}}$

$= अ\sqrt{१+इ^2} \sqrt{\{ ज्या^2 प - इ^2 ज्या^2 प + कोज्या^2 प \}} = अ\sqrt{\{ १-इ^2 ज्या^2 प \}}$

अब $अ\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 प)}$ इस ल पर से

$अब + बल = अ \int \sqrt{१-इ^2 ज्या^2 प}$

वक्र मे व विन्दु ऐसा कल्पना करे जिसका $भु = य' = अज्याप$

और $कोटि = र' = ककोज्याप$ तो ७७ वें प्रक्रम से

$कत = अ \int \sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 प)}$

इसलिये $अब + बल = कत$ यह सिद्ध हुआ। . . . . (अ)

और व विन्दु का भुज यदि य तो ८४वें प्रक्रम से ल के रूप में य

$= ल कोज्याप - \frac{ताल}{ताप} ज्याप = अकोज्याप \sqrt{१-इ^2 ज्या^2 प} + \frac{अइ^2 ज्या^2 पकोज्याप}{\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 प)}}$

$= \frac{अकोज्याप}{\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 प)}}$ . . . . (क)

(क्योंकि यहाँ $बल = च. = - \frac{ताल}{ताप} = \frac{अइ^2 ज्यापकोज्याप}{\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 प)}}$]

बल के मान मे (क) का उत्थापन देने से

वल = इ²यज्याष। इसी जगह यदि त के भुज का य' = अज्याप इस का उत्थापन दें तो

$$वल = \frac{इ^2 यय'}{अ}$$ इस पर से और (अ) के रूप से

$$कत—अव = वल = \frac{इ^2 यय'}{अ},$$ (ग)

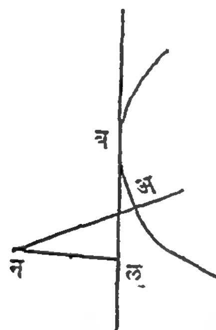
इस सिद्धान्त को फ्यागनानी (Fagnanı) ने निकाला है इसलिये उन के आदरार्थ इसे फ्यागनानी का सिद्धान्त (Fagnanı's Theoıem) कहते हैं। वल का मान चलनकलन के ११वें अध्याय मे भी इ²यज्याप यह निकाल सकते हो।

(क) का वर्ग कर देने से $$\frac{अ^2 - अ^2 ज्या^2 ष}{१ - इ^2 ज्या^2 ष} = \frac{अ^2 — य'^2}{१ - \frac{इ^2 य'^2}{अ^2}} = य^2$$

छेदगम कर समशोधन से

$इ^2 य^2 य'^2 — अ^2 (य^2 + य'^2) + अ^4 = ०$ इस से यह सिद्ध होता है कि य के स्थान मे य' का और य' के स्थान मे य का उत्थापन देने से भी पूर्ववत् फल उत्पन्न होगा। इस लिये $कव—अत = \frac{इ^2 यय'}{अ}$ यह भी होगा

(२)



मानो कि किसी अतिपरवलय का केन्द्र न, अ शिरःस्थान, वल व विन्दु पर स्पर्शरेखा और इस पर न से पड़ा लम्ब नल है।

यहाँ पर भी यदि ∠अनल = प और नल = ल तो (१) उदाहरण के ऐसा सिद्ध कर सकते हो कि

$$वल—अव = अ \int \sqrt{(१ — इ^2 ज्या^2 प)}\ ताप$$

चलनकलन के १३वे अध्याय से अतिपरवलय के अनन्त दूर की स्पर्श-रेखा अर्थात् असीमपथ निकालो तो उस समय $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \pm \frac{\text{अ}}{\text{क}}$ इस लिये उस स्थान मे प का मान अ_1 कहो तो $\text{कोस्पअ}_1 = \frac{\text{क}}{\text{अ}} = \sqrt{\text{इ}^2 - 1}$ अति-परवलय के लक्षण से उस समय अ स्थान से अनन्त दूर तक जो अतिपरवलय का चाप हो उसको न स्थान से असीमपथ जो हो उसके मान में घटा देने मे शेष $= \text{अ} \int_0^{\text{अ}_1} \sqrt{(1 - \text{इ}^2 \text{ज्या}^2 \text{प})}\,\text{ताप}$ यही होगा।

यह शेष वही है जो ७८ प्रक्रम के अन्त में सिद्ध हुआ है क्योंकि उस समय अइल यह असीमपथ ही का मान होगा।

८४। प्रक्रम मे जो सिद्धान्त दिखलाया है अर्थात् $\text{चा} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} + \int \text{लताप}$ यह लेजेण्ड्र (Legendre) का निकाला हुआ है (See Traité des Fonctions Elliptiques)

८६। अति परवलय के चाप का मान जानने के लिये ल्याण्डन का सिद्धान्त (Landen's Theorem on a Hyperbolic Arc.)

अतिपरवलय का कोई चाप कोई दो दीर्घवृत्तों के चाप से प्रकाशित कर सकते हैं।

किसी त्रिभुज मे जहाँ आ, का, गा कोण और उन के संमुख भुज अ, क, ग हैं सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

$$\text{ग} = \text{अकोज्याका} + \text{ककोज्याआ}। \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

मानो कि शिरःस्थान का वहिर्गत कोण गा = आ + का है। और अ, क दो भुज तो स्थिर और बाकी सब अवयव त्रिभुज मे चल है तो गा = आ + का और ताआ + ताका = तागा इससे (१) को गुण देने से गतागा = (अकोज्याका + ककोज्याआ) ताआ + (अकोज्याका + क कोज्याआ) ताका चल-ज्ञान करने से

$$\int \text{गतागा} = \int \text{अकोज्याकाताआ} + \int \text{ककोज्याआताका} + 2\text{अज्याका} + \text{स्थि}$$

वा सरलत्रिकोणमिति से

$$\int \sqrt{(\text{अ}^2 + \text{क}^2 + 2\text{अककोज्यागा})}\,\text{तागा} = \int \sqrt{(\text{अ}^2 - \text{क}^2 \text{ज्या}^2 \text{आ})}\,\text{ताआ}$$

$$+\int\sqrt{(क^2-अ^2 ज्या^2 का)}ताका + २अज्याका + स्थि \quad (२)$$

परन्तु $\sqrt{(अ^2+क^2+२अक\ कोज्यागा)}$

$$=\sqrt{\left\{(अ-क)^2 ज्या^2 \frac{गा}{२}(अ+क)^2 कोज्या^2 \frac{गा}{२}\right\}}$$

इस लिये (२) का रूप

$$\int\sqrt{\left\{(अ-क)^2 ज्या^2\frac{गा}{२}+(अ+क)^2\ कोज्या^2\frac{गा}{२}\right\}}$$

$$=\int\sqrt{(अ^2-क^2 ज्या^2 अ)}ताआ+\int\sqrt{(क^2-अ^2 ज्या^2 का)}ताका$$

$$+ २अज्याका + स्थि$$

इस मे $\left[\frac{अ-क}{अ+क}\right]^2 = १ - इ^2,ज्या^2\ \frac{गा}{२}\ ज्या^2 प$ ।

$\frac{क^2}{अ^2} = इ_1^2$ । ज्या आ = ज्या $प_1$ । $\frac{अ^2}{क^2} = इ_2^2$ । ज्या का = ज्या $प_2$ कल्पना कर

जहाँ अ 7 क तो

$$२(अ+क)\int\sqrt{(१-इ^2 ज्या^2 प)}ताप$$

$$=अ\int\sqrt{(१+इ_1^2 ज्या^2 प_1)}ताप_1+क\int\sqrt{(१-इ_2^2 ज्या^2 प_2)}ताप_2$$

$$+ २अज्याका + स्थि \quad (३)$$

देखो यहाँ वाये पक्ष का चल उस दीर्घवृत्त के द्विगुण चाप का प्रमाण है जिसका वृहद्व्यास = २ (अ + क) और दहने पक्ष का प्रथम चल उस दीर्घवृत्त का एक चाप है जिसका वृहद्व्यासार्द्ध = अ। दोनो मे क्रम से इ और $इ_1$ ऊपर की कल्पना से निष्पत्तिमान है। (७७ वाँ प्रक्रम देखो) इन दोनो के अन्तर तुल्य समीकरण से दहने पक्ष का चल होगा जो कि ८५ वे प्रक्रम के (२) उदाहरण से एक सरल रेखा और उस अतिपरवलय के चाप के अन्तर समान है जिस का लघुव्यास = २क और निष्पत्तिमान = $\frac{अ^2}{क^2}$ यह है।

इस पर से किसी समय मे ८५ वे प्रक्रम के (२) उदाहरण से चल का मान जान कर और २अज्याका के ज्ञान से दोनो दीर्घवृत्तो के चापो पर से अतिपरवलय का चाप जान सकते हैं।

जब सरलत्रिकोणमिति से स्पष्ट है कि

अज्याका = कज्याआ। गा = आ + का

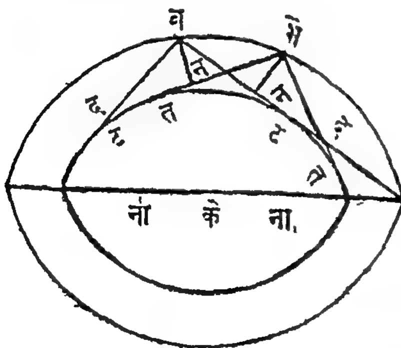
इसलिये आ ० से लेकर π तक जब पहुँचेगा तो गा भी ० से लेकर π तक पहुँचेगा। और अज्याका = कज्याआ के नियम से उस समय का ० लेकर $अ_1$ (जहाँ $अ_1 = ज्या^{-1}\frac{क}{अ}$) तक पहुँच कर फिर घटते घटते ० तक आजायगा। ऐसी स्थिति में ककोज्याआ और ताका दोनों ऋण होंगे इसलिये ककोज्याआ ताका सर्वदा धन रहेगा तब सान्त-चलानयन से (३) का रूप

$$२(अ+क)\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\sqrt{(१-इ^२ज्या^२प)}\,ताप$$

$$=२अ\int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\sqrt{(१-इ_१^२ज्या^२प_१)}\,ताप_१+२क\int_{0}^{अ_१}(१-इ_२^२ज्या^२प_२)\,ताप_२$$

ऐसा होगा। इस मे दो का भाग दे कर समशोधन से यह दिखला सकते हो कि अतिपरवलय का अनन्त चाप और असीमपथ का अन्तर दो दीर्घवृत्तों के चतुर्थांश परिध्यन्तर तुल्य है। यह भी ल्याण्डेन (Landen) की कल्पना है।

८७। डाक्टर ग्रेव का सिद्धान्त (Theorem of Dr Graves) कल्पना करो कि एक नाभिक दो दीर्घवृत्त हैं। बड़े दीर्घवृत्त के परिधि में कोई व विन्दु लेकर छोटे दीर्घवृत्त पर वहाँ से वट, वट' दो स्पर्शरेखा डाला तो वट और वट' के योग मे दीर्घवृत्त का टट' चाप घटा दो तो शेष सर्वदा स्थिर रहेगा



व विन्दु के अत्यन्त निकट बड़े दीर्घवृत्त में एक भ विन्दु कल्पना करो और वहाँ से छोटे दीर्घवृत्त पर भत, भत' दो स्पर्श-रेखा खींचो इन दोनो का पहली स्पर्श-रेखा मे क्रम से द और द' विन्दु पर योग समझो। वट' पर भन' और भत पर वन लम्ब समझो।

देखो दोनों दीर्घवृत्त एक नाभिक हैं इस लिये दीर्घवृत्त लक्षण से ∠वभन = ∠भवन' ∴ वन' = भन

और वट = टद + दन = टद + दत + तन = टत + तन = टत + तभ — भन।

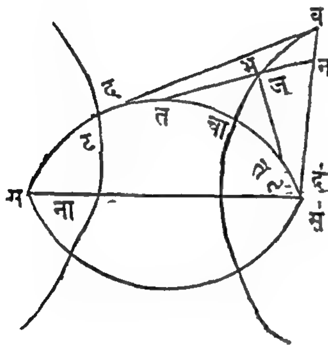
इसी तरह वट' = वन' + त'भ — ट'त'।

दोनों के योग से वट + वट' = भत + भत' + टत — ट'त'।

दोनों में टट′ चाप को घटा देने से वट + वट′−टट′ = भत + भत′−तत′

अर्थात् व विन्दु यदि भ पर हो तौ भी शेष वही रहता है। इसी प्रकार थोड़ा थोड़ा विन्दुओ को हटा हटा सर्वत्र दिखला सकते हो कि शेष एक ही रहेगा।

८८। इसी तरह यदि एक अतिपरवलय और एक दीर्घवृत्त दोनो एक नाभिक हों तो अतिपरवलय के किसी विन्दु से जो दो स्पर्श रेखा दीर्घवृत्त मे होंगी उनका अन्तर स्पर्शरेखान्तर्गत अतिपरवलय और दीर्घवृत्त का जो सम्पात विन्दु है वहाँ से दोनो स्पर्श विन्दु तक जो दीर्घवृत्त के दो चाप होगे उनके अन्तर तुल्य होता है। क्योकि यहाँ भी जो ऊपर की क्रिया करो तो वट = टद + दन = टद + दत + तन = टत + भत + भन



इसी तरह वट′ = ट′द′ + न′द′ + वन′ = ट′द′ + त′द′ + भत′ + वन′ = ट′त′ + भत′ + वन′

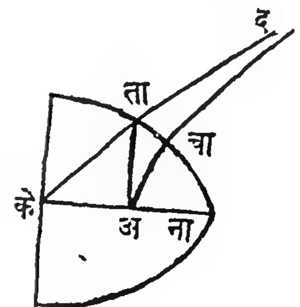
दोनो का अन्तर करने से (वट−वट′) = टत−ट′त′ + (भत−भत′) और टचा—ट′चा = अ = टत + तचा—(ट′त′ + त′चा)

इन दोनो का अन्तर करने से (वट—वट′) —अ = (भत—भत′)—(तचा—त′चा)

इसी प्रकार भ को बदलने से दो दो पक्ष समान होते जॉयगे अन्त मे जब भ,चा के पास आवेगा तब स्पर्श रेखान्तर और चापान्तर दोनो शून्य हो जॉयगे इसलिये (वट—वट′)— (टचा— ट′चा) = ० अर्थात् वट—वट′ = टचा—ट′चा।

यदि दीर्घवृत्त के परिधि ही मे कोई विन्दु लेकर अतिपरवलय ही पर दो स्पर्शरेखा डाली जाय तौ भी यहाँ पर यही सिद्धान्त ठीक ठहरेगा यदि दोनो स्पर्शरेखाये अतिपरवलय के एक ही शाखा पर हो।

इस पर से असीमपथ और अतिपरवलय का अनन्त चाप इनका अन्तर सरलरेखा और अतिपरवलय के चाप रूप मे प्रकाश कर सकते हैं। जैसे कल्पना करो कि अचा अतिपरवलय का असीमपथ केतद है और अ विन्दु की स्पर्श रेखा अत है त विन्दु में लगाकर अति परवलय के साथ एक एकनाभिक



दीर्घवृत्त बनाया तो ऊपर के सिद्धान्त से अनन्त दूर पर तद को स्पर्शरेखा समझ लेने से तद—अत = चादचाप—अचा

केत + अचा इसको जोड़ देने से

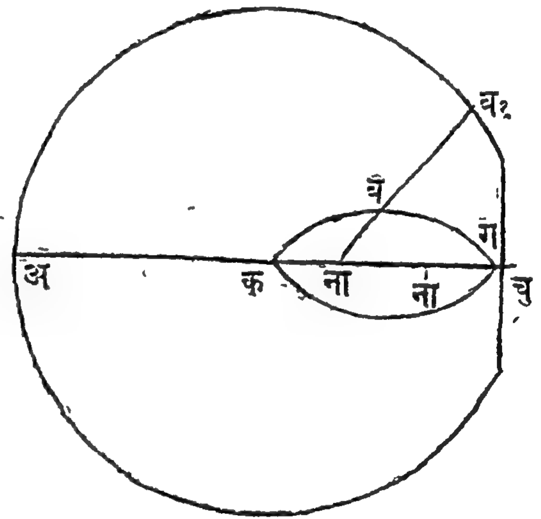
तद + केत—अत + अचा = चाद + अचा—अचा + केत

अर्थात् केद—अत + अचा = अद—अचा + केत

समशोधन से केद—अद = अत + केत—२अचा

इसलिये केत और अत के योग मे दूने अचा को घटा देने से शेष असीमपथ और अतिपरवलय सम्बन्धि अनन्त चाप का अन्तर होता है यह सिद्ध हुआ।

८९। डिकार्टेस के आवल (Oval of Descartes) का चापानयन।



इसकी दोनो नाभी ना, नां हैं नाभी से वक्र के किसी विन्दु व तक जो रेखा है उन में त·श्रु + द·श्रुं = न·ग यह नियम है जहाँ त,द और न स्थिराङ्क हैं, नानां = ग, नाव = श्रु। नांव = श्रुं यहाँ यदि ∠वनानां = प तो सरलत्रिकोणमिति से

$$\text{श्रुं}^2 = \text{श्रु}^2 + \text{ग}^2 - \text{२श्रुगकोज्याप}$$

$$= \left[\frac{\text{न}\cdot\text{ग} - \text{श्रु}\cdot\text{त}}{\text{द}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{\text{न}^2\text{ग}^2 - \text{२तनगश्रु} + \text{श्रु}^2\text{त}^2}{\text{द}^2}\right]$$

छेदगम और समशोधन से

$$\text{श्रु}^2(\text{द}^2 - \text{त}^2) - \text{२श्रुग}(\text{द}^2\text{कोज्याप} - \text{तन}) - \text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2) = \text{०}$$

$$\text{वा}\quad \text{श्रु}^2 - \frac{\text{२श्रुग}(\text{द}^2\text{कोज्याप} - \text{तन})}{\text{द}^2 - \text{त}^2} - \frac{\text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{द}^2 - \text{त}^2}$$

$$\text{अथवा}\ \text{श्रु}^2 - \text{२श्रुग}\,\frac{\text{तन} - \text{द}^2\text{कोज्याप}}{\text{त}^2 - \text{द}^2} + \frac{\text{ग}^2(\text{न}^2 - \text{द}^2)}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = \text{०}$$

इस में यदि $\text{ग}\,\dfrac{(\text{तन} - \text{द}^2\text{कोज्याप})}{\text{त}^2 - \text{द}^2} = \text{प}_1$। और

$$\frac{(ग^2 न^2 - द^2)}{त^2 - द^2} = आ \quad तो$$

$$श्रु^2 - २प_१श्रु + आ = ० \qquad (१)$$

इस पर से $श्रु = प_१ \pm \sqrt{प_१^2 - आ}$ वा $नाव_१ = प_१ + \sqrt{प_१^2 - आ}$ ।

$नाव = प_१ - \sqrt{प_१^2 - आ}$ इस से सिद्ध होता है कि यदि त, द, न सम्भाव्य और अतुल्य संख्या हो तो

इस वक्र में दो आवल होंगे एक बाहर मे और दूसरा भीतर मे रहेगा जैसा कि इस क्षेत्र में देख पड़ता है।

अब यहाँ (१) का तात्कालिकसम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताश्रु}{ताप} \cdot \frac{१}{श्रु} = \frac{प'_१}{\sqrt{प_१^2 - आ}} \quad जहाँ\ प'_१ = \frac{ताप_१}{ताप}$$

इस पर से

$$\frac{ताचा}{ताप} \cdot \frac{१}{श्रु} = \frac{\sqrt{प_१^2 + प'^2_१ - आ}}{\sqrt{(प_१^2 - आ)}}$$

$$वा\ चा = \int \frac{प_१\sqrt{(प_१^2 + प'^2_१ - आ)}ताप}{\sqrt{(प_१^2 - आ)}} \pm \int \sqrt{(प_१^2 + प'^2_१ - आ)}\ ताप$$

यहाँ धन चिह्न बाहरी आवल के लिये और ऋण चिह्न भीतरी के लिये है।

इस लिये दोनो के सजातीय चापो का अन्तर $= २\int \sqrt{(अ_१^2 + प'^2_१ - आ)}ताप$

$$= २\int \sqrt{(अ^2 + २अक\ कोज्याप + क^2 - आ)}ताप \qquad (२)$$

$$यदि\ प_१ = \frac{ग(तन - द^2\ कोज्याप)}{त^2 - द^2} = अ + क\ कोज्याप\ ।$$

देखो (२) का रूप ८६ प्रक्रम से एक दीर्घवृत्त के चाप समान हो सकता है इस लिये दोनो आवलो के सजातीय चापो का अन्तर एक दीर्घवृत्त के चाप रूप में प्रकाशित कर सकते हैं। इस सिद्धान्त को राबर्टस ने निकाला है (Mr. W. Roberts) त, द, और न, के भिन्न भिन्न मानो पर से यही आवल, वृत्त, दीर्घवृत्त, अतिपरवलय इत्यादि का रूप हो जायगा इस लिये आवल को इन सब वक्रों का उत्पादक कह सकते हैं।

९०। यदि किसी वक्रक्षेत्र के अनवलत का समीकरण मालूम हो तो चलनकलन के १७६वे प्रक्रम के (३) समीकरण से चलज्ञान के विना ही वक्र के चाप का

ज्ञान हो सकता है क्योंकि अनवलूत समीकरण पर से $\text{चा}'\pm\text{वि} = \text{ट}$ इस मे जो वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध वि है उस का मान अनवलूत के भुजकोटि रूप मे ला सकते हैं और ये भुजकोटि अवलूत के भुजकोटि रूप मे आ सकते हैं इस प्रकार अनवलूत के समीकरण पर से वि का ज्ञान हो जायगा फिर स्थिर ग के वश से चाप का मान भी विदिति हो जायगा।

जैसे यदि उस परवलय को अनवलूत कल्पना करो जिसका $\text{र}^2 = \text{४अय}$ यह समीकरण है तो चलनकलन के १७८ प्रक्रम के (१) उदाहरण मे अवलूत का समीकरण $\text{२७ अ र}'^2 = \text{४}(\text{य}'-\text{२अ})^3$ और $\text{वि} = \text{२अ}\left[\dfrac{\text{य}'+\text{अ}}{\text{३अ}}\right]^{\frac{3}{2}}$ यह होगा इस लिये $\text{चा}'\pm\text{२अ}\left[\dfrac{\text{य}'+\text{अ}}{\text{३अ}}\right]^{\frac{3}{2}} = \text{ट}$। यहाँ चाप की गणना यदि उस विन्दु से करे जिस का $\text{भु} = \text{य}' = \text{२अ}$ अर्थात् उस विन्दु से जो कि परवलय के शिरोविन्दु के सजातीय है तो क्षेत्र के देखने से विदित होता है कि वहाँ $\text{चा}' = 0$ इस लिये

$\text{ट} = -\text{२अ}$ ऋण चिह्न ग्रहण करने से क्योंकि यहाँ ज्यों ज्यो $\text{य}'$ बढ़ेगा त्यो त्यों $\text{चा}'$ भी बढ़ेगा इसलिये $\text{चा}' = \text{२अ}\left[\dfrac{\text{य}'+\text{अ}}{\text{३अ}}\right]^{\frac{3}{2}} - \text{२अ}$

यदि यहाँ वक्र के $\text{२७अर}'^2 = \text{४}(\text{य}-\text{२अ})^3$ इस समीकरण पर से $\dfrac{\text{ताचा}}{\text{ताय}}$ का मान जान कर चलज्ञान से चाप का आनयन करो तो भी ऊपर आया हुआ मान आजायगा।

९१। वक्र के भुज कोटि के रूप मे यदि चाप का मान विदित हो तो उस के अनवलूत का समीकरण जान सकते हैं।

चलनकलन के १७६ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$\frac{\dfrac{\text{ताय}'}{\text{ताय}}}{\text{य}-\text{य}'} = \pm\frac{1}{\text{वि}}\cdot\frac{\text{ताचा}'}{\text{ताय}'} \quad \text{जहाँ य अनवलूत का भुज है}$$

$$\text{समशोधनादि से } \text{य} = \text{य}'\mp\text{वि}\,\frac{\text{ताय}'}{\text{ताचा}'} \qquad (1)$$

$$\text{इसी तरह } \quad \text{र} = \text{र}'\mp\text{वि}\,\frac{\text{तार}'}{\text{ताचा}'} \qquad (2)$$

यदि चा', य' और र' के रूप मे विदित हो और वक्र का समीकरण जानते हो तो $\frac{\text{ताचा}'}{\text{ताय}'}$ और $\frac{\text{ताचा}'}{\text{तार}'}$ जान सकते हैं और वि, चा' ± वि = ट इस समीकरण समीकरण पर से जान जायँगे फिर इन का उत्थापन (१) और (२) मे देने से अनवलूत का भुज कोटि जान जायँगे।

जैसे किसी कातन्वली (The Catenary) का समीकरण

$$\text{र}' = \frac{\text{ग}}{2}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right)$$

और

$$\text{चा}' = \frac{\text{ग}}{2}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right) \text{ यह है।}$$

यहाँ मान लो कि चाप की गणना उस विन्दु से है जिस का भु = य' = ० और को = र' = ग अब इन पर से कातन्वली के अनवलूत (Involute) का समीकरण जान जायँगे जिस की प्रवृत्ति वक्र के निर्दिष्ट विन्दु (जिस के भुज कोटि का मान अभी मान लिया है) के वश से होगी।

अब ऊपर के र' और चा' के मान से

$$\frac{\text{तार}'}{\text{ताय}'} = \frac{1}{2}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} - \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right) = \frac{\text{चा}'}{\text{ग}}$$

$$\frac{\text{ताचा}'}{\text{ताय}'} = \frac{1}{2}\left(\text{इ}^{\frac{\text{य}'}{\text{ग}}} + \text{इ}^{-\frac{\text{य}'}{\text{ग}}}\right) = \frac{\text{र}'}{\text{ग}}$$

भाग देने से

$$\frac{\text{तार}'}{\text{ताचा}'} = \frac{\text{चा}'}{\text{र}'}, \text{ और } \frac{\text{ताय}'}{\text{ताचा}'} = \frac{\text{ग}}{\text{र}'}$$

और यहाँ ऐसी ही कल्पना किया है कि चा' = ० तो वि = ० इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा। तब चा' = वि।

इन का उत्थापन (१) और (२) में देने से

$$\text{य} = \text{य}' - \frac{\text{चा}'\,\text{ग}}{\text{र}'},\ \text{र} = \text{र}' - \frac{\text{चा}'^2}{\text{र}'} = \frac{\text{र}'^2 - \text{चा}'^2}{\text{र}'} = \frac{\text{ग}^2}{\text{र}'}$$

$$\text{और चा}' = \sqrt{(\text{र}'^2 - \text{ग}^2)} = \sqrt{\left[\frac{\text{ग}^4}{\text{र}^2} - \text{ग}^2\right]} = \frac{\text{ग}}{\text{र}}\sqrt{\text{ग}^2 - \text{र}^2}$$

इस लिये $\frac{चा'}{र'} = \frac{\sqrt{(ग^2 - र^2)}}{ग}$, इस तरह से $य' = य + \sqrt{(ग^2 - र^2)}$ इस का उत्थापन वक्र के समीकरण मे देने से

$$र' = \frac{ग}{2}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} + इ^{-\frac{य'}{ग}}\right)$$

$$इस लिये \sqrt{(र'^2 - ग^2)} = \frac{ग}{2}\left(इ^{\frac{य'}{ग}} - इ^{-\frac{य'}{ग}}\right)$$

$$जोड़ देने से र' + \sqrt{(र'^2 - ग^2)} = ग इ^{\frac{य'}{ग}}$$

$$लघुरिक्थ लेने से य' = ग ला \frac{र' + \sqrt{(र'^2 - ग^2)}}{ग}$$

$$इसी तरह य + \sqrt{(ग^2 - र^2)} = ग ला \frac{ग + \sqrt{(ग^2 - र^2)}}{र}$$

इस वक्र को अङ्गरेजी मे (Tractory) कहते हैं हमने इस का नाम त्रीतर रखा है । इस मे यदि ग > र तो मूल का मान द्विविध आवेगा प्रत्येक य के मान में । ये दोनों मान संख्या में तुल्य परन्तु भिन्न चिह्न के होंगे । चलनकलन से यदि इस की आकृति बनाओ तो जान पड़ेगा कि जहाँ य = ० और र = ग वहाँ वक्र को एक स्कन्ध होगा जिस मे य अक्ष असीमपथ होगा ।

९२ । यदि अवलूत के चाप का मान अक्षीय भुजयुग्म का फल हो तो ऊपर की युक्ति से अनवलूत का समीकरण भी अक्षीय भुजयुग्म सम्बन्धी जान सकते हो ।

चलनकलन के १७७ प्रक्रम के (१) और (२) समीकरण से

$$श्रु'^2 = श्रु^2 + वि^2 - २ ल वि \quad \ldots \quad (१)$$

$$ल'^2 = श्रु^2 - ल^2 \quad \ldots \quad (२)$$

यहाँ भी पहले के ऐसा स्वरविशिष्टवर्ण ज्ञात वक्र के हैं अर्थात् अवलूत के और केवल वर्ण अनवलूत के हैं । अवलूत तो ज्ञात ही है और इसी लिये ल', और श्रु' का भी सम्बन्ध विदित ही होगा और चा' ∓ वि = ट इसलिये यदि चा' का मान ल' श्रु' के रूप में आ सके तो इस के वश से (१) और (२) में श्रु', ल' को उड़ा सकोगे और एक समीकरण ल और श्रु मे सम्बन्ध दिखाने वाला अनवलूत का ज्ञात हो जायगा ।

जैसे समाश्रिक सर्पिल (Equiangular Spiral) मे (चलनकलन का २८६ प्रक्रम का (२) वक्र देखो) यदि $\text{भ} = \text{स्प}^{-1}\,\text{क}$ तो

$$\text{ल}' = \text{श्रु}'\,\text{ज्याभ}$$

यहाँ यदि अनवलूत की प्रवृत्ति सर्पिल के ध्रुवविन्दु ही से माने और उसी विन्दु से यदि चा के गणना का भी आरम्भ करे तो $\text{वि} = \text{चा} = \text{श्रु}'\,\text{छेभ}$ (८१वाँ प्रक्रम देखो) इस का उत्थापन (१) मे देने से

$$\text{श्रु}'^2 = \text{श्रु}^2 + \text{श्रु}'^2\,\text{छे}^2\text{भ} - 2\text{श्रु}'\,\text{ल}\,\text{छेभ}$$

$$= \text{श्रु}'^2\,\text{छे}^2\text{भ} + \text{श्रु}'^2\,\text{ज्या}^2\text{भ} + \text{ल}^2 - 2\text{श्रु}'\,\text{ल}\,\text{छेभ}\text{। (२) से}$$

इस वर्गसमीकरण पर से

$$\text{ल} - \text{श्रु}'\cdot\text{छेभ} = \pm\,\text{श्रु}'\,\text{कोज्याभ}$$

यदि यहाँ धन चिह्न ग्रहण करें तो $\text{ल} = \dfrac{\text{श्रु}'(1 + \text{कोज्या}^2\text{न})}{\text{कोज्याभ}}$ और (२) से

$$\text{श्रु}'^2 = \frac{1 + 3\text{कोज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्या}^2\text{भ}}\,\text{श्रु}'^2 \text{ इस पर से } \text{श्रु}\,\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताल}} = \text{वि}$$

$$= \frac{1 + 3\text{कोज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्याभ}(1 + \text{कोज्या}^2\text{भ})}\,\text{श्रु}'$$

परन्तु वक्र के समीकरण से $\text{वि} = \text{श्रु}'\,\text{छेभ}$ इस लिये धन चिह्न ग्रहण करने से मान असम्भव आता है। इस लिये ऋण चिह्न लेकर क्रिया करने से

$$\text{ल} = \frac{\text{श्रु}'\text{ज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्याभ}} \text{ और तब (२) से } \text{श्रु}^2 = \frac{\text{श्रु}'^2\text{ज्या}^2\text{भ}}{\text{कोज्या}^2\text{भ}} \;\therefore\; \text{श्रु}' = \frac{\text{श्रुकोज्याभ}}{\text{ज्याभ}}$$

इस का उत्थापन ल मे देने से $\text{ल} = \text{श्रु}\,\text{ज्याभ}$। देखो यह अनवलूत का समीकरण ठीक अवलूत ही के समीकरण के ऐसा है।

९३। यदि वक्र के स्पर्शरेखा से और वक्रस्थ नियतविन्दु की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण जो हो उस के फल रूप मे चाप का मान जानना हो तौ भी $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान उस स्पर्शरेखा के फल रूप मे जान कर चाप का मान जान सकते हो।

जैसे मानो कि किसी वक्र का समीकरण $\text{र} = \text{फ}(\text{य})$ मूल विन्दु वक्र ही के चाप का कोई विन्दु है और उसी विन्दु पर र अक्ष स्पर्शरेखा भी है तो वक्र के समीकरण से $\dfrac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{फ}'(\text{य}) = \text{स्पव} = \dfrac{?}{\text{स्पव}_1}$ (चलनकलन

के ११६ वें प्रक्रम से) जहाँ $व_१$ र अक्ष और वक्र की स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान है।

अब ऊपर के समीकरण से $स्पव_१$ के फल रूप मे य का मान जान जावोगे मानो कि $य = फा\,(स्पव_१)$ तो

$$\frac{ताय}{ताव_१} = फा'\,(स्पव_१)\;छे^२व_१$$

और $\frac{ताचा}{ताय} = कोछेव_१$

इस लिये $\frac{ताचा}{ताव_१} = फा'\,(स्पव_१)\;छे^२व_१\;कोछेव_१$

इस समीकरण पर से $व_१$ के फल रूप मे चा का मान जान सकते हो यदि वक्र के एक विन्दु पर य अक्ष स्पर्शरेखा हो और उसी नियत विन्दु से चाप का मान जानना हो तो ऊपर ही की युक्ति से समीकरण बना सकते हो केवल $व_१$ के स्थान मे व को लेना होगा।

जैसे चक्राभ (Cycloid) मे (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (११) वक्र देखो)

$$\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\frac{२अ - य}{य}} = \frac{१}{स्पव_१} \quad ।$$

इस लिये $\frac{२अ}{य} = \frac{१}{ज्या^२व_१}$ और $य = २अज्या^२व_१$

$$\frac{ताय}{ताव_१} = ४अज्याव_१\,कोज्याव_१$$

$$\frac{ताचा}{ताय} = कोछेव_१,\quad \frac{ताय}{ताव_१} = ४अकोज्याव_१$$

इस लिये $चा = ४अ\,ज्याव_१ + स्थि$

यदि चाप की गणना उस विन्दु से करें जहाँ र अक्ष स्पर्शरेखा है तो स्थिराङ्क शून्य होगा।

इस प्रकार से वक्र के दो स्पर्शरेखाओ से उत्पन्न कोण और वक्र के चाप के बीच सम्बन्ध दिखाने वाले समीकरण को वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण कहते हैं।

९४। यदि वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण दिया हो तो उस पर से साधारण वक्र का समीकरण विपरीत क्रिया से जान सकते है।

क्योंकि चापस्पार्शिक समीकरण पर से जानते हैं कि

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{ज्याव}_{१}$$

इसलिये $\text{य} = \int \text{ज्याव}_{१}\text{ताचा}$

और इसी तरह $\text{र} = \int \text{कोज्याव}_{१}\text{ताचा}$

चापस्पार्शिक समीकरण से जानते हैं कि चा कोई व$_{१}$ का फल है इसलिये य, और र का मान ऊपर के चलज्ञान से आजायगा।

जैसे (१) चक्रालद (Cycloid) मे जानते हैं कि चापस्पार्शिक समीकरण $\text{चा} = \text{४अज्याव}_{१}$ यह है

इसलिये $\text{ताचा} = \text{४अकोज्याव}_{१}\,\text{ताव}_{१}$

इस का उत्थापन य के मान में देने से

$\text{य} = \int \text{ज्याव}_{१}\text{ताचा} = \text{४अ} \int \text{ज्याव}_{१}\text{कोज्याव}_{१}\text{ताव}_{१}$

$= \text{स्थि} - \text{अकोज्याव}_{२}$ इसी तरह, $\text{र} = \int \text{कोज्याव}_{१}\text{ताचा}$

$= \text{४अ} \int \text{कोज्या}^{२}\text{व}_{१}\text{ताव}_{१} = \text{स्थि}_{१} + \text{२अव}_{१} + \text{अज्या२व}_{१}$

इस लिये यहाँ दोनो समीकरणो पर से य वा र के फल रूप मे व$_{१}$, ज्याव$_{१}$, कोज्याव$_{१}$ का मान ले आने से य और र के सम्बन्ध पर से वक्र का समीकरण आजायगा।

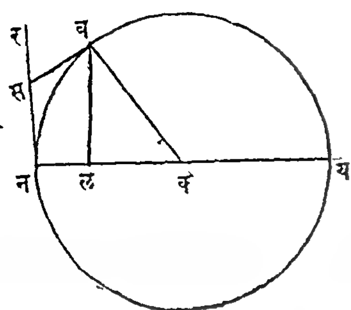
यदि दोनो अक्षो का योगविन्दु वक्र का शिरः स्थान माने तो $\text{स्थि} = \text{अ}$ और $\text{स्थि}_{१} = 0$

(२) इसी तरह वृत्त का चापस्पार्शिक समीकरण $\text{चा} = \text{अ}\cdot\text{व}_{१}$ यह है इस पर से $\text{ताचा} = \text{अताव}_{१}$

और $\text{य} = \int \text{ज्याव}_{१}\text{ताचा} = \text{अ}\int \text{ज्याव}_{१}\text{ताव}_{१} = - \text{अकोज्याव}_{१} + \text{स्थि}$

इसी तरह $\text{र} = \int \text{कोज्याव}_{१}\text{ताचा} = \text{अ}\int \text{कोज्याव}_{१}\text{ताव}_{१}$

$= \text{अज्याव}_{१} + \text{स्थि}_{१}$ यदि नियत स्पर्शरेखा और व्यासार्द्ध के योगविन्दु ही को मूलस्थान माने तो $\text{स्थि} = \text{अ}$ और $\text{स्थि}_{१} = 0$ इन का उत्थापन देकर य और र के सम्बन्ध से समीकरण $\text{र}^{२} = \text{अ}^{२} - (\text{अ} - \text{य})^{२}$।



जैसे यदि न विन्दुगत स्पर्शरेखा नस को नियत स्पर्शरेखा मानो और किसी व विन्दु की स्पर्शरेखा वस तो ∠वसर = $व_१$ और वृत्त के धर्म से $व_१$ = ∠वकेन। के को केन्द्र समझो इस लिये नव = चा = अ $व_१$ (जहाँ अ = केन = वृत्तव्यासार्द्ध)। इस लिये यदि नसर को र, अक्ष और नकेय को य अक्ष। और न को मूलविन्दु मानो तो व विन्दु की कोटि = वल = र = $\sqrt{अ^२ - (अ - य)^२}$ यही समीकरण पहले भी सिद्ध हुआ था।

(३) इसी तरह चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (१३) वक्र अपचक्रालद (Epicycloid) के लक्षण से यदि अ को नियतविन्दु मानो उसी स्पर्शरेखा य अक्ष ही है इस लिये इस अक्ष को नियत स्पर्शरेखा मान लेने से चाप-स्पार्शिक समीकरण से

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{कोज्याप - कोज्या\frac{अ+क}{क}प}{ज्या\frac{अ+क}{क}प - ज्याप} = स्पव_१$$

$$= \frac{२ज्या\frac{अ+२क}{२क}प \cdot ज्या\frac{अ}{२क}प}{२ज्या\frac{अ}{२क}प\ कोज्या\frac{अ+२क}{२क}प} = स्प\frac{अ+२क}{२क}प$$

इस लिये $व_१ = \frac{अ+२क}{२क}प$

और ८२ प्रक्रम से

$$चा = -\frac{\sqrt{(ग^२ - अ^२)}}{अ}\sqrt{ग^२ - श्रु^२} + स्थि$$

परन्तु वक्र के लक्षण से

$$य^२ = (अ+क)^२कोज्या^२प - २(अ+क)\ क\ कोज्यापकोज्या\frac{अ+क}{क}प$$
$$+ क^२कोज्या^२\frac{अ+क}{क}प$$

$$र^२ = (अ+क)^२ज्या^२प - २(अ+क)\ क\ ज्यापज्या\frac{अ+क}{क}प$$
$$+ क^२ज्या^२\frac{अ+क}{क}प$$

$$श्रु^२ = य^२ + र^२ = (अ+क)^२$$
$$- २क(अ+क)\left\{ज्या\frac{अ+क}{क}पज्याप + कोज्या\frac{अ+क}{क}पकोज्याप\right\} + क^२$$

$$ग^२ = (अ+२क)^२ = अ^२ + ४अक + ४क^२$$

$$ग^2 — श्रु^2 = २अक + २क^2 + २क\ (अ + क)\ कोज्या\ \frac{अ}{क}प$$

$$= २क\ (अ + क)\ \left\{ १ + कोज्या\ \frac{अ}{क}प \right\} = ४क(अ + क)\ कोज्या^2\ \frac{अ}{२क}प$$

$$\sqrt{ग^2 — श्रु^2} = \sqrt{\{४क\ (अ + क)\}}\ कोज्या\ \frac{अ}{२क}प$$

और $\sqrt{ग^2 — अ^2} = \sqrt{४क\ (अ + क)}$

चाप मे इन का उत्थापन देने से

$$चा = —४क\ (अ + क)\ कोज्या\ \frac{अ}{२क}\ प + स्थि$$

$$= \frac{४क(अ+क)}{अ}\ (१ — कोज्या\ \frac{अप}{२क})$$

यदि चाप की गणना वहाॅ से करें जहाॅ प = ०

परन्तु $प = \frac{२कव_१}{अ + २क}$ इस लिये $चा = \frac{४क(अ + क)}{अ}\left[१ — कोज्या\ \frac{अव_१}{अ + २क}\right]$

यदि यहाॅ $व_१ = \frac{\pi\ (अ+२क)}{२अ} + व'_१$

तो $\frac{अव_१}{अ + २क} = \frac{\pi}{२} + \frac{अव'_१}{अ + २क}$ ∴ कोज्या $\frac{अव_१}{अ + २क} = —ज्या\ \frac{अव'_१}{अ + २क}$

इस लिये यदि $\frac{४क(अ + क)}{अ}\ ज्या\ \frac{अव'_१}{अ + २क} = चा'$ तो

$$चा = \frac{४क(अ+क)}{अ} + चा'$$

यहाॅ स्पष्ट है कि वक्र के उच्च स्थान से यदि चा की गणना करे तो

$$चा' = \frac{४क(अ + क)}{अ}\ ज्या\ \frac{अव'_१}{अ + २क}$$

यहाॅ स्वर चिह्न का कुछ भी प्रयोजन नही यदि उच्चगत स्पर्शरेखा को नियत स्पर्शरेखा मान ले क्योंकि उस से और इष्टस्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण तब $व'_१$ यही होगा

इसलिये उच्चस्थान से गणना करने मे

$$चा = \frac{४क(अ + क)}{अ}\ ज्या\ \frac{अव_१}{अ + २क}\ ।$$

इसी तरह अतिचक्राभ (Hypocycloid) मे नीचस्थान से यदि चाप गणना करो तो $चा = \frac{४क(अ—क)}{अ}\ ज्या\ \frac{अव_१}{अ—२क}$ यह समीकरण होगा।

दोनों समीकरणों का रूप चा = ट ज्यानव, ऐसा कह सकते हो

प्रथम में $ट = \frac{४(अ+क)}{अ}$ $न = \frac{अ}{अ+२क} \angle १$ और दूसरे में

$ट = \frac{४(अ-क)}{अ}$, $न = \frac{अ}{अ-२क} 7$ १ इतना ही विशेष है।

(४) कातन्वली का समीकरण यदि

$र + ग = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$ ऐसा माने जिस में र अक्ष और वक्र के योग विन्दु को मूल मानें तो

$\frac{तार}{ताय} = \frac{१}{२}\left[इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right]$। $चा = \frac{ग}{२}\left[इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right]$

इस लिये मूलविन्दुगत स्पर्शरेखा से इष्टस्पर्शरेखा जो कोण वनावे उसे व, कहो तो चा = ग·स्पव, ऐसा होगा। इस प्रकार से कातन्वली (Catenary) का चापस्पार्शिक समीकरण उत्पन्न हो गया।

९५। यदि चापस्पार्शिक समीकरण से वक्रजातीय वृत्त का व्यासार्द्ध ले आवें तो चलनकलन के १७१ वें प्रक्रम से

$वि = \frac{ताचा}{ताव}$ (जहाँ $व = व_१$) ऐसा होगा।

जैसे लाघुरिक्थिक सर्पिल में ८१ प्रक्रम से

$चा = श्रु\sqrt{क^२ + १}$ } यदि ध्रुव स्थान से चाप गणना करे
$= श्रु\ छेभ$ } और चलनकलन के १३१वे प्रक्रम से

$ल = श्रु·ज्याभ \therefore \frac{ताल}{ताश्रु} = ज्याभ$ इसलिये चलनकलन के १६८ वें प्रक्रम से

$वि = श्रु·\frac{ताश्रु}{ताल} = श्रु\frac{१}{ज्याभ}$

वि का भाग चा में देने से $\frac{चा}{वि} = ज्याभ · छेभ = स्थि$ इस से सिद्ध होता है कि लाघुरिक्थिक सर्पिल में चाप और वक्रजातीय वृत्त के व्यासार्द्ध में स्थिर सम्वन्ध है। मानो कि वि = चा·त जहाँ त कोई स्थिराङ्क है तो

$वि = चा·त = \frac{ताचा}{ताव}$ इसलिये $ताव\ त = \frac{ताचा}{चा}$

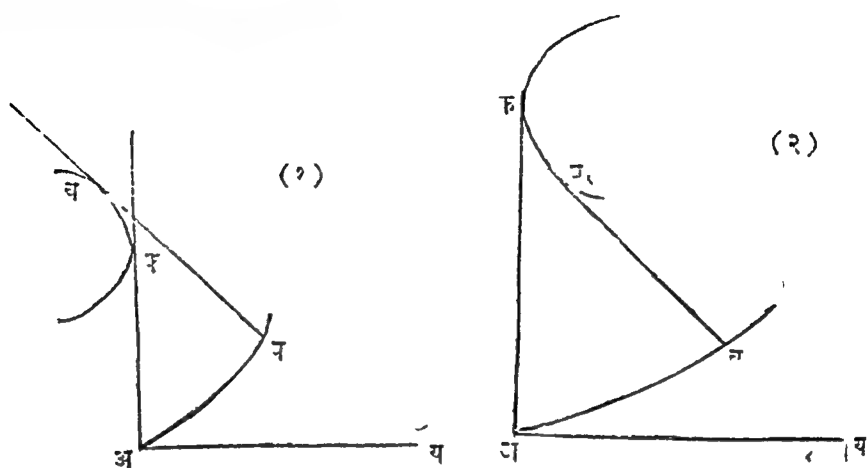
चलानयन से त व + $स्थि_१$ = लाचा

इसलिये चा = अ $इ^{त\ व}$ जहाँ अ कोई स्थिराङ्क है

यदि चा = चा + अ तो $चा' = अ\ (इ^{त·व} - १)$

अब इस में चा' वहाँ से परिगणित है जहाँ व = ०

९६। यदि वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अवलूत का भी समीकरण जान सकते हैं



कल्पना करो कि अव एक वक्र है जिस के अवलूत की आकृति कव, है। मान लो कि अव चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत विन्दु से व की ओर है।

और कव, चाप (चा) की गणना वक्र के किसी नियत विन्दु से व, की ओर है तो यदि अ विन्दु पर अव वक्र की जो स्पर्शरेखा अय है उसी को नियत स्पर्शरेखा मान अव का चापस्पार्शिक समीकरण वनावे और क विन्दु से इस पर जो कअ लम्ब डाला गया इस को नियत स्पर्शरेखा मान कर यदि कव, का चापस्पार्शिक समीकरण वनावे तो अवलूत और अनवलूत के लक्षण से स्पष्ट है कि दोनों समीकरणो मे व, का एक ही मान रहेगा।

इस लिये (१) क्षेत्र मे $\text{चा} = \text{वि} - \text{स्थि} = \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1} - \text{स्थि}$

और (२) क्षेत्र मे $\text{चा} = \text{स्थि} - \text{वि} = \text{स्थि} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1}$

इस लिये यदि चा का मान व, के फलरूप मे हो तो चा का मान भी व, के कोई फलरूप मे जान सकते हैं जहाँ जब चा = ० तब वक्रजातीय वृत्त का जो व्यासार्द्ध होगा वही स्थि का मान है।

जैसे चक्राभ में जानते हैं कि चा = ४अज्याप

इस लिये $\text{चा} = \text{स्थि} - \frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1} = \text{स्थि} - \text{४अकोज्याप}$ ।

इस मे यदि $व_1 = व'_1 + \frac{\pi}{2}$ और $चा' = ध + स्थि$ ऐसा कल्पना करे तो $ध = ४अ\, ज्याव'_1$ अर्थात् यह भी एक चक्रालद ही हुआ।

इसलिये चक्रालद का अवलूत एक चक्रालद ही है।

इसी प्रकार इस प्रक्रम की विपरीत क्रिया से यदि किसी वक्र का चापस्पार्शिक समीकरण ज्ञात हो तो उस के अनवलूत का चापस्पार्शिक समीकरण जान सकते हैं। क्योंकि ऊपर के प्रक्रम से सिद्ध है कि

$$\frac{ताचा}{ताव_1} = स्थि \pm चा'$$

इसलिये $$चा = \int (स्थि \pm चा')\, ताव_1$$

इसलिये यदि $चा'$ का मान $व_1$ के फल रूप मे हो तो चा का मान भी $व_1$ के कोई फल रूप में ला सकते हैं।

जैसे वृत्त में जानते हैं कि $चा' = अ\, व_1$ इसलिये

$$चा = \int (स्थि \pm अ \cdot व_1) ताव_1 = स्थि\, व_1 \pm \frac{अ\, व_1^2}{2} + स्थि_1$$

यदि चा की प्रवृत्ति वहाँ से हो जहाँ $व_1 = 0$ तो $स्थि_1 = 0$। और अवलूत और अनवलूत के योग विन्दु ही से यदि चा की गणना करे तो $स्थि = 0$ ऐसी स्थिति मे

$चा = \frac{अ \cdot व_1^2}{2}$। (चलनकलन के १७८ वे प्रक्रम का (५) उदाहरण देखो और फ के स्थान में $व_1$ को मान लो)

ऊपर कहे हुए प्रक्रम की युक्ति से अवलूत का अवलूत उस का अवलूत यो अवलूतों की परम्परा वा अनवलूत का अनवलूत उसका अनवलूत यों अनवलूतो की परम्परा सहज में जान सकते हैं।

विद्यार्थियों को चाहिये कि चापस्पार्शिक समीकरण पर से वक्रों की आकृति निकाल अच्छी तरह अभ्यास करें। परन्तु चाहिये कि ऐसा वक्र लें जिस की आकृति चक्रालद के ऐसी प्रसिद्ध हो।

९७। चाप पर से विपरीत क्रिया से वक्र के भुज कोटि का ज्ञान।

कल्पना करो कि $चा = फ(य)$ तो

$$फ'(य) = \frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \frac{तार^२}{ताय^२}}$$

इस लिये $\frac{तार}{ताय} = \sqrt{\{फ'(य)\}^२ — १}$

और $र = \int [\{फ'(य)\}^२ — १]^{\frac{१}{२}} ताय$

जैसे (१) कल्पना करो कि चा = फ(य) = गय

इसलिये $फ'(य) = ग$

और $र = \int [\{फ'(य)\}^२ — १]^{\frac{१}{२}} ताय = \int (ग^२ - १)^{\frac{१}{२}} ताय = य\sqrt{ग^२ - १} + स्थि$

यदि $र' = र — स्थि$ तो वक्र का समीकरण $र' = य\sqrt{ग^२ — १}$

(२) $चा = फ(य) = \sqrt{(४गय)}$ तो $फ'(य) = (\frac{ग}{य})^{\frac{१}{२}}$

इस लिये $र = \int \{\frac{ग}{य} - १\}^{\frac{१}{२}} ताय = \int \frac{(ग-य)ताय}{\sqrt{(गय-य^२)}} = \int \frac{(\frac{ग}{२}-य)ताय}{\sqrt{(गय-य^२)}}$

$$+ \frac{ग}{२}\int \frac{ताय}{\sqrt{(गय-य^२)}}$$

$$= \sqrt{(गय — य^२)} + \frac{ग}{२} उज्या^{-१}\frac{२य}{ग} + स्थि$$

यदि $र' = र - स्थि$ तो चलनकलन के २८६ प्रक्रम के (११) वक्र, चक्राभ का समीकरण यह है।

(३) चा = फ(य) = अ लाय तो $फ'(य) = \frac{अ}{य}$

यहाँ $र = \int \sqrt{\left[\frac{अ^२}{य^२} - १\right]} ताय = \int \frac{(अ^२ — य^२)ताय}{य\sqrt{(अ^२ — य^२)}}$

$$= \int \frac{अ^२ ताय}{य\sqrt{(अ^२ — य^२)}} - \int \frac{यताय}{\sqrt{(अ^२ — य^२)}}$$

$$= अ^२ ला\frac{य}{अ + \sqrt{(अ^२ - य^२)}} + \sqrt{(अ^२ - य^२)} + स्थि$$

इस तरह से अनेक उदाहरण का उत्तर निकाल सकते हो।

इस तरह विद्यार्थियों को चाहिये कि पूर्व प्रक्रमों में लिखे हुए सिद्धान्तों का अच्छी तरह अभ्यास कर प्रश्न का उत्तर निकालें।

९८। यदि आकाश में कोई वक्र हो जिस का समीकरण भुज, कोटि और शङ्कु से बनता हो अर्थात् तीन धरातलों के सम्बन्ध से समीकरण हो तो गोल-

युक्ति से यदि क्षितिज, पूर्वापर और याम्योत्तरवृत्त ये तीनों धरातलों को क्रम से मान लें और आकाशीय विन्दु को ग्रह कल्पना करें तो इस ग्रह का ज्ञान याम्योत्तरीय भुज = य, पूर्वापरीयकोटि = र और दृग्मण्डलीयशङ्कु = ल के ज्ञान से हो जायगा ।

यदि किसी नियत विन्दु से ग्रह के गमन दिशा से जो वक्र हुआ उस के चाप का मान = चा मानें और जब भु = य + $\triangle$य, को = र + $\triangle$र, और ल = ल + $\triangle$ल कल्पना करें और उस समय में चाप = चा + $\triangle$चा मानो तो गोलयुक्ति से $\triangle$ चा = $\sqrt{(\triangle य)^2 + (\triangle र)^2 + (\triangle ल)^2}$

$\triangle$य का भाग देकर $\triangle$य के स्थान में शून्य का उत्थापन देने से

$$\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2}$$ ऐसा होगा ।

इसी प्रकार

$$\frac{ताचा}{तार} = \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{ताय}{तार}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^2 \right\}}$$

और $$\frac{ताचा}{ताल} = \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{ताय}{ताल}\right)^2 + \left(\frac{तार}{ताल}\right)^2 \right\}}$$

यहाँ वक्र के समीकरणों पर से $\frac{ताय}{तार}$, $\frac{तार}{ताय}$, $\frac{ताल}{ताल}$, इत्यादि, य वा र अथवा ल के फल रूप में आ सकते हैं फिर इन पर से

$$चा = \int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^2 \right\}}\, ताय$$

$$वा \quad चा = \int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{ताय}{तार}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^2 \right\}}\, तार$$

$$अथवा \quad चा = \int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{ताय}{ताल}\right)^2 + \left(\frac{तार}{ताल}\right)^2 \right\}}\, ताल$$

इन का ज्ञान हो जायगा ।

इस प्रकार के वक्र को द्विगुण वक्रजातीय वक्र (Curves of double Curvatuıe) कहते हैं

जैसे कल्पना करो कि एक वक्र नीचे लिखे दो समीकरणों से ज्ञात है ।

$$र^2 = ४अय \quad \ldots\ldots \quad (१)$$

$$ल = \sqrt{(२गय - य^2)} + गउज्या^{-१}\frac{य}{ग} \quad \ldots\ldots \quad (२)$$

यहाँ दो समीकरणो से वक्र ज्ञात है इस का तात्पर्य ऐसा समझो।

कल्पना करो कि उदयास्तसूत्र और याम्योत्तर का सम्पात अ है तो अ विन्दु को मूलविन्दु, याम्योत्तर सूत्र को य अक्ष और उदयास्त सूत्र को र अक्ष कल्पना करने से (१)समीकरण का परवलय जो क्षितिज के धरातल मे उत्पन्न होगा उसको आधार मान उस पर एक समखात ऐसा वनावो जिस का पृष्ठसूत्र सव ऊर्ध्वाधरसूत्र के समानान्तर हो। इसी तरह अ को मूल मान और याम्योत्तर सूत्र को, य अक्ष, ऊर्ध्वाधर सूत्र को र अक्ष के ऐसा ल अक्ष मान याम्योत्तरवृत्त के धरातल मे जो (२)-समीकरण से चक्रालद वनेगा इस को आधार मान एक समखात वनावो जिस का सव पृष्ठ-सूत्र उदयास्त-सूत्र के समानान्तर हो तो ऐसे दो समखातो के आपस मे कटने से जो वक्र की आकृति होगी वही वक्र ऊपर के दोनो समीकरणो से अपेक्षित है।

$$\text{इस लिये यहाँ } \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{\text{अ}}{\text{य}}},\ \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left(\frac{\text{२ग}-\text{य}}{\text{ग}}\right)}$$

$$\text{और } \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{ १ + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right]^{२} + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^{२} \right\}} = \sqrt{\left(१ + \frac{\text{अ}}{\text{य}} + \frac{\text{२ग}}{\text{य}} - १\right)}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\text{२ग}+\text{अ}}{\text{य}}\right)}$$

$$\text{इसलिये चा} = \int \sqrt{\left(\frac{\text{२ग}+\text{अ}}{\text{य}}\right)}\,\text{ताय} = \sqrt{\text{२ग}+\text{अ}} \int \text{ताय य}^{-\frac{१}{२}}$$

$$= २\sqrt{(\text{२ग}+\text{अ})}\sqrt{\text{य}}$$

यदि मूल विन्दु से चाप की गणना करे तो स्थिराङ्क की कुछ आवश्यकता नहीं।

९९। इसी तरह यदि य, र, और ल किसी "का" चल के फल हों तो चलन-कलन की युक्ति से सिद्ध कर सकते हो कि

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताका}} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^{२} + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^{२} + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right]^{२} \right\}}$$

$$\text{इस लिये चा} = \sqrt{\left\{ \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताका}}\right]^{२} + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताका}}\right]^{२} + \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}}\right]^{२} \right\}}\,\text{ताका}$$

जैसे यदि य = अकोज्याका, र = अज्याका, ल = ग का

$$\text{तो } \frac{\text{ताय}}{\text{ताका}} = -\text{अज्याका},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताका}} = \text{अकोज्याका},\ \frac{\text{ताल}}{\text{ताका}} = \text{ग}$$

$$\text{इस लिये चा} = \int \sqrt{(\text{अ}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{का} + \text{अ}^{२}\text{कोज्या}^{२}\text{का} + \text{ग}^{२})}\,\text{ताका}$$

$$= \int (\text{अ}^2 + \text{ग}^2)^{\frac{1}{2}} \text{ताका} = \sqrt{(\text{अ}^2 + \text{ग}^2)}\text{का} + \text{स्थि}$$ ।

१००। यदि य = श्रुज्यापकोज्याप$_1$, र = श्रुज्यापज्याप$_1$, ल = श्रुकोज्याप ऐसा अक्षीय समीकरण हो, तो जब वक्र दो समीकरण से विदित है अर्थात् य, र, ल में से कोई दो तीसरे के फल हैं तब स्पष्ट है कि श्रु, प, प$_1$ इन में भी कोई दो तीसरे के फल होंगे। इस लिये प के वश से

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} = \text{ज्यापकोज्याप}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्यापकोज्याप}_1 - \text{श्रुज्यापज्याप}_1 \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \text{ज्यापज्याप}_1 \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} + \text{श्रुकोज्यापज्याप}_1 + \text{श्रुज्यापकोज्याप}_1 \frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \text{कोज्याप} \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याप}$$

इस लिये $\left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}}\right]^2 + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}\right]^2 + \left[\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}\right]^2$

$$= \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} \left[\frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2$$

और $\text{चा} = \int \sqrt{\left\{\left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} \left[\frac{\text{ताप}_1}{\text{ताप}}\right]^2 + \text{श्रु}^2\right\}}\ \text{ताप}$

इसी तरह र, और प$_1$ के वश से

$$\text{चा} = \int \sqrt{\left\{\text{श्रु}^2 \left[\frac{\text{ताप}}{\text{तार}}\right]^2 + 1 + \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प} \left[\frac{\text{ताप}_1}{\text{तार}}\right]^2\right\}}\ \text{ताश्रु}$$

वा, $\text{चा} = \int \sqrt{\left\{\text{श्रु}^2 \left[\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}_1}\right]^2 + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}\right]^2 \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प}\right\}}\ \text{ताप}_1$

१०१। इसी तरह अन्तरिक्ष में जो वक्र हो उस के किसी विन्दु पर जो स्पर्शरेखा हो उस पर मूलविन्दु से पड़ा लम्ब यदि ल कहो तो ७५ प्रक्रम के (६) समीकरण से $\text{चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}}$ ऐसा होगा।

यह समीकरण यद्यपि एकधरातलगत वक्र में सिद्ध होता है तथापि जब दो एकधरातलीय वक्रों के योग ही से यह वक्र उत्पन्न हुआ है तब योगविन्दु में इस में भी यही धर्म रहेगा। अथवा जब चलनकलन से सिद्ध है कि

$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}}, \frac{\text{श्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}}$ यह दोनों अन्तरिक्षस्थ वक्र के स्पर्शरेखा और श्रुति से

उत्पन्न कोण की छेदन रेखा है तब $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताश्रु}}$

$$= \frac{\text{श्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}} \therefore \text{चा} = \int \frac{\text{श्रुताश्रु}}{\sqrt{(\text{श्रु}^2 - \text{ल}^2)}} \text{ ।}$$

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। यदि वक्र का समीकरण $४(\text{य}^2 + \text{र}^2) - \text{अ}^2 = ३\text{अ}^{\frac{4}{3}}\text{र}^{\frac{2}{3}}$ यह हो तो इस के परिधि का मान बताओ । परि॰ = ६अ।

२। सिद्ध करो कि त्रीतर का चा = $\pm$ गला$^\text{र}$ + स्थि ।

३। सिद्ध करो कि किसी त्रिच्छेद (Trochoid) का चाप

$$= \text{स्थि} - \int \sqrt{\left\{ (\text{ग} - \text{क})^2 \text{ज्या}^2 \frac{\text{अ}'}{२} + (\text{ग} + \text{क})^2 \text{कोज्या}^2 \frac{\text{अ}'}{२} \right\}} \text{ता}\text{अ}'$$

जहाँ $\text{अ}' = \pi - \text{अ}$

चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१२) वक्र देखो

४। किसी वक्र में यदि $\text{य} = \text{ज्याप}\ (२\text{प} + ३\text{प}^2) + \text{कोज्याप}\ (२ + ६\text{प})$

$\text{र} = \text{कोज्याप}\ (२\text{प} + ३\text{प}^2) - \text{ज्याप}\ (२ + ६\text{प})$

तो सिद्ध करो कि $\text{चा} = \text{प}^3 + \text{प}^2 + ६\text{प} + २$ ।

५। सिद्ध करो कि किसी वक्र मे यदि

$\text{य} = \text{ज्यापफ}'(\text{प}) + \text{कोज्यापफ}''(\text{प})$

$\text{र} = \text{कोज्यापफ}'(\text{प}) - \text{ज्यापफ}''(\text{प})$

तो $\text{चा} = \text{फ}'(\text{प}) + \text{फ}''(\text{प})$ ।

६। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $\text{र} = \text{य}^2 + \frac{2}{3}\text{य}^2$ हो तो यदि मूलविन्दु से चाप की गणना करें तो $\text{चा} = \text{य}\ (\text{य}^2 + १)^{\frac{3}{2}}$ ।

७। $\text{र}^3 = \text{अय}^2$ इस समीकरण के वक्र का चापस्पार्शिकसमीकरण कैसा होगा।

उ० $\text{चा} = \frac{८\text{अ}}{२७}(\text{छे}^3\text{व}_1 - १)$ ।

८। सिद्ध करो कि परवलय के चापस्पार्शिकसमीकरण मे

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1} = \frac{२\text{अ}}{\text{कोज्या}^3\text{व}_1} \text{ । वा, चा} = \frac{\text{अ}}{२}\text{ला}\frac{१ + \text{ज्याव}_1}{१ - \text{ज्याव}_1} + \frac{\text{अज्याव}_1}{१ - \text{ज्या}^2\text{व}_1} \text{ ।}$$

९। सिद्ध करो कि यदि वक्र का $(\text{य} + \text{र})^{\frac{2}{3}} - (\text{य} - \text{र})^{\frac{2}{3}} = \text{अ}^{\frac{2}{3}}$ यह समीकरण हो तो

$$चा = \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{ (य+र)^{\frac{2}{3}} + (य-र)^{\frac{2}{3}} \right\}^{\frac{3}{2}}।$$

१०। सिद्ध करो कि अपचक्रालद का अवलूत एक अपचक्रालद ही होगा जिस के स्थिरवृत्त का व्यासार्द्ध $= \frac{अ^2}{अ + २क}$ और चलितवृत्त का व्यासार्द्ध $= \frac{अ\,क}{अ+२क}$ होगा।

११। $श्रु^{म} = अ^{म}$कोज्यामप इस समीकरण के वक्र में यदि $\frac{1}{म}$ यह कोई अभिन्नसंख्या हो तो चाप का मान जान सकते हैं।

१२। सिद्ध करो कि यदि वक्र का समीकरण $इ^{र} = \frac{इ^{य}+१}{इ^{य}-१}$ ऐसा हो तो $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{इ^{२य}+१}{इ^{२य}-१}$ होगा।

१३। यदि वृत्त का व्यासार्द्ध = १ इस के चाप का प्रमाण = प हो और इसके अनवलूत का चाप $= प_1$, अनवलूत के अनवलूत का चाप $= प_2$, इस के अनवलूत का चाप $= प_3$ इस तरह अनवलूतपरम्पराओं के चाप मान $प_4$, $प_5$ इत्यादि मानो तो सिद्ध करो कि

$प + प_1 + प_2 + प_3 + \cdots\cdots = इ^{प} - १$ होगा।

अनवलूत और वृत्त के योग विन्दु से चाप की गणना समझो।

१४। यदि किसी इलामूलक (The Lamniscate) का $श्रु^2 = अ^2$ कोज्या२प ऐसा समीकरण हो (चलनकलन के २८६ प्रक्रम का (१०) वक्र देखो)

तो सिद्ध करो कि उस के परिधि का मान

$$= २\pi अ \left(१ - \frac{१}{२^2} + \frac{१^2 \cdot ३^2}{२^2 \cdot ४^2} - \frac{१^2 \cdot ३^2 \cdot ५^2}{२^2 \cdot ४^2 \cdot ६^2} + \cdots\right) \text{ यह होगा।}$$

१५। यदि एक विन्दु से दीर्घवृत्त पर दो स्पर्शरेखा खींची जायँ तो दो स्पर्शरेखा दो भुज और उन के अन्तर्गत दीर्घवृत्त का चाप आधार मानो तो दो सरल और एक वक्ररेखा इस से एक त्रिवाहु उत्पन्न हुआ इस त्रिवाहु के अन्तर्गत जो वृत्त वनेगा वह वक्राधार को जहाँ स्पर्श करेगा उस से जो दो भाग वक्राधार के होंगे उन का अन्तर त्रिभुज के दोनो भुजों के अन्तर तुल्य होता है। इसे सिद्ध करो।

१६। जिस वक्र का $र = \frac{य^2}{२अ}$, $ल = \frac{य^3}{६अ^2}$ ये समीकरण हैं उस के मूल विन्दु से चाप का मान बतावो। उ०, $चा = य + ल$।

१७। सिद्ध करो कि यदि वक्र के समीकरण पर से $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2 = २\frac{ताल}{ताय}$ तो $चा = य + ल + स्थि$।

१८। वक्र का एक समीकरण $र = फ(य)$ यह दिया हुआ है और यह जानते हैं कि इस के चाप का मान $य + ल + स्थि$ यह है तो वक्र का दूसरा समीकरण क्या होगा। उ०, $ल = \frac{१}{२}\int \{फ(य)\}^2 ताय$।

१९। वक्र का एक समीकरण $र = ज्याय$ यह है और इस के चाप का मान $= य + ल$ तो दूसरे समीकरण का मान बताओ।

उ० $ल = \frac{अ^2}{४}\left(य + \frac{ज्या२य}{२}\right)$

२०। किसी वक्र में $र = २\sqrt{अय} — य, ल = य — \frac{२}{३}\sqrt{\frac{य^3}{अ}}$ तो चाप का क्या मान होगा। उ० $चा = य + र — ल$

२१। यदि वक्र के $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} = १$, $य = \frac{अ}{२}\left[इ^{\frac{ल}{अ}} + इ^{-\frac{ल}{अ}}\right]$ ये समीकरण हों तो चाप का क्या प्रमाण होगा।

उ०, य, र अक्ष के धरातल में जहाँ पर वक्र मिला है इस विन्दु से यदि चाप की गणना करे तो $चा = \frac{(अ^2 + क^2)^{\frac{१}{२}}}{अ}(य^2 - अ^2)^{\frac{१}{२}}$

२२। ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र मे त विन्दु पर जो स्पर्शरेखा होगी उस पर न से पड़े लम्ब का मान यदि नल' रक्खो तो सिद्ध करो कि

(१) $नल \times नल' = नअ \times नक$। (२) $नव^2 + नल'^2 = नअ^2 + नक^2$।

२३। एक दीर्घवृत्त के परिधि चतुर्थांश का ऐसा द्विभाग करो कि उनका अन्तर व्यासार्द्धान्तर तुल्य हो।

८५ प्रक्रम का (१) क्षेत्र देखो यहाँ त और व दोनो एक ही स्थान में हो जायंगे। और $नल = \sqrt{नअ \times नक}$ और $वल = नअ - नक$

२४। २३ वें प्रश्न में द्विभागकारी विन्दु जो है उस पर दीर्घवृत्त में जो स्पर्शरेखा होगी वह दोनों अक्षों में द्विभागकारी विन्दु से क्रम से व्यासार्द्ध तुल्य अन्तर पर लगेगी अर्थात् र अक्ष मे बृहद्व्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर और य अक्ष मे लघुव्यासार्द्धतुल्य अन्तर पर। इस को सिद्ध करो।

२५। यदि ८५ प्रक्रम के (१) क्षेत्र में (२२) प्रश्न के अनुसार लम्ब नल डालें तो सिद्ध करो कि बल, तल बढ़ाने से जिस विन्दु पर कटेंगे वह विन्दु दीर्घ वृत्त के उस ऐकनाभिक अतिपरवलय में होगी जो कि (२३) प्रश्न में द्विभागकारी जो विन्दु है उस पर जायगा। यहाँ पर यह भी सिद्ध करो कि अ और क विन्दुगत स्पर्शरेखाओं के योग विन्दु पर भी वह अतिपरवलय जायगा।

२६। एक ही स्थान से तीन लड़के दौड़े पहला सरल मार्ग में और बाकी दो वक्रमार्ग में। पहला जिस स्थान पर पहुँचता था वहाँ पर यदि उस की गमन दिशा पर लम्ब करें तो यह लम्ब दूसरे और तीसरे के तात्कालिक स्थान पर जाता है। यदि पहला १० कोश चल कर ठहर जाय तो उस समय दूसरा और तीसरा कितना कितना चल चुके होंगे। इस प्रश्न में हम इतना जानते हैं कि किसी समय में पहले से दूसरे के स्थान का अन्तर $= \sqrt{४अय}$, और पहले से तीसरे के स्थान का अन्तर $= अय^{\frac{३}{२}}$।

यहाँ किसी समय में पहले के चल चुकने का प्रमाण य है

$$\text{उ० दूसरे का चलना} = \sqrt{१००+१०अ} + \frac{अ}{२}\text{ला}\left\{\frac{२०+अ+२\sqrt{१००+१०अ}}{अ}\right\}$$

$$\text{तीसरे का चलना} = अ\left\{\left[\frac{४}{९अ^{२}}+१०\right]^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{२७अ^{३}}\right\}$$

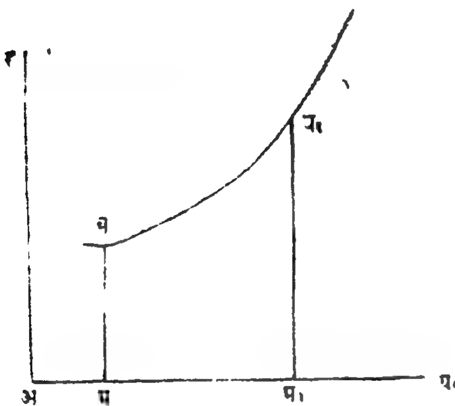
इति षष्ठाध्याय।

अथ सप्तमाध्याय।

वक्र क्षेत्रों का फलानयन।

१०२। जिस वक्र मे कोटि, भुज का कोई फल है वहाँ चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{\text{ताफ}}{\text{ताय}} = \text{र}$ (चलनकलन का १५६ वाँ प्रक्रम देखो)

इस लिये $\text{फ} = \int \text{रताय}$ इस में कोटि के स्थान में र_1 और र_2 का उत्थापन देकर सान्त चलानयन से



वम म₁व₁ वक्रचतुर्भुज का फल $\int_{\text{र}_1}^{\text{र}_2} \text{रताय}$ यह होगा।

यहाँ यदि अक्ष तिर्यक् हो तो यही फल $\text{ज्याअ}\int_{\text{र}_1}^{\text{र}_2} \text{रताय}$ ऐसा होगा। यहाँ $\text{अ} = \angle \text{रअय}$।

१०३। इस की व्याप्ति के लिये कुछ वक्रों का फलानयन करते है।

केन्द्र को मूल मान वृत्त का $\text{र} = \sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}$ यह समीकरण है इस के फल का मान जानना है।

यहां १०२ प्रक्रम से $\text{फ} = \int \sqrt{\text{अ}^2 - \text{य}^2}\,\text{ताय}$

$= \frac{\text{य}\sqrt{(\text{अ}^2 - \text{य}^2)}}{२} + \frac{\text{अ}^2}{२}\text{ज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}} + \text{स्थि}$, यदि प्रथम र को र अक्ष में मिला समझें तो उस समय $\text{य} = 0$ होगा और फल भी शून्य इसलिये $\text{स्थि} = 0$ तब फल

$$\int \sqrt{(\text{अ}^2 - \text{य}^2)}\text{ताय} = \frac{\text{य}\sqrt{(\text{अ}^2 - \text{य})}}{२} + \frac{\text{अ}^2}{२}\text{ज्या}^{-1}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\text{।}$$

इस में यदि $\text{य} = \text{अ}$ तो वृत्तके चतुर्थांश का फल $= \frac{\text{अ}^2}{२} \times \frac{\pi}{२}$

इस लिये समग्रवृत्तफल $= अ \times अ^{π} = अ^{२π} = \frac{२अ \times २अ^{π}}{४} = \frac{२अ \times परि}{४}$
अर्थात् परिधि, व्यास के घात की चौथाई वृत्त का फल होता है। इस को भास्कराचार्य भी जानते थे इन से भी प्राचीन ब्रह्मगुप्तादिको ने भी यह जान लिया था। परन्तु इस की उपपत्ति वे लोग नही दिखाये।

१०४। दीर्घवृत्त के फल का आनयन।

यहाँ $र^२ = \frac{क^२}{अ^२}(अ^२ — य^२)$ इस लिये

फ $= \frac{क}{अ}\int\sqrt{(अ^२ — य^२)}ताय$। परन्तु १०३ प्रक्रम से $\int\sqrt{(अ^२ - य^२)}ताय$ यह अ,व्यासार्द्ध से उत्पन्न वृत्त का फल है इस लिये उस वृत्त का सम्पूर्ण फल जो हो उसे लघुव्यासार्द्ध से गुण कर बृहद्व्यासार्द्ध का भाग देने से दीघवृत्त का क्षेत्र फल होता है।

१०५। परवलय के फल का आनयन।

यहाँ $र^२ = ४अय$। इस लिये

फल $= \int\sqrt{(४अय)}ताय = \frac{४\sqrt{अ}}{३}य^{\frac{३}{२}} +$ स्थि।

यहाँ यदि य = ० तो फ = ० इस लिये स्थि = ०।

तब फ $= \frac{४\sqrt{अ}}{३} \times य^{\frac{१}{२}} \times य = \frac{२यर}{३}$ अर्थात् भुज और कोटि से जो आयत बने उस का दो तृतीयांश परवलय का फल होता है।

१०६। जिस वक्र का $र = अय^{न}$ ऐसा समीकरण है उस के फल का आनयन।

यहाँ फ $= \int अय^{न}ताय = अ\int य^{न}ताय = \frac{अ \cdot य^{न+१}}{न+१} +$ स्थि।

यदि मूल स्थान से फल की प्रवृत्ति माने तो स्थि = ० इस लिये

फ $= \frac{अ \cdot य^{न+१}}{न+१} = \frac{अय^{न} \times य}{न+१} = \frac{र \times य}{न+१}$ यह फल जानने के लिये ऐसे वक्र में एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हो गया। इस में न के स्थान में यदि $\frac{१}{२}$ का उत्थापन दो तो परवलय का फल आ जायगा।

१०७। अतिपरवलय के फल का आनयन।

केन्द्र को मूल मानने से इस का समीकरण $र = \frac{क}{अ}\sqrt{(य^2 — अ^2)}$

इस लिये $फ = \frac{क}{अ}\int\sqrt{(य^2 — अ^2)}\, ताय$

$$= \frac{क}{अ}\left\{\frac{य\sqrt{(य^2 — अ^2)}}{२} - \frac{अ^2}{२}\, ला\, (य + \sqrt{(य^2 — अ^2)}\,)\right\} + स्थि$$

यदि य = अ तो फ = ० इस लिये

$$० = \frac{क}{अ}\left\{ - \frac{अ^2}{२}\, लाअ\right\} + स्थि \quad \therefore स्थि = \frac{कअ^2}{२अ}\, लाअ$$

इस लिये

$$फ = \frac{क}{अ}\left\{\frac{य\sqrt{य^2 — अ^2}}{२} - \frac{अ^2}{२}\, ला\left[\frac{य + \sqrt{य^2 — अ^2}}{अ}\right]\right\}$$

$$= \frac{यर}{२} - \frac{अक}{२}\, ला\left[\frac{य}{अ} + \frac{र}{क}\right]$$

केन्द्र से वक्र के प विन्दु तक एक रेखा कर दो तो भुज, कोटि, श्रुति से जो जात्यत्रिभुज होगा उस का फल $\frac{यर}{२}$ यह होगा। इस लिये श्रुति, अतिपरवलय का चाप और केन्द्र और शिरःस्थान का अन्तर अ से जो वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल $= \frac{अक}{२}\, ला\left(\frac{य}{अ} + \frac{र}{क}\right)$ . . . . (१)

(चलनकलन का १११ वॉ प्रक्रम देखो)

१०८। चक्रालद के फल का आनयन।

चक्रालद में $य = अ\, (१ — कोज्याप)$। $र = अ\, (प + ज्याप)$।

इस लिये $ताय = अज्याप\, ताप$।

और $रताय = अ^2\, (ज्या^2 प + पज्याप)\, ताप$

$$= अ^2 पज्यापताप + \frac{अ^2}{२}(\, १ — कोज्या२प)ताप$$

इस लिये $\int रताय = अ^2 \int पज्यापताप + \frac{अ^2}{२}\int (१ — कोज्या२प)ताप$

$$= अ^2(— पकोज्याप + ज्याप) + \frac{अ^2}{२}\left(\, प — \frac{ज्या२प}{२}\,\right)$$

यदि ० और π के बीच प के मान से फल साधन करे तो चक्रालद

के आधे का फल $= अ^2\pi + \frac{अ^2\pi}{२} = \frac{३अ^2\pi}{२}$ = चलितवृत्त के फल का डेढ़गुना इस लिये चलितवृत्त के फल को तीन गुना करने से सम्पूर्ण चक्रालद का फल होता है (चलनकलन में २८६ प्रक्रम का (११) वां वक्र देखो और वहाँ क = अ, और अ = प मान लो)

इसी वक्र मे यदि $र = अप$ तो पूर्वयुक्ति से $\int रताय = अ^2 \int पज्यापताप$

$= अ^2(-पकोज्याप + ज्याप)$ यह चक्रालद के साथी का फलसमीकरण हुआ। इस में प के ० और π के बीच यदि फल साधन करें तो आधे वक्र का फल $= अ^2 \pi$। इस लिये चलितवृत्त का दूना इस का फल होगा।

१०९। कातन्वली के फल का आनयन।

यहाँ $र = \frac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

इस लिये $फ = \int रताय = \frac{ग}{२}\int\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)ताय = \frac{ग^2}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}}\right)$

$$= ग\left\{\frac{ग^2}{४}\left(इ^{\frac{२य}{ग}} - २ + इ^{-\frac{२य}{ग}}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$= ग\left\{\frac{ग^2}{४}\left(इ^{\frac{२य}{ग}} + २ + इ^{-\frac{२य}{ग}}\right) - ग^2\right\}^{\frac{1}{2}} = ग\,(र^2 - ग^2)^{\frac{1}{2}}$$

११०। $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{२}{२म+१}} + \left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{२}{२न+१}} = १$ इस समीकरण के वक्र का फलानयन।

यहाँ यदि $य = अज्या^{२म+१}प$, और $र = क\,कोज्या^{२न+१}प$,

तो $ताय = अ\,(२म+१)\,कोज्याप\,ज्या^{२म}प\,ताप$,

इस लिये $फ = \int रताय = अक(२म+१)\int कोज्या^{२न+२}प\,ज्या^{२म}प\,ताप$,

३५ प्रक्रम के (१) समीकरण से इस का चल ला सकते हो।

वा खण्डचलानयन से

$$\int कोज्या^{२न+२}प\,ज्या^{२म}प\,ताप$$

$$= \frac{कोज्या^{२न+१}प\,ज्या^{२म+१}प}{२म+१} + \frac{२न+१}{२म+१}\int ज्या^{२म+२}प\,कोज्या^{२न}प\,ताप$$

$$= \frac{कोज्या^{२न+१}प\,ज्या^{२म+१}प}{२म+१}$$

$$+\frac{२न+१}{२म+१}\int ज्या^{२म}प_१(१-कोज्या^{२}प_१)कोज्या^{२न}प_१ताप_१$$

$$=\frac{कोज्या^{२न+१}प_१ज्या^{२म+१}प_१}{२म+१}$$

$$+\frac{२न+१}{२म+१}\int ज्या^{२म}प_१कोज्या^{२न}प_१ताप_१$$

$$-\frac{२न+१}{२म+१}\int ज्या^{२म}प_१कोज्या^{२न+२}प_१ताप_१$$

पक्षान्तरानयन कर $\frac{२म+२न+२}{२म+१}$ का भाग दे देने से

$$\int ज्या^{२म}प_१कोज्या^{२न+२}प_१ताप_१$$

$$=\frac{कोज्या^{२न+१}प_१ज्या^{२म+१}प_१}{२(म+न+१)}+\frac{२न+१}{(२म+२न+२)}\int ज्या^{२म}प_१कोज्या^{२न}प_१ताप_१ \quad \cdots (१)$$

यदि ० और $\frac{\pi}{२}$ के बीच $प_१$ के मान में सान्तचल का मान लावे तो सम्पूर्ण वक्र का फल (१) से स्पष्ट है कि

$$\frac{१.३.५.७\cdots(२न+१)\cdot१.३.५.७\cdots\cdots(२म+१)}{२.४.६.८\cdots\cdots\cdots२(म+न+१)}२अक^{\pi},$$ यही होगा।

न, म के स्थान में भिन्न भिन्न संख्याओं का उत्थापन देकर अनेक वक्र और उनके क्षेत्रफल जान सकते हो।

जैसे यदि वक्र का $\left(\frac{य}{अ}\right)^{\frac{२}{३}}+\left(\frac{र}{क}\right)^{\frac{२}{३}}=१$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ म = १ और न = १ इस लिये २न + १ = ३, और २म + १ = ३, २(म + न + १) = ६। फल में इन का उत्थापन देने से वक्र का संपूर्ण फल $=\frac{१.३.१.३}{२.४.६}$ अक$^{\pi}$ $=\frac{३}{१६}२$अक $\pi=\frac{३}{८}$ अक π

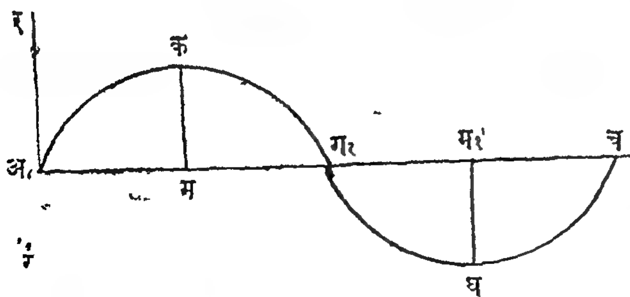
इस वक्र को चलनकलन से सिद्ध कर सकते हो कि दीर्घवृत्त का अवलत है।

१११। कभी कभी दो सीमाओं के भीतर फलानयन में बड़ा धोखा पड़ जाता है। क्योंकि ऊपर के प्रक्रमों से जो फलानयन किया है किसी स्थान में र के धनत्व वा ऋणत्व का विचार नहीं किया है सर्वत्र र को एक ही प्रकार का मान लिया है। परन्तु फलानयन में र के स्थान में य के फल में जो उस का रूप होता है उस का उत्थापन देकर फल साधन किया है इस लिये संभव है कि इस फल

में ऋणात्मक र संबन्धी य का उत्थापन देने से वही मान आवे जो कि धनात्मक र में आता हो ऐसी दशा मे अवश्य धोखा खाने की सम्भावना है।

जैसे यदि किसी वक्र का $र = ग ज्या \frac{य}{अ}$ ऐसा समीकरण हो तो यहाँ फल का समीकरण $\int र ताय = ग \int ज्या \frac{य}{अ} ताय = - गअ कोज्या \frac{य}{अ}$ मानो कि जब $य = य_1$ तो $र = र_1$ और जब $य = य_2$ तब $र = र_2$ इस लिये $र_1$ और $र_2$ कोटि मान के बीच में क्षेत्रफल $ग \int_{य_1}^{य_2} ज्या \frac{य}{अ} ताय$

$= ग अ \left[कोज्या \frac{य_1}{अ} - कोज्या \frac{य_2}{अ} \right]$ यह हुआ। इस में पहले मानो कि $य_1 = 0$, $य_2 = अ\pi$, तो फल $= २गअ$ यह होगा। फिर मानो कि $य_1 = 0$, $य_2 = २अ\pi$ तो $गअ \left[कोज्या \frac{य_1}{अ} - कोज्या \frac{य_2}{अ} \right]$ इस का मान शून्य होगा जो कि क्षेत्र की आकृति से असम्भव है क्योकि जब तक य, ० से $\frac{अ\pi}{२}$ के ऊपर आवेगा तब तक र का धनमान बढ़ता रहेगा फिर आगे धनमान घटने लगेगा जब $य = अ\pi$ तब शून्य हो जायगा इस लिये वक्र फिर य अक्ष में मिलेगा इस लिये $य_1 = 0$ और $य_1 = अ\pi$ के बीच का पहले जो फल २अग आया है वह एक ही चाल के र में सिद्ध हुआ ठीक आया। अब य का मान $अ\pi$ के आगे बढ़ेगा तब र का मान ऋण होगा और बराबर य के $२अ\pi$ मान तक ऋण ही ऋण चला जायगा ऐसी दशा मे य अक्ष से नीचे वक्र बनेगा जैसा कि नीचे की आकृति से स्पष्ट है। यहाँ $अ_1ग_1 = अ\pi$ और $अ_1च = २अ\pi$



और $कम = ग = म_1घ$। और वक्र के धन कोटि मान में $अ_1कग_1$ खण्ड और ऋण कोटि मान में $ग_1घच$ खण्ड है। इस लिये ० और $२अ\pi$ के बीच य के मान में $अ_1कग_1घच$ का फल वक्र के समीकरण से $अ_1कग_1$ का अर्थात् २ग·अ का दूना ४गअ होगा परन्तु फल के समीकरण से शून्य आया इस लिये वह असम्भव है। ऐसी स्थिति

में चाहिये कि ग,घच के फल के लिये र का मान ऋण मानो तब इस का फल $= \int (-\text{र})\text{ताय} = \text{ग}\int\left(-\text{ज्या}\,\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\text{ताय} = \text{अग कोज्या}\,\frac{\text{य}}{\text{अ}} + \text{स्थि}$

$$\text{इस लिये सम्पूर्ण फल} = \text{ग}\int_0^{\text{अ}\pi}\text{ज्या}\frac{\text{य}}{\text{अ}}\text{ताय} + \text{ग}\int_{\text{अ}\pi}^{२\text{अ}\pi}\left(-\text{ज्या}\,\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)\text{ताय}$$

$$= २\text{गअ} + २\text{गअ} = ४\text{गअ यह ठीक होगा।}$$

ऐसे ऐसे स्थानो मे र के धनत्व वा ऋणत्व का विना विचार किये फलानयन ठीक न होगा।

११२। जब कही सीमितवक्र के फल साधन मे $\int$रताय के मान मे य के स्थान मे क्या क्या उत्थापन दें जिस मे सम्पूर्ण वक्र का फल आ जाय इस में संशय जान पड़े तो $\int$रताय स्थान में $\int \text{र}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}$ ताचा इस का उत्थापन देने से सुगमता हो जायगी इस मे चा के स्थान में वक्र के परिधि का वा तत्सम्बन्धी और कोई चल का उत्थापन देने से सम्पूर्ण फल तुरन्त आ जायगा।

जैसे दीर्घवृत्त मे ७७ वे प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \text{अ}\sqrt{(१-\text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प}} \quad \text{और} \quad \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} = \text{अकोज्याप इस लिये}$$

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{कोज्याप}}{\sqrt{१-\text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प}}} \text{ और र}\cdot\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\cdot\text{ताचा} = \text{कअकोज्या}^२\text{प ताप}$$

$$\text{इस लिये}\int \text{र}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\text{ताचा} = \text{अक}\int\text{कोज्या}^२\text{प ताप}$$

$= \frac{\text{अक}}{२}(१+\text{कोज्या}२\text{प})\,\text{ताप} = \frac{\text{अक}}{२}\left(\text{प} - \frac{\text{ज्या}२\text{प}}{२}\right)$ अब सम्पूर्ण दीर्घवृत्त की परिधि मे प, चार समकोण अर्थात् २π होगा इस लिये इस का उत्थापन देने से सम्पूर्ण दीर्घवृत्त का फल $= \text{अक}\pi = \frac{\text{क}}{\text{अ}}\,\text{अ}^२\pi$। यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

कहीं कहीं य को कोटि और र को भुज मान कर भी दो भुजो के वीच वक्रीय फल का साधन कर सकते हो।

जैसे परवलय में $\text{र}^२ = ४\text{अय} \therefore \frac{\text{र}^२}{४\text{अ}} = \text{य}$ इस लिये

$\int$ यतार $= \frac{१}{४अ}\int$ र^{२}तार $= \frac{र^{३}}{१२अ} = \frac{र^{२}\times र}{४अ\times ३} = \frac{य\times र}{३}$ यह फल वक्र के विन्दु से र अक्ष पर जो य के तुल्य लम्ब पड़ा उस से और लम्बमूल और वक्र के शिरःस्थान अ तक जो रेखा और वक्र के चाप से जो वक्रत्रिबाहु हुआ उस का है।

११३। २, और ४० वें प्रक्रम से स्पष्ट है कि दो कोटियो ($र_{०}$, $र_{न}$) के बीच वक्र का फल $= \int_{य_{०}}^{य_{न}}$ रताय $= र_{०}च_{१} + र_{१}च_{२} + \cdots + र_{न-१}च_{न}$

यही है। जहाँ र = फ(य), $र_{०}$ = फ($य_{०}$), $र_{१}$ = फ($य_{१}$) $\cdots$ $र_{न}$ = फ($य_{न}$) इस लिये ६३ प्रक्रम की युक्ति से श्रेढीरूप फल के पदों का मान र$\triangle$य इस साँचे से अथवा फ(य)$\triangle$य इस साँचे से प्रकाश कर सकते है।

यहाँ भी ठीक वैसा ही अर्थ समझना चाहिये और च का सूचक जैसा कि चलनकलन में प्रसिद्ध है$\triangle$य है।

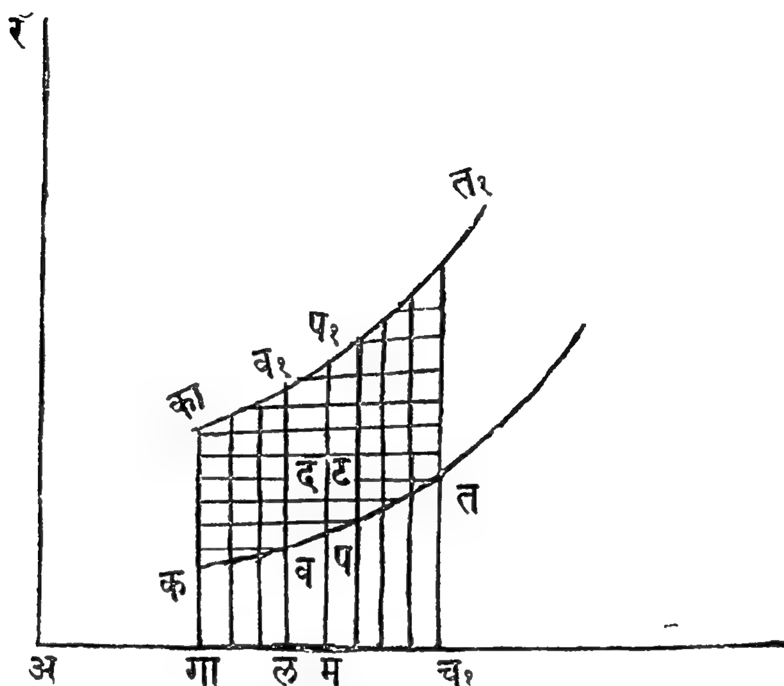
इस लिये दो कोटियोंके वीच वक्र का फल यौर$\triangle$य इस से प्रकाश कर सकते है र$\triangle$य के पहले जो यौ है उस से यह समझना चाहिये कि $\triangle$य के स्थान में $च_{१}$, $च_{२}$, $\cdots$ $च_{न}$ का और र के स्थान में $र_{०}$, $र_{१}$ $र_{२}$ $\cdots$ $र_{न-१}$ का उत्थापन देने से जितने पद होंगे उन सबों का योग किया हुआ है।

५ वें प्रक्रम से स्पष्ट जान पड़ेगा कि यदि अ$अ_{१}$, $अ_{१}अ_{२}$ इत्यादि को (जो अत्यल्प मान है) $\triangle$य से प्रकाश करें और $क_{२}अ_{१}क_{१}अ_{२}$ इत्यादि को र से, तो पास की दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर = $\triangle$य और वक्र चापान्तर से जो चतुर्भुज वनेगा उस का फल = र$\triangle$य यह होगा।

और र, के स्थान में $र_{०}$, $र_{१}$ इत्यादि का $\triangle$य के स्थान मे अ$अ_{१}$ $अ_{१}अ_{२}$ इत्यादि का उत्थापन देने से श्रेढी के प्रत्येक पद क्रम से प्रत्येक वक्रचतुर्भुज के फल होगे।

वक्र क्षेत्र के फल ही से धीरे धीरे चलराशिकलन का प्रचार हुआ। क्षेत्र का छोटा छोटा खण्ड कर के पृथक् पृथक् खण्डों के फलों के योग से फल का ले आना भास्कर के गोलाध्याय के पृष्ठ फल देखने से जान पड़ता है कि भास्कर को समझ पड़ा था परन्तु इन से पहले भारतवर्ष में इस प्रकार से फल ले आने की कही भी चर्चा नही है।

११४। दो वक्रों के चाप और उन के कोट्यन्तर से जो क्षेत्र बनेगा उस का फलानयन ।



कल्पना करो कि काव$_1$प$_1$त$_1$ एक वक्र का चाप और कवपत दूसरे वक्र का चाप, काक प्रथम कोट्यन्तर और त$_1$त दूसरा कोट्यन्तर इन से काकतत$_1$ वक्र क्षेत्र जो बना है उस का फल जानना है ।

र अक्ष के समानान्तर और य अक्ष के समानान्तर अनेक रेखा जिन में दो दो का अन्तर बहुत ही अल्प हो खींचने से देखो अनेक, क्षेत्र के भीतर आयत बन गये हैं जिन मे किसी एक दट का फल (यदि अल = य, दल = र और अम = य + $\triangle$य, मट = र + $\triangle$र) $\triangle$य$\triangle$र यही होगा । अब, वव$_1$प$_1$प वक्रचतुर्भुज के बीच जितने छोटे छोटे दट के ऐसे चतुर्भुज हैं उन के फलों का योग यौ$\triangle$य$\triangle$र यही होगा । यहाँ क्षेत्र के देखने से स्पष्ट है कि $\triangle$य सर्वत्र एक ही है इस लिये

$$\text{यौ}\triangle\text{य}\triangle\text{र} = \int_{\text{लव}}^{\text{लव}_1} \triangle\text{यतार} = \triangle\text{य}\int_{\text{लव}}^{\text{लव}_1}\text{तार}$$

इस में $\triangle$र का मान अत्यल्प मानने से अर्थात् तार मानने से वव$_1$प$_1$प वक्र चतुर्भुज के विलक्षण खण्ड हैं उन का लोप हो जायगा ।

$$\text{इस लिये वव}_1\text{प}_1\text{प} = \triangle\text{य}\int_{\text{फ(य)}}^{\text{फा(य)}}\text{तार} = \triangle\text{य}\,\{\,\text{फा(य)} - \text{फ(य)}\,\}$$

यहाँ फा(य) = $व_1ल$ = ऊपर के वक्र की कोटि और

फ(य) = वल = नीचे के वक्र की कोटि।

इस प्रकार सब स्तम्भरूप वक्रचतुर्भुजों का योग △ य { फा(य)−फ(य) } इस सांचे से निकाल सकते हो अर्थात् यदि अगा = गा, $अच_1$ = चा तो

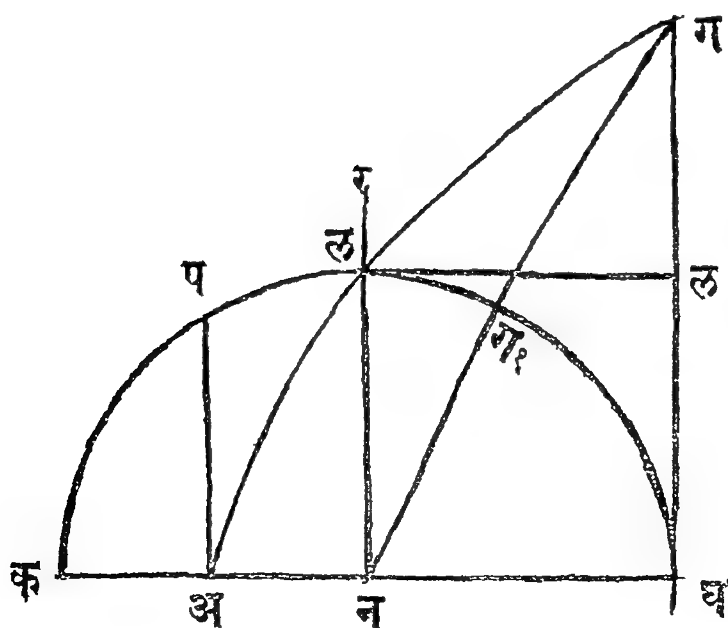
$$कका\ त_1त = यौ\triangle य \{ फा(य) - फ(य) \} = \int_{गा}^{चा} \{ फा(य) - फ(य) \}\ ताय$$

यदि द्विगुणचलानयन की रीति से इस फल को लिखे तो इस का मान $\int_{गा}^{चा}\int_{फ(य)}^{फा(य)}$ तार ताय ऐसा होगा।

११५। यदि जिन दो वक्रो के य = फा(र)। य = फ(र) ऐसे समीकरण हो और उन से सीमितक्षेत्र का फल जानना हो तो स्पष्ट है कि ऊपर के मान मे य र को बदल देना होगा। अर्थात् तब क्षेत्र का फल

$\int_{गा}^{चा}\int_{फ(र)}^{फा(र)}$ ताय तार ऐसा होगा।

११६। ऊपर के दोनो प्रक्रमों की व्याप्ति दिखलाने के लिये एक उदाहरण दिखलाते है।



कल्पना करो कि कलघ वृत्त, और अलग परवलय मे न मूलविन्दु, नल = २अ = वृत्त का व्यासार्द्ध, नअ = कअ = अ, तो यदि न विन्दु से घ की ओर भुज-

गणना करें। तो वृत्त का समीकरण $र^{२} = ४अ^{२} — य^{२}$ और परवलय का समीकरण $र^{२} = ४अ(अ + य)$ होगा। क्योंकि इस स्थिति मे न परवलय की नाभी होगी।

अब यहाँ यह इच्छा है कि घल वृत्त का चाप, गल परवलय का चाप, गघ परवलय की कोटि इन से जो गघल वक्र त्रिबाहु होगा उस का फल निकालें।

११४ वें प्रक्रम में जो ऐसे क्षेत्रों के लिये फल का $\int_{गा}^{चा}\int_{फ(य)}^{फा(य)}$ तार ताय यह समीकरण है इस में $फा(य) = \sqrt{४अ(अ+य)}$, $फ(य) = \sqrt{४अ^{२} — य^{२}}$, चा = नघ = २अ,। और गा = ० मानने से घलग का फल

$$= \int_{०}^{२अ} \{ फा(य) — फ(य) \} ताय$$

$$= \int_{०}^{२अ} \{ (४अ^{२} + ४अय)^{\frac{१}{२}} — (४अ^{२} — य^{२})^{\frac{१}{२}} \} ताय$$

$$= \int_{०}^{२अ} (४अ^{२} + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय — \int_{०}^{२अ} (४अ^{२} — य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय$$

$$परन्तु = \int (४अ^{२} + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{४}{३}\sqrt{अ}\,(अ + य)^{\frac{३}{२}}$$

$$और \int_{०}^{२अ} (४अ^{२} + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = \frac{४}{३}अ^{\frac{१}{२}}(३अ)^{\frac{३}{२}} - \frac{८}{६}\, अ^{\frac{१}{२}}अ^{\frac{३}{२}}$$

$$= \frac{४}{३}\{ (३)^{\frac{३}{२}}अ^{२} — अ^{२} \} = \frac{४अ^{२}}{३}(\sqrt{२७} — १)$$

$$और \int (४अ^{२} — य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = २अ^{२}ज्या^{-१}\frac{य}{२अ} + य\sqrt{(४अ^{२} — य^{२})}$$

$$इस लिये \int_{०}^{२अ} (४अ^{२} — य^{२})^{\frac{१}{२}} ताय = अ^{२}\pi$$

ऊपर फल मान मे इन का उत्थापन देने से

$$फ = \int_{०}^{२अ} \{ (४अ^{२} + ४अय)^{\frac{१}{२}} ताय = (४अ^{२} — य^{२})^{\frac{१}{२}} \} ताय$$

$$= \frac{४अ^{२}}{३}(\sqrt{२७} — १) — अ^{२}\pi \text{।}$$

यदि परवलय में भुज की गणना अ विन्दु से करे तो १०५ प्रक्रम से अलन परवलयखण्ड का फल $= \frac{अ \times २अ \times २}{३} = \frac{४अ^{२}}{३}$ और अगघ परवलयखण्ड

का फल $= \frac{२अघ \times गघ}{३} = \frac{२ \times ३अ(१२अ^२)^{\frac{१}{२}}}{३} = ४अ^२\sqrt{३}$ । इन दोनों का अन्तर नघगल वक्रचतुर्भुज का फल $= ४अ^२\sqrt{३} - \frac{४अ^२}{३} = \frac{४अ^२}{३}(\sqrt{२७} - १)$

इस में वृत्त के चतुर्थांश घनल को अर्थात् $अ^२\pi$ इस को घटा देने से गलघ वक्र क्षेत्र का फल $= \frac{४अ^२}{३}(\sqrt{२७} - १) - अ^२\pi$ । यही पहले भी सिद्ध हुआ था।

इसी जगह यदि अल परवलय का चाप, कल, वृत्त का चाप, और कअ भुजान्तर से जो क्षेत्र है इस का फल अपेक्षित हो तो क्षेत्र से स्पष्ट है कि न से यदि क की ओर भुजगणना करें और भुज ही को कोटि मान लें तो यहाँ वृत्त का समीकरण $र^२ = ४अ^२ - य^२$ यह जो है उस से $य^२ = ४अ^२ - र^२$ और परवलय का समीकरण $र^२ = ४अ(अ - य)$ जो यह होगा उस से $य = अ - \frac{र^२}{४अ}$

अब ११५वें प्रक्रम से $फा(र) = \sqrt{४अ^२ - र^२}$ । $फ(र) = अ - \frac{र^२}{४अ}$

$चा = २अ$, $गा = ०$ और क्षेत्र का फल $= \int_{गा}^{चा} \int_{फ(र)}^{फा(र)} ताय\, तार$

$$= \int_{०}^{२अ} \{ फा(र) - फ(र) \} तार = \int_{०}^{२अ} \{ \sqrt{४अ^२ - र^२} - अ + \frac{र^२}{४अ} \} तार$$

परन्तु $\int \sqrt{४अ^२ - र^२}\, तार = २अ^२ ज्या^{-१} \frac{र}{२अ} + र\sqrt{(४अ^२ - र^२)}$

और $\int (अ + \frac{र^२}{४अ}) तार = अर - \frac{र^३}{१२अ}$

इस लिये

$$\int_{०}^{२अ} \{ \sqrt{(४अ^२ - र^२)} - (अ - \frac{र^२}{४अ}) \} तार = अ^२\pi - २अ^२ + \frac{२}{३} अ^२$$

$$= अ^२\pi - \frac{४}{३} अ^२ \text{ यही फल हुआ।}$$

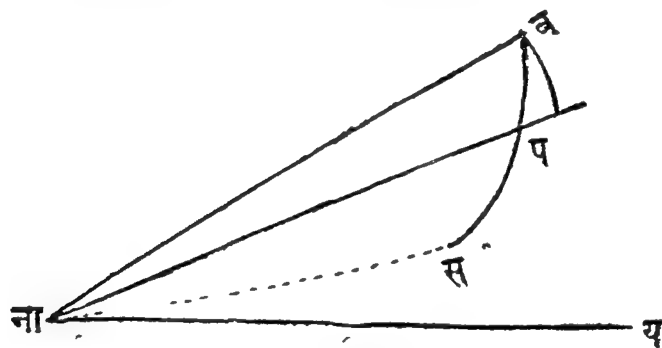
इसे परवलयखण्ड नअल और वृत्तचतुर्थांश नकल के अन्तर पर से भी निकाल सकते हो। इस तरह से जहाँ पर जिन सीमाओं के भीतर फल अपेक्षित

हो वहाँ पर क्षेत्र की आकृति से उन सीमाओं को अच्छी तरह से जाँच कर तब उन के उत्थापन से फल का साधन करो।

जहाँ दोनों वक्रात्मक भुज एक ही वक्र के शाखा हो वहाँ पर ११४ और ११५ प्रक्रम की युक्ति बहुत ही काम की है जैसे किसी वक्र का यदि $(र—मय—ग)^2=$ $अ^2—य^2$ यह समीकरण हो तो इस पर से र का एक मान $र=मय+ग+\sqrt{(अ^2—य^2)}$ यह दूसरा $मय+ग—\sqrt{(अ^2—य^2)}$ यह होगा।

यहाँ $फा(य)=मय+ग+\sqrt{(अ^2—य^2)}$ और $फ(य)=मय+ग—\sqrt{(अ^2—य^2)}$ मान ले तो $फा(य)—फ(य)=२\sqrt{(अ^2—य^2)}$ इस लिये वक्रशाखा और कोट्यन्तर से उत्पन्न फल $२\int_{गा}^{चा}\sqrt{(अ^2—य^2)}ताय$ यह होगा। यहाँ य का परमाल्प मान—अ और परमाधिक २अ मान ले तो पहले वक्र का सम्पूर्ण फल= $२\int_{-अ}^{अ}\sqrt{(अ^2—य^2)}ताय=\pi अ^2$ यही होगा।

११७। अक्षीय भुजयुग्म पर से वक्र का फलानयन।



सपब वक्र में मान लो कि ना ध्रुवस्थान नाय नियत रेखा नाप=ध्रु। ∠यनाप=प और ध्रु=फ(प)। तो यदि नासप वक्रत्रिबाहु का फल=आ हो तो चलनकलन के १५८ वे प्रक्रम से

$$\frac{ताआ}{ताप}=\frac{ध्रु^2}{२}=\frac{\{फ(प)\}^2}{२}$$

इस लिये $आ=\frac{१}{२}\int\{फ(प)\}^2ताप+स्थि$। यहाँ वक्र में स बिन्दु को कोई निश्चित बिन्दु समझो।

$$मानो कि \int\frac{\{फ(प)\}^2ताप}{२}=फा(प)$$

तो $आ = फा(प) + स्थि$ · · · · · · · (१)

कल्पना करो कि जब $प = प_१$ तब $आ = आ_१$ और जब $प = प_२$ तब $आ = आ_२$ इस लिये (१) समीकरण से

$$आ_२ - आ_१ = फा(प_२) - फा(प_१) = \frac{१}{२}\int_{प_२}^{प_२} \{ फ(प) \}^२ ताप$$

यदि श्रुति और स्पर्शरेखा से उत्पन्न कोण का मान भ रक्खो और ध्रुवस्थान से स्पर्शरेखा पर पड़े हुए लम्ब का मान ल मानो तो त्रिकोणमिति से

$$ज्याभ = \frac{ल}{श्रु} = श्रु \frac{ताप}{ताचा} \text{ (चलनकलन के १५५ वे प्रक्रम से)}$$

$$\text{इस लिये } आ = \frac{१}{२}\int श्रु^२ ताप = \frac{१}{२}\int श्रु^२ \frac{ताप}{ताचा} \cdot ताचा$$

$$= \frac{१}{२}\int \frac{श्रु \cdot ल}{श्रु} ताचा = \frac{१}{२}\int ल\, ताचा \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \quad (२)$$

यहाँ ल का मान चा के फल रूप में वा $\frac{ताचा}{ताल}$ का मान ल के फल रूप में जानने से आ का मान चा वा ल के फल रूप में जान सकते हो।

$$आ = \frac{१}{२}\int ल\, ताचा = \frac{१}{२}\int ल \frac{ताचा}{ताश्रु} ताश्रु = \frac{१}{२}\int \frac{लश्रु\, ताश्रु}{\sqrt{(श्रु^२ - ल^२)}} \quad \cdot\cdot \quad (३)$$

७५ प्रक्रम के (६)वें समीकरण से।

ऊपर दिखलाये हुए तीनो समीकरण पर से अनेक वक्र का फल जान सकते हैं।

११८। सामास्रिक सर्पिल का फलानयन (जिस वक्र के समीकरण वा नाम इत्यादि मे संशय पड़े तो चलनकलन का २८६ प्रक्रम देखना चाहिये)।

यहाँ $श्रु = अ इ^{\frac{प}{क}}$ इस लिये ११७ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$आ = \frac{१}{२}\int अ^२ इ^{\frac{२प}{क}} = \frac{अ^२क}{४} इ^{\frac{२प}{क}} + स्थि।$$

$$\text{और } आ_२ - अ_१ = \frac{अ^२क}{४}\left[इ^{\frac{२प_२}{क}} - इ^{\frac{२प_१}{क}} \right] = \frac{क}{४}(श्रु_२^२ - श्रु_१^२)$$

इस लिये $श्रु_२$, $श्रु_१$ ये दो भुज और तदन्तर्गत वक्र का चाप इन से जो क्षेत्र होगा उस का फल $\frac{क}{४}(श्रु_२^२ - श्रु_१^२)$ यही होगा।

११९। अक्षीय भुजयुग्म पर से परवलय का फलानयन।

चलनकलन के १०८ प्रक्रम से।

यहाँ $श्र = \frac{अ}{कोज्या^2 \frac{प}{2}}$ इस लिये

$$आ = \frac{अ^2}{2} \int \frac{ताप}{कोज्या^4 \frac{1}{2}प} = अ^2 \int (1 + स्प^2 \tfrac{1}{2}प)\, तास्प \tfrac{1}{2}प$$

$$= अ^2 (स्प \tfrac{1}{2}प + \frac{स्प^3 \frac{1}{2}प}{3}) + स्थि।$$

इस लिये $आ_2 - आ_1 = अ^2 (स्प \tfrac{1}{2}प_2 + \frac{स्प^3 \frac{1}{2}प}{3}) - अ^2 (स्प \tfrac{1}{2}प_1 - \tfrac{1}{3} स्प^3 \tfrac{1}{2}प_1)$

इस में यदि $प_1 = 0$ और $प_2 = \frac{\pi}{2}$ तो

$आ_2 - आ_1 = अ^2 (1 + \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}अ^2 = \frac{2}{3} \frac{अ \times 2अ}{1}$ अर्थात् परवलय के नाभिग कोटि, तत्सम्बन्धि शिरःस्थान से भुज और परवलय का चाप इन से बने क्षेत्र का फल $\frac{2}{3}$ अ × २अ यह वही सिद्ध हुआ जो १०५ वें प्रक्रम से सिद्ध होता है।

१२०। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण श्रु = अ(प + ज्याप) यह है उस का फलानयन।

यहाँ $आ = \tfrac{1}{2}अ^2 \int (प + ज्याप)^2 ताप = \frac{अ^2}{2} \int (प^2 + 2प\, ज्याप + ज्या^2 प) ताप$

परन्तु $\int प\, ज्याप = -प कोज्याप + ज्याप।$

और $\int ज्या^2 प\, ताप = \tfrac{1}{2} \int (1 - कोज्या2प)\, ताप = \tfrac{1}{2}(प - \frac{ज्या2प}{2})$

इस लिये

$$आ = \frac{अ^2}{2} \left\{ \frac{प^3}{3} - 2प कोज्याप + 2ज्याप + \frac{प}{2} - \tfrac{1}{4}ज्या2प \right\} + स्थि$$

यहाँ यदि ० और $\frac{\pi}{2}$ के बीच प के मान मे फल लावे तो

$$फल = \frac{अ^2}{2} (\frac{\pi^3}{24} + \frac{\pi}{4} + 2)।$$

१२१। यदि वक्र का अक्षीय समीकरण $श्रु = 2 अ \frac{कोज्याप - \sqrt{(कोज्या2प)}}{ज्या^2 प}$ ऐसा हो तो

$$आ = 2 अ^2 \int \frac{कोज्या^2 प + कोज्या2प - 2 कोज्याप \sqrt{(कोज्या2प)}}{ज्या^4 प} ताप$$

$$= २\,अ^२ \int \frac{कोज्या^२ ष + कोज्या२ष}{ज्या^४ ष} ताष - ४अ^२ \int \frac{कोज्याष\sqrt{कोज्या२ष}}{ज्या^४ ष} ताष$$

$$परन्तु \int \frac{कोज्या^२ ष + कोज्या२ष}{ज्या^४ ष} ताष = \int (२कोस्प^२ प - १)\, कोछे^२ षताष$$

$$= कोस्पष - \frac{२}{३} कोस्प^३ ष ।$$

$$और \int \frac{कोज्याष\sqrt{(कोज्या२ष)}}{ज्या^४ ष} ताष = \int \frac{\sqrt{(१ - २\,ज्या^२ ष)}\, ताज्याष}{ज्या^४ ष}$$

इस में मानो कि ज्याष $= \frac{१}{द}$ तो

$$\int \frac{\sqrt{(१ - २\,ज्या^२ ष)}}{ज्या^४ ष} ताष = - \int \sqrt{(द^२ - २)}\, दताद$$

$$= -\frac{१}{३}(द^२ - २)^{\frac{३}{२}} = -\frac{१}{३}\left(\frac{१}{ज्या^२ ष} - २\right)^{\frac{३}{२}}$$

$= -\frac{१}{३}(कोछे^२ प - २)^{\frac{३}{२}}$ इन का उत्थापन आ में देने से

$$आ = २अ^२ कोस्पष - \frac{४अ^२}{३} कोस्प^३ ष + \frac{४अ^२}{३}(कोछे^२ प - २)^{\frac{३}{२}} + स्थि$$

$$= २अ^२ कोस्पष + \frac{४अ^२}{३}\left\{(कोछे^२ प - २)^{\frac{३}{२}} - कोस्प^३ प\right\} + स्थि$$

$$= २अ^२ कोस्पष + \frac{४\,अ^२}{३}\left\{\frac{(१ - २ज्या^२ प)^{\frac{३}{२}} - ज्या^३ षकोस्प^३ प}{ज्या^३ प}\right\} + स्थि$$

$$= २\,अ^२ कोस्पष + \frac{४\,अ^२}{३}\,\frac{(कोज्या२ष)^{\frac{३}{२}} - कोज्या^३ ष}{ज्या^३ ष} + स्थि$$

१२२। जिस सर्पिल का अक्षीयसमीकरण श्रु $=$ अष^न यह है उस का फलानयन।

$$यहाँ\ आ = \frac{१}{२}\int श्रु^२ ताप = \frac{१}{२}\int अ^२ प^{२न}\, ताप = \frac{अ^२}{२}\int ष^{२न} ताष$$

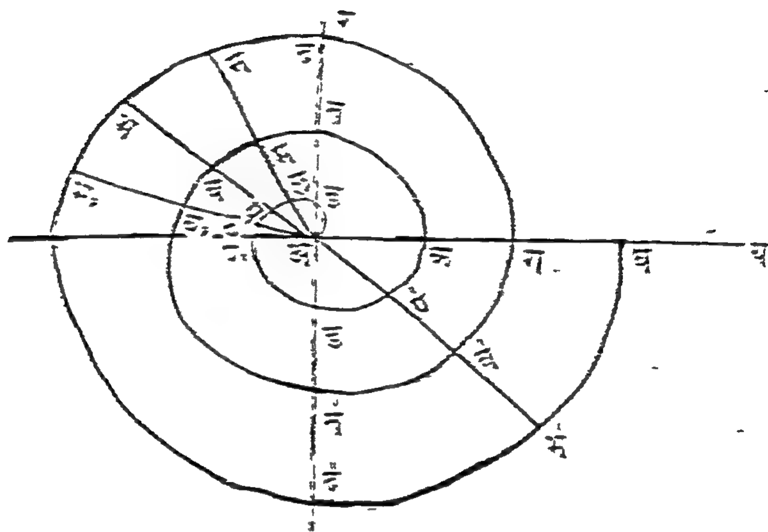
$$= \frac{अ^२}{२(२न+१)}\, ष^{२न+१} + स्थि = \frac{अ^२ प^{२न} \times प}{२(२न+१)} + स्थि = \frac{श्रु^२ \times प}{२(२न+१)} + स्थि$$

$$= \frac{श्रु^२ \times \left(\frac{श्रु}{अ}\right)^{\frac{१}{न}}}{२(२न+१)} + स्थि = \frac{श्रु^{\frac{२न+१}{न}}}{२अ^{\frac{१}{न}}(२न+१)} + स्थि$$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से जब ष $= ०$, श्रु $= ०$ और फल $= ०$ इस लिये स्थिराङ्क शून्य होगा। इस मे यदि न $= १$ तो सर्पिल आर्किमिडिज़ का हो जायगा इस की

आकृति चलन कलन के २८६ प्रक्रम में लिखी है यहाँ भी बोध के लिये नीचे लिखा है।

इस में अ ध्रुव, अय स्थिर रेखा जिस से य की गणना है। य से त की ओर धन माना है। जब य = ० तब ध्रु = अ·य = ०। जब य = $\frac{π}{२}$। तब ध्रु = $\frac{अπ}{२}$ = अइ। जब य = π, तब ध्रु = अπ = अग।



इसी तरह जब य = २π तब ध्रु = २अπ = अक। इस लिये अ के चारों ओर ध्रुति के एक बार घूमने में अइगउक ... खण्ड उत्पन्न हुआ।

इस खण्ड और अक ध्रुति से जो क्षेत्र बना है उस का फल ऊपर फल के समीकरण में अर्थात् $\frac{ध्रु^{\frac{२न+१}{न}}}{२अ^{\frac{१}{न}}(२न+१)}$ इस में न के स्थान में १ और ध्रु के स्थान में २अπ का उत्थापन देने से $\frac{ध्रु^{३}}{६अ} = \frac{८अ^{३} \times π^{३}}{६अ} = \frac{४अ^{२}π^{३}}{३} = \frac{π \times (२अπ)^{२}}{३}$

$= \frac{πध्रु^{२}}{३}$ ऐसा होगा यदि ध्रु = २अπ। और जब ध्रुति का दो फेरा होगा तब ध्रु = ४अπ = २ध्रु इस का फल में उत्थापन देने से $\frac{π(२ध्रु)^{३}}{३ध्रु}$ यह मान आवेगा इस में अ के चारों ओर ध्रुति के दो बार घूम जाने के कारण अइगउक खण्ड एक दो बार आजावेगा इस लिये ध्रुति के दो बार फेरा करने में वलय का ठीक फल = $\frac{π(२ध्रु)^{३}}{३ध्रु} - \frac{πध्रु^{२}}{३} = \frac{७πध्रु^{२}}{३}$ यह होगा और

दोनों फेरों के चापों के अन्तर में $\frac{७\pi श्रु^२}{३} - \frac{\pi श्रु^२}{३} = \frac{६\pi श्रु^२}{३}$

$= २\pi श्रु^२$ यह फल होगा।

इसी तरह श्रुति के न वार फेरा करने में श्रु = नश्रु और न—१ वार फेरा करने में श्रु = (न—१) श्रु।

इस लिये श्रु के न वार फेरा करने में फल $= \frac{\pi}{३} \frac{(नश्रु)^३ - (न-१)^३ श्रु^३}{श्रु}$

$$= \frac{\pi श्रु^२}{३} \left\{ न^३ - (न-१)^३ \right\}$$

और न + १ वार फेरा करने में फल $= \frac{\pi श्रु^२}{३} \left\{ (न+१)^३ - न^३ \right\}$

इस लिये न और न + १ वार फेरा करने में दोनों चापों के अन्तर में फल $= \frac{\pi श्रु^२}{३} \left\{ (न+१)^३ + (न-१)^३ - २न^३ \right\} = \frac{\pi श्रु^२}{३} \times ६न = २न\pi श्रु^२$

= प्रथम और दूसरे फेरे के चापों के अन्तर सम्बन्धी फल का न गुना यह सिद्ध होता है।

इस सर्पिल के विषय में आगे कुछ और विचार किया जायगा।

१२३। इलामूलक के फल का आनयन।

यहाँ $श्रु^२ = २ क^२$ कोज्या२ष

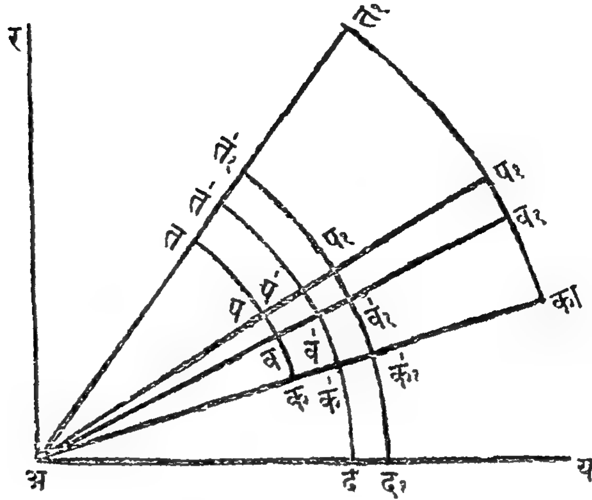
इस लिये $आ = क^२ \int$ कोज्या २ ष ताष $= \frac{क^२}{२}$ ज्या२ष + स्थि।

यहाँ वक्र के लक्षण से जब ष = ० तब आ = ० इस लिये स्थि = ०।

तब आ $= \frac{क^२}{२}$ ज्या२ष इस में ष के स्थान में $\frac{\pi}{४}$ का उत्थापन देने से

चतुर्थांश फल $= \frac{क^२}{२}$ इस को ४ से गुणने से संपूर्ण इलामूलक का फल $= २ क^२$

१२४। दो वक्र के चाप और श्रुत्यन्तर से बने क्षेत्र का फलानयन। कल्पना करो कि अ ध्रुवस्थान और अय, अर अक्ष से जो काव₁प₁त₁ कवपत वक्र के चाप और काक, तत₁श्रुत्यन्तर से क्षेत्र है उस के फल का ज्ञान करना है।



अवव$_1$, अपप$_1$ अत्यन्त निकट दो श्रुति रेखा खींचो। अव = श्रु, अप = श्रु + $\triangle$श्रु। अव$_1$ = श्रु$_1$। अप$_1$ = श्रु$_1$ + $\triangle$श्रु$_1$। और
$\angle$व$_1$ अप$_1$ = $\triangle$प। और कवपत वक्र का समीकरण श्रु = फ(प) और का व$_1$प$_1$त$_1$ का समीकरण श्रु$_1$ = फा(प) समझो तो पव और प$_1$व$_1$ को अत्यल्प होने के कारण सरल रेखा मान लेने से
अकव, अकप वक्र त्रिभुज का अन्तर = $\triangle$अवप = $\frac{1}{2}\triangle$प श्रु (श्रु + $\triangle$श्रु) और
काअव$_1$ काअप$_1$ का अन्तर = $\triangle$अव$_1$प$_1$ = $\frac{1}{2}\triangle$प श्रु$_1$(श्रु$_1$ + $\triangle$श्रु$_1$)

इस लिये दोनो का अन्तर = काकपप$_1$–काकवव$_1$ = व$_1$वपप$_1$ = $\triangle$आ = $\frac{1}{2}\triangle$प { श्रु$_1$(श्रु$_1$ + $\triangle$श्रु$_1$)—श्रु(श्रु + $\triangle$श्रु) }

इस लिये $\frac{\triangle आ}{\triangle प}$ = $\frac{1}{2}$ { श्रु$_1$(श्रु$_1$ + $\triangle$श्रु$_1$)—श्रु(श्रु + $\triangle$श्रु) }

इस में प मान शून्य मानने से श्रु$_1$ = ०, श्रु = ०, इस लिये
$\frac{ताआ}{ताप}$ = $\frac{1}{2}$ (श्रु$_1^2$—श्रु^{2}) = $\frac{1}{2}$ [{ फा(प) }^{2}— { फ(प) }^{2}]

इस लिये आ = $\frac{1}{2}\int$[{ फा(प) }^{2}— { फ(प) }^{2}]ताप

यदि $\angle$यअका = अ$_1$, $\angle$यअत$_1$ = क$_1$ तो काकवपतत$_1$प$_1$व$_1$का का फल आ =
$\frac{1}{2}\int_{अ_1}^{क_1}$[{ फा(प) }^{2}— { फ(प) }^{2}]ताप (१)

जब $\int$श्रु ताश्रु = $\frac{श्रु^2}{२}$ ± स्थि इस लिये $\int_{फ(प)}^{फा(प)}$ श्रु ताश्रु

$= \frac{1}{2}[\{फा(प)\}^2 - \{फ(प)\}^2]$ इस पर से (१) समीकरण को द्विगुण चलानयन की रीति से $\int_{अ_1}^{क_1}\int_{फ(प)}^{फा(प)}$ श्रु ताश्रु ताप ऐसे लिख सकते हो।

१२५। इसी जगह यदि प = फ(श्रु), $प_1$ = फा(श्रु) ऐसे दो समीकरण के वक्र के चापों से और श्रु = अ, $श्रु_1$ = क ऐसे समीकरण के दो वृत्तों के चापों से वने क्षेत्र का फल जानना हो तो मान लो कि कक′क′$_1$का, तत′त′$_1$त$_1$ दो वक्र के चाप और कवपत, काव$_1$प$_1$त$_1$ दो वृत्त के चाप हैं जिन का अ केन्द्र है। अ केन्द्र से दक′व′प′त′, और द$_1$क′$_1$व′$_1$प′$_1$त′$_1$ वृत्त का चापखण्ड वनावो जिनके व्यासार्द्ध श्रु, श्रश्रु + श्रु हैं। तो चलनकलन के १५९ वें प्रक्रम से तत′त$_1$प′$_1$व′$_1$क′$_1$क′व′प′त′ का फल = आ

$$= \frac{\{श्रु(प_1 - प) + (श्रु + \triangle श्रु)(प_1 - प)\}\triangle श्रु}{2}$$ । △श्रु का भाग दे देने से

$$\frac{आ}{श्रु} = \frac{श्रु(प_1 - प) + (श्रु + \triangle श्रु)(प_1 - प)}{2}$$

इस लिये

$$\frac{ताआ}{ताश्रु} = श्रु(प_1 - प) = श्रु\{फा(श्रु) - फ(श्रु)\}$$

इस लिये अभीष्ट क्षेत्र का फल

$$= \int_{अ}^{क} श्रु\{फा(श्रु) - फ(श्रु)\} ताश्रु = आ \quad \cdots\cdots (१)$$

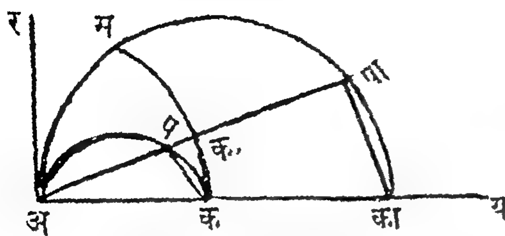
जब $\int$ श्रुताप = श्रु $\int$ ताप = श्रुप, श्रु को स्थिर मानसे से

इस लिये $\int_{फ(श्रु)}^{फा(श्रु)}$ श्रुताप = श्रु {फा(श्रु) — फ(श्रु)}

इस लिये द्विगुणचलानयन की रीति से ऊपर के फल को

$\int_{अ}^{क}\int_{फ(श्रु)}^{फा(श्रु)}$ श्रुताप ताश्रु ऐसे लिख सकते हो। यदि यहाँ दो वक्रों के चापान्तर्गत सीमित दोनों कर्णों के अनेक विभाग कर ध्रुव विन्दु से प्रत्येक विभाग पर गया ऐसा अनेक वृत्त वना डालो और वक्र चापों का भी अनेक विभाग कर प्रति विभागों मे जो रेखा लगा दो तो रेखा और वृत्त के चापखण्डों से अनेक चतुर्भुज होगे जिन मे किसी एक का फल = श्रप यह होगा।

१२६। जैसे अपक, अपाका वृत्तार्द्ध के चापों से और कका रेखा से बने क्षेत्र का फल जानाना है तो मानो



अक = ग, अका = च

$\angle$काअपा = प, तो अप = श्रु = गकोज्याप, अपा = श्रु_1 = चकोज्याप

इस लिये १२४ प्रक्रम से

$$\text{अभीष्ट फल} = \int_{\text{अ}_1}^{\text{क}_1}\int_{\text{फ}(\text{प})}^{\text{फा}(\text{प})} \text{श्रुताश्रु ताप} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\text{गकोज्याप}}^{\text{चकोज्याप}} \text{श्रुताश्रु ताप}$$

$$\text{अब यहाँ} \int_{\text{गकोज्याप}}^{\text{चकोज्याप}} \text{श्रुताश्रु} = \tfrac{1}{2}\,(\text{च}^2 - \text{ग}^2)\text{कोज्या}^2\text{प}$$

$$\text{इस लिये अभीष्ट फल} = \tfrac{1}{2}\,(\text{च}^2 - \text{ग}^2)\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^2\text{प ताप}$$

$$\text{इस में} \int \text{कोज्या}^2\text{प ताप} = \int \frac{1 + \text{कोज्या}२\text{प}}{2}\,\text{ताप} = \frac{\text{प}}{2} + \frac{\text{ज्या}२\text{प}}{4}$$

इस लिये $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^2\text{प ताप} = \frac{\pi}{4}$ इस का उत्थापन फल मे देने से फल = $\frac{\pi}{8}\,(\text{च}^2 - \text{ग}^2)$।

इसी क्षेत्र का यदि अक व्यासार्द्ध से बना कक₁स वृत्त चाप से दो खण्ड करें तो पहले अस, सक, अपक, वृत्त चापो से बने क्षेत्र का फल १२५ वें प्रक्रम से, मान लो कि कपस एक वृत्त का चाप, और दूसरे वृत्त का अ बिन्दु रूप चाप, एक वक्र अपक वृत्तार्द्ध चाप, और दूसरा अस बड़े वृत्तार्द्ध का चाप इन से बना हुआ क्षेत्र है। यहाँ श्रु = गकोज्याप। और दूसरी श्रु = चकोज्याप

इस लिये प = $\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}$, और $\text{प}_1 = \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}$, क = ग, अ = ०

इन का उत्थापन देने से

$$\int_{\text{अ}_1}^{\text{अ}}\int_{\text{फ}(\text{श्रु})}^{\text{फा}(\text{श्रु})} \text{श्रुताप ताश्रु} = \int_{0}^{\text{ग}}\int_{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुतापताश्रु}$$

यहाँ $\int_{\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}}^{\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुताय} = \text{श्रु}\left[\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}\right]$

और $\int \text{श्रुकोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\,\text{ताश्रु} = \frac{१}{४}\left\{(२\text{श्रु}^{२} - \text{च}^{२})\,\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{श्रु}\sqrt{(\text{च}^{२} - \text{श्रु}^{२})}\right\}$ ।

$\int \text{श्रुकोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}\,\text{ताश्रु} = \frac{१}{४}\left\{(२\text{श्रु}^{२} - \text{ग}^{२})\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}} - \text{श्रु}\sqrt{(\text{ग}^{२} - \text{श्रु}^{२})}\right\}$

इस लिये $\int_{०}^{\text{ग}} \text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\,\text{ताश्रु}$

$= \frac{१}{४}\left\{(२\text{ग}^{२} - \text{च}^{२})\,\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{ग}}{\text{च}} - \text{ग}\sqrt{(\text{च}^{२} - \text{ग}^{२})} + \text{च}^{२}\,\frac{\pi}{२}\right\}$

और $\int_{०}^{\text{ग}} \text{श्रुकोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}\,\text{ताश्रु} = \frac{१}{४}\left\{\text{ग}^{२}\,\frac{\pi}{२}\right\}$

इस लिये

$$\int_{०}^{\text{ग}}\int_{\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{ग}}}^{\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुतापताश्रु}$$

$= \frac{१}{४}\left\{(२\text{ग}^{२} - \text{च}^{२})\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{ग}}{\text{च}} - \text{ग}\sqrt{(\text{च}^{२} - \text{ग}^{२})} + \frac{\pi}{२}(\text{च}^{२} - \text{ग}^{२})\right\}$ यह एक खण्ड का फल हुआ।

अब कस वृत्तचाप, कास वृत्तचाप, और कका रेखा से उत्पन्न क्षेत्र के फल साधन में एक वक्र के चाप को कका रेखा समझो और दूसरे वक्र को असका मान लो तो $\text{प} = ० = \text{फ(श्रु)}$, $\text{प}_{१} = \text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}} = \text{फा(श्रु)}$, $\text{क} = \text{च}$, $\text{अ} = \text{ग}$ । इनका उत्थापन १२५ वें प्रक्रम के (१) समीकरण के दूसरे रूप में देने से

$$\int_{\text{अ}}^{\text{क}}\int_{\text{फ(श्रु)}}^{\text{फा(श्रु)}} \text{श्रुतापताश्रु} = \int_{\text{ग}}^{\text{च}}\int_{०}^{\text{कोज्या}^{-१}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}} \text{श्रुतापताश्रु}$$

यहाँ भी पहले खण्ड के फल साधन के ऐसा

$$\int_{0} \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\, \text{श्रुताप} = \text{श्र कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्र}}{\text{च}}$$

$$\int \text{श्रु कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\, \text{ताश्रु} = \frac{१}{४}\left\{(२\text{श्रु}^{२}-\text{च}^{२})\, \text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}} - \text{श्रु}\sqrt{(\text{च}^{२}-\text{श्रु}^{२})}\right\}$$

इस लिये

$$\int_{\text{च}}^{\text{ग}}\int_{0}^{\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्र}}{\text{च}}} \text{श्र ताप ताश्रु}$$

$$= \int_{\text{ग}}^{\text{च}} \text{श्रु कोज्या}^{-1}\frac{\text{श्रु}}{\text{च}}\, \text{ताश्रु}$$

$$= \frac{१}{४}\left\{\text{ग}\sqrt{(\text{च}^{२}-\text{ग}^{२})} - (२\text{ग}^{२}-\text{च}^{२})\text{कोज्या}^{-1}\frac{\text{ग}}{\text{च}}\right\}$$

यही दूसरे खण्ड का फल हुआ।

अब इन दोनो खण्डो का योग करो तो $\frac{\pi}{४}(\text{च}^{२}-\text{ग}^{२})$ यह सम्पूर्ण क्षेत्र का फल ठीक पहले ही के तुल्य आया।

१२७। यदि अक्षीय समीकरण पर से ११५ प्रक्रम के अलक क्षेत्र का फल साधन करे तो यहाँ न को ध्रुव स्थान मानने से परवलय का समीकरण $\text{श्रु} = \dfrac{\text{अ}}{\text{कोज्या}^{२}\frac{\text{प}}{२}}$ जहाँ प का मान नक रेखा से लिया गया है। और वृत्त का अक्षीय समीकरण श्रु = २ अ। इस लिये पहले श्रु के वश चलानयन करने से अलक का फल $= \int_{0}^{\frac{\pi}{२}}\int_{\text{अछे}^{२}\frac{\text{प}}{२}}^{२\text{अ}} \text{श्रु ताश्रु ताप}$

इसी जगह यदि प के वश से पर और ढमयन करें तो $\text{प}_{१}$ $= \text{कोज्या}^{-1}\dfrac{२\text{अ}-\text{श्रु}}{\text{श्रु}}$ मान लेने से अलक का फल $= \int_{\text{अ}}^{२\text{अ}}\int_{0}^{\text{प}_{१}}\int \text{श्रु तापताश्रु}$।

यदि घलग का फल अपेक्षित हो तो घग का अक्षीय समीकरण $\text{श्रु} = -\dfrac{२\text{अ}}{\text{कोज्याप}}$ और नग = ४अ, ∠कनग = $\frac{२\pi}{३}$, और मान लो कि $\text{प}_{१}$ $= \text{कोज्या}^{-1}\dfrac{२\text{अ}-\text{श्रु}}{\text{श्र}}$ और $\text{प}_{२} = \left[\dfrac{-२\text{अ}}{\text{श्रु}}\right]$। अब यहाँ पहले प के वश

चलानयन करने से घलग का फल $= \int_{२अ}^{४अ} \int_{ष_१}^{ष_२}$ श्रु ताषताश्रु । इसी का फल नग रेखा से दो भाग कर पृथक् पृथक् लावे तो पहले उस खण्ड का फल जिस में लग चाप है $\int_{\frac{\pi}{२}}^{\frac{२\pi}{३}} \int_{२अ}^{अछे^{२}\frac{ष}{२}}$ श्रुताश्रुताष

यह होगा फिर दूसरे खण्ड का फल $= \int_{\frac{२\pi}{३}}^{\pi} \int_{२अ}^{२अछेष}$ श्रुताश्रुताष यह होगा और इन दोनों का योग ठीक पहले के बराबर क्षेत्र फल निकल आवेगा। इस तरह से जहाँ पर जैसा सुभीता जान पड़े तहाँ पहले श्रु के वश अथवा ष के वश चलानयन करो।

१२८। १२२ प्रक्रम में जो आर्किमिडिज़ का सर्पिल है उस मे $व_१$वम को एक वक्रचाप और $भ_१$ भन को दूसरे वक्र का चापखण्ड मान लो तो १२४ प्रक्रम की युक्ति से $व_१$ $भ_१$ नम का फल $= \int_{ष_१}^{ष_२} \int \frac{फा(ष)}{फ(ष)}$ श्रु ताश्रु ताष

ऐसा होगा। यहाँ $फ(ष) = अष$ और $फा(ष) = अ(ष + २\pi)$ मानो तो

$$\int_{फ(ष)}^{फा(ष)} श्रु\ ताश्रु = \frac{१}{२}[\{फा(ष)\}^{२} - \{फ(ष)\}^{२}]$$

$$= \frac{१}{२}(अ^{२}ष^{२} + ४अ^{२}ष\pi + ४अ^{२}\pi^{२} - अ^{२}ष^{२}) = \frac{अ^{२}}{२}\left\{(ष + २\pi)^{२} - ष^{२}\right\}$$

$$और \int \frac{अ^{२}}{२}\left\{(ष + २\pi)^{२} - ष^{२}\right\} ताष = \frac{अ^{२}}{२}\left\{\frac{(ष + २\pi)^{३}}{३} - \frac{ष^{३}}{३}\right\}$$

इस लिये

$$\int_{ष_१}^{ष_२}\int_{फ(ष)}^{फा(ष)} श्रुताश्रुताष = \frac{अ^{२}}{२}\left\{\frac{(ष_२ + २\pi)^{३} - ष_२^{३}}{३} - \frac{(ष_१ + २\pi)^{३} - ष_१^{३}}{३}\right\}$$

$$= \frac{अ^{२}}{२}\left\{\frac{\times ६ष_२^{२}\pi + १२ष_२\pi^{२} + ८\pi^{३} - ६ष_१^{२}\pi - १२ष_१\pi^{२} - ८\pi^{३}}{३}\right\}$$

$$= \frac{अ^{२}}{२}\left\{२ष_२^{२}\pi + ४ष_२\pi^{२} - २ष_१^{२}\pi - ४ष_१\pi^{२}\right\} = \frac{अ^{२}}{२}\left\{२\pi(ष_२^{२} - ष_१^{२}) + ४\pi२(ष_२ - ष_१)\right\}$$

यह फल हुआ। इस मे यदि $प_2 = २न\pi$ और $प_1 = २\pi(न-१)$ हो तो न और न+१ वार श्रु के फेरा करने मे दोनों चापो के अन्तर का फल

$$= \frac{अ^2}{२}\left\{ २\pi(प_2^2 - प_1^2) + ४\pi^2(प_2 - प_1) \right\}$$

$$= \frac{अ^2}{२}\left\{ २\pi(४न^2\pi^2 - ४न^2\pi^2 + (न\pi^2 - ४\pi^2) + ८\pi^3 \right\}$$

$$= \frac{अ^2}{२}(१६ न\pi^3) = ८नअ^2\pi^3 = २\pi न \times ४\pi^2 अ^2 = २\pi नश्रु^2$$

यही ठीक १२२वें प्रक्रम मे भी उत्पन्न हुआ था परन्तु इस क्रिया से वहुत ही स्पष्ट रूप से उपपन्न होता है और १२२वे प्रक्रम मे जो युक्ति लिखी है वह वड़े गाम्भीर्य विचार करने से तव मन मे वैठती है॥

१२९। अपचक्रालद के अक्षीय समीकरण पर से फलानयन। (११७ प्रक्रम का (३) समीकरण देखो) फल = आ $= \frac{1}{2}\int \frac{ल श्रु ता श्रु}{\sqrt{(श्रु^2 - ल^2)}}$

यहाँ क्षेत्र के लक्षण से $ल = \frac{ग\sqrt{(श्रु^2 - अ^2)}}{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}$ (८२ प्रक्रम देखो)

इस लिये फल $= \frac{1}{2}\int \frac{ग\sqrt{(श्रु^2 - अ^2)} श्रु ता श्रु}{अ\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}} = \frac{ग}{२अ}\int \frac{\sqrt{(श्रु^2 - अ^2)} श्रु ता श्रु}{\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}}$

$= \frac{ग}{२अ}\int \frac{व^2 ता व}{\sqrt{(ग^2 - अ^2 - व^2)}}$ यदि $व^2 = श्रु^2 - अ^2$

अव $\int \frac{व^2 ता व}{\sqrt{(ग^2 - अ^2 - व^2)}} = \int \frac{व^2 - (ग^2 - अ^2)}{\sqrt{(ग^2 - अ^2 - व^2)}}$ ता व

$+ (ग^2 - अ^2)\int \frac{ता व}{\sqrt{(ग^2 - अ^2 - व^2)}} = (ग^2 - अ^2)\int \frac{ता व}{\sqrt{(ग^2 - अ^2 - व^2)}}$

$- \int \sqrt{(ग^2 - अ^2 - व^2)} ता व = \frac{ग^2 - अ^2}{२}$ ज्या$^{-1}\frac{व}{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}$

$- \frac{व\sqrt{(ग^2 - अ^2 - व^2)}}{२} = \frac{ग^2 - अ^2}{२}$ ज्या$^{-1}\frac{\sqrt{(श्रु^2 - अ^2)}}{\sqrt{(ग^2 - अ^2)}}$

$- \frac{\sqrt{(श्रु^2 - अ^2)}\sqrt{(ग^2 - श्रु^2)}}{२}$ इस पर से

श्रु = अ और श्रु = ग इस के भीतर का मान $= \frac{ग^2 - अ^2}{२}\cdot\frac{\pi}{२}$ इस

को $\frac{ग}{२अ}$ से गुण देने से $\frac{ग}{२अ} \cdot \frac{ग^२ - अ^२}{२} \frac{\pi}{२}$ इस में ग के स्थान में अ + २क का उत्थापन देने से

$\frac{(अ+२क)\ क\ (अ+क)\pi}{२अ}$ इस को दूना करने से चलितवृत्त के एक वार घूम जाने से जो वक्र का अवयव और तत्सम्बन्धी श्रुतियों से उत्पन्न क्षेत्र का फल $= \frac{(अ+२क)\ क\ (अ+क)\pi}{अ}$ ।

यहां पर दोनो श्रुतियाँ स्थिरवृत्त के व्यासार्द्ध = अ है और तदन्तर्गत स्थिरवृत्त का चाप चलितवृत्त के परिधि २कπ तुल्य है इस लिये उस वृत्तखण्ड का फल = अकπ इस को ऊपर के फल में घटा देने से स्थिरवृत्त के परिधि और वक्र चाप से उत्पन्न फल

$$= \frac{(अ+२क)\ क\ (अ+क)\pi}{अ} - अक\pi$$

$$= \frac{क(अ^२ + ३अक + २क^२)\pi - अ^२क\pi}{अ} = \frac{\pi क^२}{अ}(३अ + २क)$$

इसी तरह से अतिचक्रालद मे यदि अ > क तो क का चिह्न वदल देनेसे फल $\frac{\pi क^२}{अ}(३अ - २क)$ यह होगा।

१३०। एक वक्र का फ$\left(\frac{य}{अ}, \frac{र}{क}\right)$ = ग . . . (१) यह समीकरण और दूसरे वक्र का फ(य,र) = ग यह समीकरण है इस को (२) कहो अब इन दोनो वक्रो के किसी साजात्य अवयव के फलों का सम्बन्ध जानना है।

(१) में यदि $\frac{य}{अ} = य'$ और $\frac{र}{क} = र'$ तो (१) मे

ताय = अताय' इस लिये (२) का फल $= \int र' ताय' = \int \frac{र}{क} \cdot \frac{ताय}{अ} = \frac{१}{अक} \int$ रताय

अर्थात् (२) का फल $= \frac{१}{अक} \times$ (१) का फल

इस लिये अक × (२) का फल = (१) का फल।

जैसे (१) दीर्घवृत्त में यदि केन्द्र को मूल विन्दु मानो तो

$$\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} = १ \quad . \quad . \quad . \quad (१)$$

और वृत्त मे $य^2 + र^2 = १$ (जिस का व्यासार्द्ध = १ है) (२)

इस लिये (२) का फल × अक = (१) का फल

अर्थात् (१) का समग्र फल = (२) का समग्र फल × अक = अकπ

$= \frac{अ}{क} अ^2 \pi$ यही पहले १०४ प्रक्रम मे भी उत्पन्न हुआ था

(२) अतिपरवलय मे $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} = १$ (१)

और समातिपरवलय मे $य^2 — र^2 = १$ (२)

इस लिये (२) का फल × अक = (१) का फल ।

(३) जिस वक्र का $\left[\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2}\right]^2 = \frac{य^2}{त^2} + \frac{र^2}{म^2}$ यह समीकरण है इस के फल को जानना है । इस मे यदि $य = अय'$ और $र = कर'$ तो वक्र के समीकरण का रूपान्तर $(य'^2 + र'^2)^2 = \frac{अ^2 य'^2}{त^2} + \frac{क^2 र'^2}{म^2}$ (२)

अब इस के फल को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र का फल ऊपर की युक्ति से हो जायगा ।

(२) के फल जानने के लिये इस का ध्रुवीय समीकरण बनाओ तो

$ध्रु^4 = \frac{अ^2 य'^2}{त^2} + \frac{क^2 र'^2}{म^2}$, $ध्रु^2$ का भाग दे देने से

$ध्रु^2 = \frac{अ^2 कोज्या^2 प}{त^2} + \frac{क^2 ज्या^2 प}{म^2}$

इस लिये फल $= \frac{१}{२} \int ध्रु^2 ताप = \frac{१}{२}\int \frac{अ^2 कोज्या^2 प}{त^2} ताप + \frac{१}{२}\int \frac{क^2 ज्या^2 प}{म^2} ताप$

$= \frac{अ^2}{२त^2}\int \frac{१ + कोज्या २प}{२} ताप + \frac{क^2}{२म^2}\int \frac{१ — कोज्या २प}{२} ताप$

$= \frac{अ^2}{२त^2}\int \left(\frac{प}{२} + \frac{ज्या २प}{४}\right) + \frac{क^2}{२म^2}\left(\frac{प}{२} - \frac{ज्या २प}{४}\right)$

प का मान ० और $\frac{\pi}{२}$ मानने से

चतुर्थांश फल $= \frac{अ^2}{२त^2}\frac{\pi}{४} + \frac{क^2}{२म^2}\frac{\pi}{४}$, इस को ४ गुना कर देने से समग्र फल $= \frac{\pi}{२}\left[\frac{अ^2}{त^2} + \frac{क^2}{म^2}\right]$ और इस को अक से गुण देने से अभीष्ट वक्र

का समग्र फल $= \frac{\text{अकग}}{२}\left[\frac{\text{अ}^२}{\text{त}^२} + \frac{\text{क}^२}{\text{म}^२}\right]$

ऊपर के सिद्धान्त अर्थात् फ$\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}, \frac{\text{र}}{\text{क}}\right) =$ ग। फ(य,र) = ग, इस में यदि अ = क तो (१) का फल $=$ अ$^२ \times$ (२) का फल ऐसा होगा अर्थात् दोनो वक्र सजातीय होंगे और (२) के फल को अ^२ से गुण देने से (१) का फल होगा। देखो ऐसे दो वक्रों मे सजातीय भुज वा कोटि में अ:१ का सम्वन्ध रहेगा और फल मे अ^२:१ इस का सम्वन्ध। इस लिये रेखा-गणित से जैसा सजातीय ऋजुवहुभुज क्षेत्रों मे धर्म्म सिद्ध होता है वैसा ही ऊपर की युक्ति से सजातीय वक्रो में भी सिद्ध हुआ।

१३१। वक्र चाप और वक्र के अवलूत चाप से वने क्षेत्र का फलानयन। ९६ प्रक्रम के (१) और (२) क्षेत्र में व,व को तनिक सा उठावें तो दूसरा वक्र-जातीयव्यासार्द्ध का मान होगा दोनों को वहुत पास होने से यदि तुल्य मानो और व के पास ही चलित विन्दु मानो और इन दोनों व्यासार्द्धों से उत्पन्न कोण का मान $\text{व}_१$ मान लो तो स्वल्पान्तर से दोनो व्यासार्द्ध, और वक्र का चाप इन से वने वृत्तखण्ड का फल $\triangle$ आ $= \frac{१}{२}$ $\text{वव}_१^२ \triangle \text{व}_१$

और $\frac{\triangle \text{आ}}{\triangle \text{व}_१} = \frac{१}{२}$ $\text{वव}_१^२$ अव इस मे $\triangle \text{व}_१ = ०$ मानो तो ठीक ठीक $\frac{\text{ताआ}}{\text{ताव}_१}$ $= \frac{१}{२}$ $\text{वव}_१^२$ यह अभीष्ट क्षेत्र के फल का तात्कालिक सम्वन्ध $\text{ताव}_१$ के वश से उत्पन्न हुआ।

यहाँ यदि आ को अवलूत का चाप, वक्र का चाप, और दो वक्रजातीय-व्यासार्द्ध इन से वने क्षेत्रका क्षेत्रफल समझो और दोनों वक्रजातीयव्यासार्द्ध सम्वन्धी $\text{व}_१$ का मान $\text{व}_२$, $\text{व}_३$ मान लो तो

$$\text{आ} = \frac{१}{२} \int_{\text{व}_२}^{\text{व}_३} \text{वव}_१^२ \text{ताव}_१$$ यह होगा

यहाँ $\text{वव}_१$ वक्रजातीयव्यासार्द्ध के स्थान मे वि $= \frac{\text{ताचा}}{\text{ताग}_१}$ (चलन-कलन के १७१वें प्रक्रम से) इस का उत्थापन देवें तो

$$\text{आ} = \frac{१}{२} \int \text{वि ताचा} = \frac{१}{२} \int \text{वि} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$$ ऐसा होगा

१३२। कातन्वली उसका अवलूत और वक्रजातीय दो व्यासार्द्ध इन से वने क्षेत्र का फलानयन।

यहाँ चा = ग· स्पव, (९४ प्रक्रम से)

इस लिये $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताव}_1}$ = वि = ग छे^{2}व$_1$

और आ = $\frac{1}{2}\int_{\text{व}_2}^{\text{व}_3}$ वि^{2}ता व$_1$ = $\frac{1}{2}\int_{\text{व}_2}^{\text{व}_3}$ ग^{2}छे^{4} व$_1$ ताव$_1$

$= \frac{\text{ग}^2}{2}\int_{\text{व}_2}^{\text{व}_3}$ छे^{4} व$_1$ ताव$_1$

यहाँ $\int$ छे^{4} व$_1$ ताव$_1$ = स्पव$_1$ + $\frac{1}{3}$ स्प^{3}व$_1$ + स्थि

इस पर से व$_3$, व$_2$ का इष्टमान मानने से अभीष्ट क्षेत्र का फल जान सकते हो।

१३३। वक्र के प्रतिविन्दु सम्वन्धि स्पर्शरेखाओ के ऊपर कोई स्थिर विन्दु से (जो कि उसी धरातल मे है जिस मे कि वक्र है) लम्ब डाले और इन लम्बमूलों मे लगाकर एक वक्र रेखा कर दे तो इस वक्र को पहले वक्र का पाददल कहते है।

जिस स्थिरविन्दु से लम्ब डाले गये है इसको पाददल का मूलविन्दु कहते है और जिस वक्र का पाददल वक्र वनावोगे उसे पाददल का मूलवक्र कहते हैं।

१३४। पिछले प्रक्रमो से स्पष्ट है कि मूलविन्दु से पाददल के मूलवक्र के कोई दो स्पर्शरेखाओ पर दो लम्ब डाले जायँ तो पाददल का चाप और इन दोनो लम्वो से वने क्षेत्र का फल = $\frac{1}{2}\int$ ल^{2}ताप (जहाँ कोई नियत रेखा और लम्ब से उत्पन्न कोण = प है) क्योकि पाददल मे मूल वक्र के स्पर्शरेखा पर जो मूलविन्दु से लम्ब डाला जायगा वह लम्बही श्रुति होगी।

कल्पना करो कि अ, अ' दो मूलविन्दुओ से दो पाददल एकही मूलवक्र से वने हैं। और मूलवक्र के किसी दो स्पर्शरेखा पर दोनो मूलविन्दुओं से ल, ल' लम्ब डाले गये है। नियतरेखा समानान्तर है । अ मूलविन्दु से अ' की श्रुति, श्रु और श्रु और नियतरेखा से उत्पन्न कोण प$_1$ है तो प के दो मानो के भीतर पहले पाददल का फल = आ = $\frac{1}{2}\int$ ल^{2}ताप, और प के उन्हीं दो मानो के भीतर दूसरे पाददल का फल = आ' = $\frac{1}{2}\int$ ल'^{2}ताप

परन्तु ल' = ल—श्रु कोज्या (प—प$_1$)

इस लिये $ल'^2 = ल^2 + 2लश्रु\ कोज्या\ (प-प_1) + श्रु^2 कोज्या^2 (प-प_1)$

इस लिये $आ' = \frac{1}{2}\int ल'^2 ताप - \int श्रुलकोज्या\ (प-प_1) ताप$

$+ \frac{1}{2}\int श्रु^2\ कोज्या^2\ (प-प_1) ताप$

$= आ - \int लश्रुकोज्या\ (प-प_1) ताप + \frac{1}{2}\int श्रु^2\ कोज्या^2 (प-प_1)\ ताप$

$= आ - \int लश्रु\ (कोज्याप\ कोज्याप_1 + ज्याप\ ज्याप_1)\ ताप$

$+ \frac{1}{2}\int श्रु^2\ (कोज्याप\ कोज्याप_1 + ज्याप\ ज्याप_1)^2 ताप$

$= आ - \int ल(यकोज्याप_1 + रज्याप)\ ताप$

$+ \frac{1}{2}\int (य^2 कोज्या^2 प + यरज्या 2प + र^2 ज्या^2 प)\ ताप$

यदि $य = श्रुकोज्याप_1$ । $र = श्रुज्याप_1$ . . . . (१)

(१) में $\int लकोज्यापताप = च, \int लज्यापताप = ज$

$\frac{1}{2}$ $कोज्या^2 प\ ताप = त$, $\frac{1}{2}\int ज्या^2 पताप = न$, $\frac{1}{2}\int ज्यापकोज्यापताप = म$

इन का उत्थापन दे देखो जहाँ सर्वत्र प की दोनो सीमाये एकही है

तो $आ' = आ - (चय + जर) + तय^2 + 2मयर + नर^2$ . . . . (२)

१३५। कल्पना करो कि किसी वक्र का $अय^2 + कयर + गर^2 + घय + चर + फ = 0$ यह समीकरण है। इच्छा है कि यह पता लगावे कि यह कौन सा वक्र है।

यदि यह वक्र मूलविन्दु में भी गया होगा तो स्पष्ट है कि $फ = 0$ । कल्पना करो कि मूलविन्दु मे नही गया है तब फ का दोनों पक्षो मे भाग देने से लब्धिओ को क्रम से अ', क' इत्यादि मान लेने से ऊपर के समीकरण का रूप

$$अ'य^2 + क'यर + ग'र^2 + घ'य\ च'र + 1 = 0$$

जिस विन्दु का वक्र के मूलविन्दु से त, द भुज कोटि है उसको मूलविन्दु मानने से वक्र का भु = $य = य' + त$, $र = र' + द$ इनका उत्थापन

$$अय^2 + कयर + गर^2 + घय + चर + फ = 0 \quad \ldots\ldots \quad (१)$$

इस में देने से

$अ(य'^2 + 2तय' + त^2) + क\ (य'र' + य'द + र'त + तद) + ग\ (र'^2 + 2र'द + द^2)$

$+ घय + घत + चर' + चद + फ$

$= अय'^2 + 2तअय' + अत^2 + कय'र' + कदय' + कत' + कतद + गर'^2 + 2गदर'$

$+ गद^2 + घय' + घत + चर' + चद + फ$

$= अय'^2 + कय'र' + गर'^2 + (2तअ + कद + घ)य' + (2गद + कत + च)र' + फ' = 0 \cdots (२)$

ज़हाँ $फ' = अत^2 + कतद + घत + चद + फ$, ... (३)

कल्पना करो कि इस मे सम्भव है कि त, और द के ऐसे मान हैं कि $य'$ $र'$ के गुणक शून्य के तुल्य होते हैं तो

$२तअ + कद + घ = ०$ और $२गद + कत + व = ०$

इन परसे $त = \frac{२गघ - कच}{क^२ - ४अग}$, और $द = \frac{२अग - कघ}{क^२ - ४अग}$

इस लिये निश्चय हुआ कि यदि $क^२ - ४अग$ यह शून्य के तुल्य न हो तो त, द का मान ऐसा मान सकते हैं जिस पर से $य'$, $र'$ के गुणक शून्य हो। पहले मानो कि $क^२ - ४अग$ यह शून्य नहीं है तो त, द के मान भी सान्त होंगे। और तव (२) का रूप $अय'^२ + कय'र' + गर'^२ + फ' = ०$ . . (४)

अब यह (४) समीकरण दिखलाता है कि धन, $य_१$, $र_१$ के वा, ऋण $य_१$, $र_१$ के मान मे फल एक ही होगा इस लिये (१) समीकरण के वक्र का दूसरा मूलविन्दु (जिस का भु = त, को = द प्रथम मूलविन्दु के अभिप्राय से है) केन्द्र होगा।

त, द के मान का उत्थापन (३) मे देने से

$फ' = फ + \frac{गघ^२ + अग^२ + कगघ}{क^२ - ४अग}$ ऐसा होगा।

(४) मे स्वर चिह्न उड़ा देने से

$अय^२ + कयर + गर^२ + फ = ०$, . . (५)

इस मे कल्पना करो कि मूल विन्दु तो वही है परन्तु य अक्ष नया पहले य अक्ष से प तुल्य कोण बनाने वाली रेखा को माना और इस पर मूल विन्दु पर जो रेखा लम्ब होगी वह नया र अक्ष माना तो इन अक्ष सम्बन्धी भुज = $य'$, को = $र'$ तो पहले अक्ष सम्बन्धी

$य = य'कोज्याप - र'ज्याप$, $र = य'ज्याप + र'कोज्याप$, इन का उत्थापन (५) वे मे देने से

$य'^२ (अकोज्या^२प + गज्या^२प + कज्यापकोज्याप)$

$+ र'^२ (अज्या^२प + गकोज्या^२प - कज्यापकोज्याप)$

$+ य'र' \{ २(ग - अ)ज्यापकोज्याप + क(कोज्या^२प - ज्या^२प \} + फ' = ०$, (६)

मान लो कि $य'र'$ का गुणक शून्य है तो

$२(ग - अ)ज्यापकोज्याप + क(कोज्या^२प - ज्या^२प) = ०$

$= (ग - अ)ज्या२प + ककोज्या२प$

इस लिये $स्प२प = \frac{क}{अ-ग}$ . . . . ॥

(७)वाँ दिखलाता है कि सर्वदा प का मान ऐसा मान सकते हैं जिस में $य'र'$ का गुणक शून्य हो। $य'र'$ के गुणक को शून्य करने से (६) वें का रूप

$$य'^2 (अकोज्या^2 प + गज्या^2 प + कज्याप कोज्याप)$$
$$+ र'^2 (अज्या^2 प + गकोज्या^2 प — कज्याप कोज्याप) + फ'$$
$$= आय'^2 + कार'^2 + फ' = ०, \quad \ldots \quad (८)$$

जहाँ $आ = \frac{1}{2} \{ अ + ग + (अ — ग) कोज्या२प + कज्या२प \}$

$का = \frac{1}{2} \{ अ + ग — (अ — ग) कोज्या२प — कज्या२प \}$

परन्तु $स्प२प = \frac{क}{अ-ग}$ $\therefore$ $कोज्या२प = \frac{अ — ग}{\sqrt{\{ क^2 + (अ-ग)^2 \}}}$

और $ज्या२प = \frac{क}{\sqrt{\{ क^2 + (अ — ग)^2 \}}}$ इन का उत्थापन देने से

$आ = \frac{1}{2}[अ + ग + \sqrt{\{ क^2 + (अ - ग)^2 \}}]$

$का = \frac{1}{2}[अ + ग — \sqrt{\{ क^2 + (अ - ग)^2 \}}]$

$य'र'$ के स्वर चिह्न को उड़ा देने से और $फ'$ का भाग देकर पक्षान्तरानयन से (८) वें का रूप $— \frac{आ}{फ'} य^2 — \frac{का}{फ'} र^2 = १$ यह समीकरण दिखलाता है कि यदि

(१) आ, का, $फ'$ एक ही चिह्न के होंगे तो वक्र असम्भव होगा।

(२) यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और उस से विरुद्ध चिह्न $फ'$ का हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा जिस के व्यासार्द्ध क्रम से $\sqrt{(— \frac{फ'}{आ})}, \sqrt{(— \frac{फ'}{का})}$ हैं।

(३) यदि आ, का विजातीय चिह्न के हों तो वक्र अतिपरवलय होगा।

(४) यदि आ = का और एक चिह्न के हों और उन से विजातीय $फ'$ हो तो वक्र वृत्त होगा।

(५) यदि $फ' = ०$ तो (८) वे समीकरण पर से $आय^2 + कार^2 = ०$ इस लिये वक्र मूलविन्दुरूप होगा यदि आ, का एक ही चिह्न के हों और यदि भिन्न चिह्न के हो तो वक्र दो सरलरेखा रूप होगा जिन का समीकरण $र = \pm \sqrt{(— \frac{आ}{का})}\, य$ यह होगा।

ऊपर जो आ, का का मान ले आये हैं उन का यदि घात करो तो

$$आ \times का = \frac{(अ + ग)^2 — क^2 - (अ - ग)^2}{४} = \frac{४अग - क^2}{४}$$

इस लिये यदि आ, का भिन्न भिन्न चिह्न के होंगे तो $४अग - क^2$ यह ऋणात्मक होगा अन्यथा धन होगा।

इस लिये यदि वक्र असम्भव और विन्दुरूप न हो और वृत्त को भी एक प्रकार का दीर्घवृत्त ही समझे जिस का कि दोनों व्यासार्द्ध तुल्य हैं तो कह सकते हैं कि यदि $४अग - क^2$ यह धनात्मक हो तो वक्र दीर्घवृत्त होगा यह सिद्धान्त हुआ। इस मे $४अग - क^2$ यह जब शून्य के तुल्य होगा तब त, और द के मान अनन्त होगे इस स्थिति मे वक्र का केन्द्र अनन्त दूर पर होगा अर्थात् वक्र परवलय ठहरेगा। इस में और भी अनेक विचार और सिद्धान्त हैं जिन का वर्णन करना चलराशिकलन में व्यर्थ है।

१३६। १३४ प्रक्रम (२) समीकरण मे यदि पक्षान्तरानयन करो तो $तय^2 + २मयर + नर^2 - चय - जर - (\acute{आ} - आ) = ०$ ऐसा होगा।

इस की यदि १३५ प्रक्रम के (१) समीकरण के साथ तुलना करो तो

$अ = त, \quad २म = क, \quad ग = न, \quad घ = -च, \quad च = -ज, \quad फ = -\acute{आ} - आ$ ऐसा होगा। इस लिये

$$४अग - क^2 = ४तन - ४म^2 = ४ (तन - म^2)$$

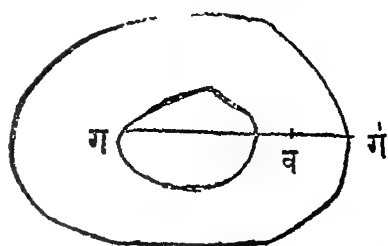
$$= (\int कोज्या^2 पताप) (\int ज्या^2 पताप) - (\int ज्यापकोज्यापताप)^2$$

परन्तु यहाँ दहना पक्ष चतुर्थाध्याय के १९ वे प्रश्न से धनात्मक होगा इस लिये उन पाददलों के मूलविन्दु सब एक दीर्घवृत्त के परिधि मे होगे जो मूलवक्र के नियत दो स्पर्शरेखान्तर्गत लम्ब और अपने चाप से तुल्य फल बनाते हैं। यदि इस दीर्घ वृत्त के भुज कोटि को इस के केन्द्र से गणना करे तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से य, और र के गुणक शून्य होगे अर्थात् च = ०, और ज = ०। इस लिये अनुमान कर सकते हो कि कोई पाददल का मूलविन्दु ऐसा भी होगा जिसमे च = ०, ज = ०। कल्पना करो कि अ के बदले इस को प्रथम मूलविन्दु माना तो १३४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\acute{आ} = आ + \frac{1}{2} \int श्र^2 कोज्या^2 (प - प_1) ताप \text{ ऐसा होगा}$$

यहाँ दहने पक्ष का दूसरा खण्ड सर्वदा धनात्मक है इस लिये $\acute{आ}$ का मान आ से सर्वदा अधिक होगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि जिस पाददल के मूलविन्दु से च = ०, ज = ० हो उस का फल सब से छोटा होगा।

१३७। निर्दिष्ट लम्बाई की गग' रेखा है इस का एक अग्र ग छोटे वक्र की परिधि पर और दूसरा अग्र बड़े वक्र की परिधि पर घूमता है इस लिये इस तरह से गग' रेखा के घूमने से गग' रेखास्थ व विन्दु भी किसी वक्र में घूमेगा। इच्छा है कि इस व विन्दु के वक्र का फल ग और ग' विन्दु के वक्रों के फलो से जाने।



कल्पना करो कि गव = ग, वग' = ग' और कोई परस्पर लम्बरूप अक्षों के वश से $\text{य}_1, \text{र}_1$, य, र और $\text{य}_2, \text{र}_2$ क्रम से ग, व, और ग' के भुज कोटि हैं। गग' रेखा और र अक्ष से उत्पन्न कोण प समझो तो चलनकलन के ११ वे अध्याय से।

$$\text{य}_1 = \text{य} - \text{गज्याप},\quad \text{र}_1 = \text{र} - \text{गकोज्याप}।$$

$$\text{य}_2 = \text{य} + \text{ग}'\text{ज्याप},\quad \text{र}_2 = \text{र} + \text{गकोज्याप}।$$

इस लिये $\text{ताय}_1 = \text{ताय} - \text{गकोज्यापताप}$

और $\text{र}_1\ \text{ताय}_1 = (\text{र} - \text{गकोज्याप})\ (\text{ताय} - \text{गकोज्यापताप})$

$$= \text{रताय} - \text{गकोज्याप}\ \ (\text{रताप} + \text{ताय}) + \text{ग}^2\ \text{कोज्या}^2\text{पताप}$$

इसी तरह $\text{र}_2\text{ताय}_2 = \text{रताय} + \text{ग}'\text{कोज्याप}\ \ (\text{रताप} + \text{ताय}) + \text{ग}'^2\text{कोज्या}^2\text{पताप}$

पहले को ग' और दूसरे को ग से गुण कर जोड़ देने से

$$\text{ग}'\text{र}_1\text{ताय}_1 + \text{गर}_2\ \ \text{ताय}_2 = (\text{ग} + \text{ग}')\ \ \text{रताय} + (\text{ग} + \text{ग}')\ \ \text{गग}'\ \ \text{कोज्या}^2\text{पताप}$$

$$\text{ग}' \int \text{र}_1\ \ \text{ताय}_1 + \text{ग} \int \text{र}_2\ \ \text{ताय}_2 = (\text{ग} + \text{ग}') \int \text{रताय}$$
$$+ (\text{ग} + \text{ग}')\ \text{गग}' \int \text{कोज्या}^2\text{पताप}$$

$$= (\text{ग} + \text{ग}') \int \text{रताय} + (\text{ग} + \text{ग}')\ \text{गग}' \int \frac{\text{१} + \text{कोज्या२प}}{\text{२}}\ \text{ताप}$$

$$= (\text{ग} + \text{ग}')\ \int \text{रताय} + (\text{ग} + \text{ग}')\ \text{गग}'\ \left(\frac{\text{प}}{\text{२}} + \frac{\text{ज्या२प}}{\text{४}}\right)$$

यदि गग' रेखा एक वार पूरा भ्रमण कर फिर अपने स्थान पर पहुंचे तो स्पष्ट है कि प, ० और २ π के बीच होगा, इस लिये सान्तचलानयन से

$$\text{ग}'\ (\text{गा}) + \text{ग}\ (\text{ग}'\text{ा}) = (\text{ग} + \text{ग}')\ (\text{वा}) + (\text{ग} + \text{ग}')\ \text{गग}'\ \pi$$

$$= \frac{\text{ग}'\ (\text{गा})\ +\ \text{ग}\ (\text{ग}'\text{ा})}{\text{ग} \times \text{ग}'} = (\text{वा}) + \pi\text{गग}',$$ यहाँ (गा), (वा), (ग'ा), क्रम से ग, व, ग' विन्दुसम्बन्धि वक्रों के सम्पूर्ण फल हैं।

यदि ग, ग' रेखा के अग्र एकही वक्र की परिधि पर घूमे तो (गा) = (ग'ा)

(गा) = (वा) + πगर्ग और (गा) — (वा) = πगर्ग इसलिये वक्र की परिधि और व विन्दूत्पन्न वक्र की परिधि के बीच जो क्षेत्र होगा उस का फल πगर्ग यह होगा।

ग, गं विन्दु, घूमने के वदले झूल कर उलटा झलुअे के ऐसा यदि फिर पीछे से अपने स्थान पर पहुँचे तो स्पष्ट है कि (गा) = ०, (गा) = ० इसलिये (वा) = $-\pi$गर्ग। ऋण चिह्न दिखलाता है कि जिधर गर्ग रेखा घूमती है उस से विरुद्ध दिशा से फल उत्पन्न हुआ है। यदि घूमने के वदले गर्ग रेखा ही आगे पीछे चले तो (वा) = ० इस से सिद्ध होता है कि व विन्दु से दो तुल्य फन्दे के ऐसे वक्र होगे जिन मे एक धनात्मक दूसरा इस से उलटा ऋणात्मक होगा।

१३८। जिन वक्रो मे भुज का कौन फल कोटि है इस का ज्ञान न हो वा $\int$ र ताय इस के मान का ठीक ठीक पता न लगे वहाँ स्वल्पान्तर से भुज का अनेक समान खण्ड कर प्रति भागो पर लम्ब खड़ा करने से अनेक पास पास मे दो दो कोटि और तदन्तर्गत भुजखण्ड और वक्र की पूर्णज्या से समलम्ब चतुर्भुज वनाकर पृथक् पृथक् फल साधन कर सव का योग करो तो वक्रक्षेत्र का आसन्न फल होगा। (५)वे प्रक्रम से स्पष्ट है कि भुज का जितनाही अधिक विभाग करोगे उतनाही सूक्ष्म फल होगा।

(१) कल्पना करो कि भुज का न खण्ड जो समान कर डाला उसका मान = च और कोटियो का मान $र_०, र_१, र_२, र_३, \cdot \cdot \quad र_न$,

तो स्पष्ट है कि जितने समलम्बचतुर्भुज होगे सभो मे आद्यन्त कोटियो को छोड़ और सव कोटियाँ एक वार आधार दूसरे वार मुख होगी और लम्ब सर्वत्र च यही रहेगा।

इस लिये $र_०$, $र_न$ दो कोटि, तदन्तर्गत भुजान्तर, और वक्र का चाप इन से वने

क्षेत्र का आसन्न फल = $च\left\{\frac{र_० + र_न}{२} + र_१ + र_२ + र + \cdots र_{न-१}\right\}$ यह होगा।

इस पर से यह फल जानने के लिये क्रिया उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि के योगार्द्ध में और वीचवाली सव कोटियो को जोड़ दो योग को भुजखण्ड च से गुणदेने से वक्र का स्वल्पान्तर से फल होगा।

(२) कल्पना करो कि एक ऐसा परवलय है जिसका मूलविन्दु $र_१$ कोटि का मूल, और समीकरण र = अ + कय + गय ^{२} यह है और यह, वक्र

के $र_0$, $र_1$, $र_2$, कोट्यग्र पर होके जाता है तो $र_0 = अ - कच + गच^2$, $र_1 = अ$, $र_2 = अ + कच + गच^2$

और पहली और तीसरी कोटि के बीच फल $= \int_{-च}^{च} (अ + कय + गय^2) ताय$

$$= २ च\left(अ + ग \frac{च^2}{३} \right)$$

परन्तु $र_0 + र_2 = २र_1 + २गच^2$ इस लिये

$$फल = \frac{च}{३} \{ र_0 + ४र_1 + र_2 \}$$

अब समझो कि न का मान सम है अर्थात् $र_0$, $र_न$ कोटि के बीच भुजान्तर का सम विभाग किया है तो ऊपर की युक्ति से तीन तीन कोट्यग्र पर गये हुए परवलयों के फल

$\frac{च}{३} \{ र_2 + ४र_3 + र_4 \}$, $\frac{च}{३} \{ र_4 + ४र_5 + र_6 \}$, $\frac{च}{३} \{ र_6 + ४र_7 + र_8 \}$ ···इत्यादि होंगे

इस लिये इन सब फलो का योग

$$\frac{च}{३} \{ र_0 + र_न + ४(र_1 + र_3 + र_5 + \cdot\cdot) + २(र_2 + र_4 + र_6 + \cdot\cdot) \}$$

यह स्वल्पान्तर से वक्र का फल हुआ।

इस पर से यह क्रिया उत्पन्न होती है कि $र_0$, $र_न$ के बीच य अक्ष का समान भाग कर कोटियों का मान जानलो फिर आद्यन्त कोटियों के योग मे चौगुना अवशिष्ट विषम कोटियों का योग और दूना बाकी कोटियों का योग मिला कर तीन से भाग देदो लब्धि को च से अर्थात् दो कोटियो के बीच के अन्तर से गुण दो तो गुणनफल स्वल्पान्तर से वक्र का फल होगा।

इस रीति को सिम्पशन ने सन् १७४३ में निकाला है इसी लिये इसे सिम्पशन की रीति (Simpson's Rule) कहते हैं (See Simpson's mathematical Dissertations 1743, page 109)

इस के लिये एक उदाहरण दिखाते हैं। कल्पना करो कि जिस वक्र का $र = \frac{१}{१ + य^2}$ यह समीकरण है उस का फल सिम्पशन की रीति से जानना है $र_0 = १$, $र_न = \frac{१}{२}$ इस के बीच में।

यहाँ $र_0 = १$ तब $य = ०$, और $र_न = \frac{१}{२}$, तब $य = १$, मानो कि $न = १०$ इस लिये $च = \frac{१}{१०} = \cdot १$, और

$र_1 = \frac{१}{१\cdot०१} = ९९००९९०१, \quad र_2 = \frac{१}{१\cdot०४} = \cdot ९६१५३८४५$

$र_3 = \frac{१}{१\cdot०९} = \cdot ९१७४३११९, र_4 = \frac{१}{१\cdot१६} = ८६२०६८९६, र_5 = \frac{१}{१\cdot२५} = ८००००००$

$र_6 = \frac{१}{१\cdot३६} = ७३५२९४१२ \; र_7 = \frac{१}{१\cdot४९} = \cdot ६७११४०९४, \; र_8 = \frac{१}{१\cdot६४} = ६०९७५६१०$

$र_9 = \frac{१}{१\cdot८१} = \cdot ५५२४८६१९, \; र_{10} = \frac{१}{१+१} = ५००००००$

	१ ००००००००
	५००००००००
इस लिये $र_0 + र_{न} =$	१ ५०००००००
$र_1 =$	९९००९९०१
$र =$	९१७४३११९
$र_5 =$	८०००००००
$र =$	·६७११४०९४
$र_9 =$	५५२४८६१९
सब का योग $=$	३ ९३११५७३३
	४
$४(र_1 + र_3 + र_5 + \quad) =$	१५ ७२४६२९३२
$र_2 =$	·९६१५३८४५
$र_4 =$	८६२०६८९६
$र_6 =$	७३५२९४१२
$र_8 =$	६०९७५६१०
	३ १६८६४९१८
	२

$६ ३३७२९८३६ = २(र_2 + र_4 + र_6 + र_8)$

$१५ ७२४६२९३२ = ४(र_1 + र \; + र_5 + र_7 + र_9)$

$१ ५००००००० = र_0 + र_{10}$

$यो \; = २३ ५६१९२७६८$

$= र_0 + र_{10} + ४(र_1 + र_3 + र_5 + र_7 + र_9) + २(र_2 + र \; + र_6 + र_8)$

फल $= \frac{\text{च} \times \text{यो}}{३} =$ ·७८५३९७५८९ इस में यदि ६ स्थान तक ग्रहण करें तो ·७८५३९८ यह मान होगा

परन्तु $\frac{१}{१+\text{य}^२} = \text{र}$ इस वक्र का य के ० और १ के बीच मान में चलानयन की रीति से ठीक फल $\int_{०}^{१} \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^२} = \frac{\pi}{४} = \frac{३.१४१५९२६५....}{४} =$ ·७८५३९८ . . . .

यह हुआ इस लिये यदि यहाँ भी दशमलव का मान ६ स्थान तक लें तो सिम्पशन की रीति से बहुत ही ठीक ठीक फल आया यह प्रत्यक्ष देखने मे आता है ।

(३) प्रत्येक दो कोटियों के बीच मे जो भुजान्तर च माना है उसे २ ज के तुल्य मानें और कल्पना करे कि एक प्रकार के परवलय का $\text{र} = \text{अ} + \text{कय} + \text{गय}^२ + \text{घय}^३$ यह समीकरण है जो कि $\text{र}_०$, $\text{र}_१$, $\text{र}_२$, $\text{र}_३$ इन चार कोट्यग्र पर होकर जाता है और जिसका मूलविन्दु य अक्ष मे $\text{र}_१$, $\text{र}_२$ कोटियो के बीच मे है तो

$$\text{र}_० = \text{अ} - ३\,\text{कज} + ९\,\text{गज}^२ - २७\,\text{घज}^३$$
$$\text{र}_१ = \text{अ} - \text{कज} + \text{गज}^२ - \text{घज}^३$$
$$\text{र}_२ = \text{अ} + \text{कज} + \text{गज}^२ + \text{घज}^३$$
$$\text{र}_३ = \text{अ} + ३\,\text{कज} + ९\,\text{गज}^२ + २७\,\text{घज}^३$$

इस लिये $\text{र}_० + \text{र}_३ = २(\text{अ} + ९\,\text{गज}^२)$, $\text{र}_१ + \text{र}_२ = २\,(\text{अ} + \text{गज}^२)$

$$\therefore \text{अ} + ९\,\text{गज}^२ = \frac{\text{र}_० + \text{र}_३}{२} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (१)$$

$$\text{अ} + \text{गज}^२ = \frac{\text{र}_१ + \text{र}_२}{२} \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (२)$$

$\text{अ} + ५\text{गज}^२ = \frac{\text{र}_० + \text{र}_३ + \text{र}_१ + \text{र}_२}{४}$ । (१) और (२) को जोड़कर २का भाग देने से

$$\text{इस लिये } २\text{अ} + ६\text{गज}^२ = \frac{\text{र}_० + \text{र}_३ + ३\text{र}_१ + ३\text{र}_२}{४} \quad . \quad . \quad . \qquad (३)$$

परंतु परवलयका $\text{र}_०\text{र}_३$ कोटिसीमा से फल $= \int_{-३\text{ज}}^{३\text{ज}} (\text{अ} + \text{कय} + \text{गय}^२ + \text{घय}^३)\text{ताय}$

$= ३\text{ज}(२\text{अ} + ६\text{गज}^२) = \frac{३\text{ज}}{४} \{ \text{र}_० + \text{र}_३ + ३(\text{र}_१ + \text{र}_२) \}$,ज के स्थान में $\frac{\text{च}}{२}$ का उत्थापन देने से फल $= \frac{३\text{च}}{८} \{ \text{र}_० + \text{र}_३ + ३(\text{र}_१ + \text{र}_२) \}$

इसी तरह $\text{र}_३, \text{र}_४, \text{र}_५, \text{र}_६$ के अग्र पर गये परवलय का $\text{र}_३$, $\text{र}_६$ कोटि के बीच

मे फल $\frac{३च}{८}\{र_{३}+र_{६}+३(र_{४}+र_{५})\}$ इसी तरह चार चार कोट्यग्र पर गये हुए परवलयो के फल, $\frac{३च}{८}\{र_{६}+र_{९}+३(र_{७}+र_{८})\}$. $\frac{३च}{८}\{र_{९}+र_{१२}+३(र_{१०}+र_{११})\}$ इत्यादि होगे। यदि अभीष्ट वक्र के फल को इन परवलयो के फल योग तुल्य स्वल्पान्तर से मान लो तो वक्र का फल $=\frac{३च}{८}\{र_{०}+र_{न}+२(र_{३}+र_{६}+र_{९}+र_{१२}+\cdots)+३(र_{१}+र_{२}+र_{४}+र_{५}+\cdots)\}$ यह हुआ। इस पर से यह रीति उत्पन्न होती है कि आद्यन्त कोटि योग मे $र_{०}$ के आगे तीसरी तीसरी कोटियो का दूना योग और बाकी कोटियों का तिगुना योग मिला दो। योग को च के $\frac{३}{८}$ से गुण देने से वक्र का फल हो जायगा।

इस को भी सिम्पशन की रीति कहते हैं परन्तु वास्तव मे यह न्यूटन का निकाला हुआ है (See Opusula, method Diff, Prop 6 Scolium) ऊपर की रीतियो मे कोटि की संख्या ज्यो ज्यो वढ़ाते जायगे त्यो त्यो फल सूक्ष्म आवेगा।

१३९। किसी वक्र मे सिद्ध है कि य = श्रु कोज्याप, र = श्रु ज्याप इस लिये

$$स्पप=\frac{र}{य} \text{ और } तास्पप=\frac{ताप}{कोज्या^{२}प}=\frac{यतार-रताय}{य^{२}}।$$

इस लिये $श्रु^{२}ताप=यतार-ताय$

और $\frac{१}{२}\int श्रु^{२}ताप=\frac{१}{२}\int(यतार-रताय)$

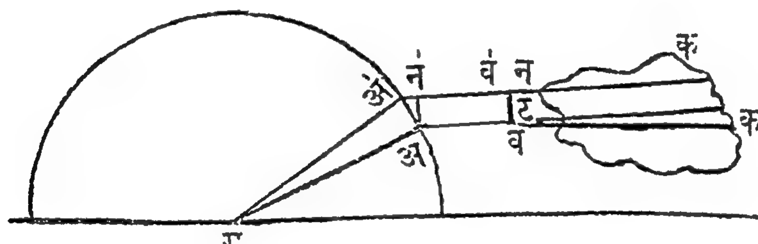
इस पर से सिद्ध होता है कि $\frac{१}{२}\int श्रु^{२}ताप$ इस के स्थान मे

$\frac{१}{२}\int(यतार-रताय)$ इस को लेकर भी उचित सीमाओ के भीतर फल साधन कर सकते हैं।

१४०। वक्र रेखा से घिरे हुए किसी क्षेत्र के फल जानने के लिये बुद्धिमानो ने यान्त्रिक विद्या के वल से यन्त्र वनाये हुए है इस यन्त्र को धरातलमापक (Planimeters) कहते हैं यह कई प्रकार के है उन मे प्रोफेसर आमस्टलर (Porfessor Amstler of Schafthausen) का सव से सहज और उत्तम है। इस मे दो भुज ऐसे जुटे हुए हैं कि स्वतन्त्र एक धरातल मे घुस सकते हैं। एक भुज के अग्र पर एक विन्दु स्थिर वनी हुई है जिस के चारो ओर यन्त्र फिरा

करता है इस लिये इस विन्दु को यन्त्र का केन्द्र कहते हैं। इस यन्त्र में एक पहिये के ऐसा चक्र भी लगा हुआ है जो दूसरे भुज में सटा हुआ इस भुज पर लम्बरूप फिरा करता है और उन वक्रो के क्षेत्रफल के मान भी इस में अङ्कित हैं जो कि दूसरे भुज किसी विन्दु के चलने से उत्पन्न होते हैं। इस चक्र की रचना से स्पष्ट है कि यह दूसरे भुज पर जो लम्ब है उस के गमनमान को केवल वताता है जिस के ज्ञान से वक्र का फल भी जान सकते हैं।

जिस वक्र का फल जानना हो उस की परिधि के एक विन्दु पर दूसरे भुज का क अग्र रक्खो फिर इस मे लगे हुए चक्र को जो कि पहले दोनों भुजों के सम्पात विन्दु अ पर था क की ओर घसकाते और आगे वढ़ाते जाओ जिस में इस के साथ साथ गअ और अक भुज ऐसा घूमे कि क विन्दु अभीष्टवक्र की परिधि पर ही सर्वदा रहे इस प्रकार से जव वक्र के सव परिधि पर क विन्दु घूम कर फिर अपने पहले स्थान पर आवे उस समय चक्राङ्कित संख्या जो सामने मे हो वही वक्र का फल समझना।



इस में पहले यह दिखलाते हैं कि सर्वदा अ विन्दु पर चक्र के स्थिर रहने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही चाहे अक मे चक्र जहाँ रहे सर्वत्र होगा।

कल्पना करो कि चक्र का केन्द्र व विन्दु पर पहुँचा और जव अक की क विन्दु चल कर वहुत ही पास के क′ विन्दु पर पहुँची उस समय यन्त्र के भुज गअ′, अ′क′ रूप हुए और तव चक्र का केन्द्र व′ विन्दु पर पहुँचा। अ′क, अ′क′ को वहुत ही पास पास समझो, अ और व विन्दु से अ′क′ रेखा पर अन′, वन लम्ब और अ विन्दु से अ′क′ के समानान्तर अट रेखा खींचो तो अक, अ′क′ के अत्यन्त पास होने के कारण अन′ = ताचा = अ स्थान से लम्ब की गति, ∠वअट = ताप, और वन = ताचा′ = व स्थान से लम्ब की गति, अव = ग, इस लिये

वन = ताचा′ = वट + टन = ताचा + गताप

अव, जव क वक्र की परिधि में घूमते घूमते फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचे गा उस समय ताय, के जितने मान होंगे सव का योग धन ऋण के तुल्य होने से शून्य हो जायगा क्योंकि अक रेखा का एक ओर जितने झुकाव से चलना होगा फिर उतने ही झुकाव से विरुद्ध दिशा में चलना होगा। इस लिये वक्र के चारो ओर घूमने में यौ ता'चा = यौ ताचा अर्थात् अ विन्दु पर चक्र के केन्द्र को स्थिर रखने से जो लम्ब के गमन का प्रमाण होगा वही अक रेखा मे कही केन्द्र रहने से होगा।

अव कल्पना करो कि यन्त्र के केन्द्र अर्थात् प्रथम भुज के ग विन्दुगत लम्वरूप अक्ष युग्म के अभिप्राय से क के भुज = य, कोटि = र है, और अग = अ, अक = क, ∠अगय = प, और कल्पना करो कि अक रेखा बढ़ाने से य अक्ष से प_1 कोण वनाती है तो सरलत्रिकोणमिति से

$$\text{य} = \text{अकोज्याप} + \text{ककोज्याप}_1,\ \text{र} = \text{अज्याप} + \text{कज्याप}_1$$

इस लिये $\text{ताय} = -\text{अज्यापताप} - \text{कज्याप}_1\text{ताप}_1,$

$$\text{तार} = \text{अकोज्यापताप} + \text{ककोज्याप}_1\text{ताप}_1$$

और $\text{यतार} = \text{अ}^2\text{कोज्या}^2\text{पताप} + \text{अककोज्यापकोज्याप}_1\text{ताप}_1$

$+ \text{अककोज्यापकोज्याप}_1\text{ताप} + \text{क}^2\text{कोज्या}^2\text{प}_1\text{ताप}_1$

$\text{रताय} = -\text{अ}^2\text{ज्या}^2\text{पताप} - \text{अकज्यापज्याप}_1\text{ताप}_1$

$-\text{अकज्यापज्याप}_1\ \text{ताप} - \text{क}^2\text{ज्या}^2\text{प}_1\text{ताप}_1$

इस लिये $\text{यतार} - \text{रताय} = \text{अ}^2\text{ताप} + \text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ताप}_1$

$+ \text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ताप} + \text{क}^2\text{ताप}_1$

$= \text{अ}^2\text{ताप} + \text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ता}(\text{प} + \text{प}_1) + \text{क}^2\text{ताप}_1$

और $\text{ताचा} = \text{अन}' = \text{अअ}'\text{ज्याअअ}'\text{न} = \text{अतापकोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)$

परन्तु $\text{प} + \text{प}_1 = 2\text{प} - (\text{प} - \text{प}_1)$

इस लिये $\text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ता}(\text{प} + \text{प}_1)$

$$= 2\text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ताप} - \text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ता}(\text{प} - \text{प}_1)$$

$$= 2\text{कताचा} - \text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ता}(\text{प} - \text{प}_1)$$

इस के उत्थापन से

$\text{यतार} - \text{रताय} = \text{अ}^2\text{ताप} + \text{क}^2\text{ताप}_1$

$+ 2\text{कताचा} - \text{अककोज्या}(\text{प} - \text{प}_1)\text{ता}(\text{प} - \text{प}_1)$

परन्तु १३९वें प्रक्रम से क विन्दु के भ्रमण से उत्पन्न निर्दिष्ट वक्र का फल

$= \frac{१}{२}\int$(यतार—रताय) यह होगा।

अब निर्दिष्ट वक्र के परिधि पर क विन्दु के पूरा भ्रमण करने मे कुछ आगे पीछे घसकते घसकते अक, अग फिर अपने पहले स्थान पर पहुँचेंगे इस लिये ऊपर की युक्ति से $\int$अ²ताप, $\int$क²ताप$_१$,

$\int$अककोज्या(प—प$_१$) ता(प—प$_१$) ये शून्य के तुल्य हो जायँगे इस लिये वक्र का पूरा फल $= \frac{१}{२}\int$(यतार—रताय) = क$\int$ताचा = कचा

जहाँ चा लम्ब के गमन का प्रमाण है जो कि चक्र स्वयं बतलाता है। इस लिये चक्र में पहले ही से लम्ब के गमन के प्रमाण को क गुना कर अङ्कन कर डालें तो जो उस समय चक्र में अङ्कन की संख्या होगी वही वक्र का समग्र फल होगा।

अभ्यास के लिये प्रश्न

१। समातिपरवलय में जिसका य²—र² = १ यह समीकरण है

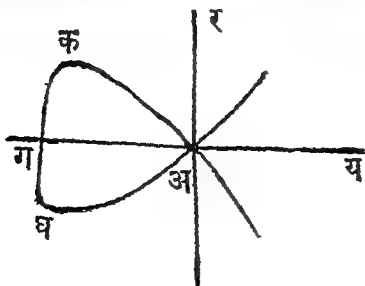
यदि केन्द्राभिप्राय से भुज, श्रुति, वक्र का चाप, इन से उत्पन्न वक्रत्रिभुज का फल = स हो तो सिद्ध करो कि

$$य = \frac{इ^{स} + इ^{-स}}{२} \text{ और } र = \frac{इ^{स} — इ^{-स}}{२}$$

२। जिस वक्र का अ²र² = य³ (२ अ−य) यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० πअ²

३। जिस वक्र का य³ = र² (अ—य) यह समीकरण है उसके चाप और असीमपथ और य अक्ष से बने क्षेत्र का फल बताओ। उ० $\frac{३}{२}$π अ²

४। जिस वक्र का अ²र² = य⁴ (क+य) यह समीकरण है उसकी आकृति नीचे लिखी हुई है इसमें अ क ग घ अ फन्दे का फल बताओ।



उ० $\frac{८क^{\frac{७}{२}}}{३\cdot५\cdot७अ^{\frac{२}{२}}}$

५। 

इस वक्र में अक = अ,

अग = क और इस का समीकरण ग $र^2 = (य—अ)(य—क)^2$ यह है। ग क के बीच जो फन्दा है उस का फल बताओ। उ० $\frac{८(क—अ)^{\frac{5}{2}}}{३·५ग^{\frac{1}{2}}}$

६। $य र^2 = ४ अ^2 (२ अ—य)$ यह एक विटचरी (Witch) का समीकरण है इसके और ससीमपथ के बीच क्षेत्र का फल बताओ।

उ० $४ \pi अ^2$

७। जिस दीर्घवृत्त का $\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} = १$ यह समीकरण है उसके अवलूत का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $\frac{३\pi(अ^2—क^2)^2}{८ अ क}$

८। सिद्ध करो कि जिसका अक्षीय समीकरण श्रुप = अ यह है उसके कोई दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्रों के फलों में वही सम्बन्ध होगा जो उस काल की दो दो श्रुतियों के अन्तर में होगा।

९। $य^3 + र^3 = ३ अ य र$ इस समीकरण के वक्र मे जो एक फन्दा होगा उसका क्या फल होगा। यहाँ अक्षीय समीकरण बनावो तो

$श्रु = \frac{३ अ कोज्याप ज्याप}{ज्या^3प + कोज्या^3प}$ ऐसा होगा फिर

$फल = \frac{९ अ^2}{२} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{ज्या^2पकोज्या^2प}{(ज्या^3प + कोज्या^3प)^2} ताप$

इसके जानने के लिये मानो कि स्पप = च तो

इस का रूप $\frac{९ अ^2}{२} \int_0^{\infty} \frac{च^2 ता च}{(१ + च^3)^2} = \frac{३अ^2}{२}$

१०। सिद्ध करो कि जिस वक्र का $र(य^2 + अ^2) = ग^2(अ—य)$ यह समीकरण है उसका फल य = ० से य = अ तक $ग^2(\frac{\pi}{4} — \frac{1}{2} ला २)$ यह है।

११। $र^2 = \frac{य^2(अ+य)}{अ—य}$ इस समीकरण के वक्र मे जो फन्दा होगा उसका फल क्या होगा। उ० $२ अ^2(१— \frac{\pi}{4})$

१२। $श्रु कोज्याप = अ^2 ज्या३प$ इस समीकरण के वक्र मे एक फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{३अ^2}{४} - \frac{अ^2}{२} ला२$

१३। यदि वक्र में $श्रु = (कोज्या\ २\ प + ज्या\ २\ प)$ तो सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $\pi अ^२$

१४। जिस वक्र का $(य^२ + र^२)^३ = ४\frac{अ^२}{क^२} य^२ र^२$ यह समीकरण है उसके एक फन्दे का फल वतावो। उ० $\frac{\pi अ^२}{८ क}$

१५। जहाँ $(य^२ + र^२)^२ = ४अ^२य^२ + ४क^२ र^२$ ऐसा समीकरण है उस वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $२\pi(अ^२ + क^२)$

१६। जिस वक्र का $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} = \frac{१}{ग^२}\left[\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२}\right]^२$ यह समीकरण है उस का फल सम्पूर्ण क्या होगा उ० $\frac{\pi ग^२}{२अक}(अ^२ + क^२)$

(१३० प्रक्रम का ३ उदाहरण देखो)

१७। जहाँ $श्रु\ कोज्याप = अकोज्या\ २\ प$ उस वक्रके फन्दे का फल वतावो उ० $(२ - \frac{\pi}{२})अ^२$

१८। यदि $अ > क$ तो $श्रु = \frac{अ^२}{\sqrt{(अ^२ - क^२ को_॰ज्या^२प)}} + ककोज्याप$ इस समीकरण के वक्र का क्या फल होगा। उ० $\frac{\pi अ^३}{\sqrt{(अ^२ - क^२)}} + \frac{\pi क^२}{२}$

१९। दो श्रुति और कर्णच्छेद (Conchoid) के चाप से वने क्षेत्र के फल का मान वतावो। जहाँ कर्णच्छेद का $श्रु = अ + क\ कोछेप$ यह समीकरण है।

२०। दीर्घवृत्त के केन्द्र से दो श्रुति जो दीर्घवृत्त के परिधिस्थ दो विन्दुओं तक खींची गई हैं उन से और दीर्घवृत्त के चाप से वने क्षेत्र का फल वतावो।

२१। परवलय का चाप और शिरःस्थान से दो श्रुति इन से वने क्षेत्र का फल कैसा होगा।

२३। यदि वक्र का समीकरण $श्रु = अ(छेप + स्पप)$ और इस के असीमपथ का समीकरण $श्रु\ कोज्याप = २\ अ$ यह हो तो वक्र और असीमपथ के भीतर का क्षेत्रफल क्या होगा।

२४। सिद्ध करो कि $श्रु = अ\ (१ + २\ कोज्याप)$ इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल $अ^२\left[२\pi + \frac{३\sqrt{३}}{२}\right]$ यह और इस के भीतरी फन्दे का फल

$अ^2 \left[\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right]$ यह होगा।

२५। लागुरिक्थिक सर्पिल में दो श्रुति और चाप से बने क्षेत्र का फल बताओ।

२६। यदि वक्र की श्रुति श्रु, मूलबिन्दु से किसी स्पर्शरेखा पर पड़े लम्ब का मान ल और इस लम्ब और नियत रेखा से उत्पन्न कोण = प, और सीमितवक्र का सम्पूर्ण फल स और इस के सीमित पादवल का सम्पूर्ण फल $स_1$ हो तो सिद्ध करो कि $2 स_1 = स + \frac{1}{2}\int श्रु^2 ता र$ जहाँ वक्र और पादवल का एक ही मूलबिन्दु है।

२७। सिद्ध करो कि पादवल का मूल स्थान दीर्घवृत्त के भीतर ही दीर्घवृत्त के केन्द्र से ग दूरी पर है उसका सम्पूर्ण फल = $\int (अ^2 + क^2 + ग^2)$ यह होगा।

२८। श्रु = अकोज्यानप + कज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ। उ० $\frac{\pi}{न}(अ^2 + क^2)$

२९। $श्रु^2 = अ^2 कोज्यानप + क^2 ज्यानप$ इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ। उ० $\frac{\sqrt{(अ^4 + क^4)}}{न}$

३०। $अ^2 र^2 = य^3 (अ^2 - य^2)$ इस समीकरण के वक्र का सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $\frac{8अ^2}{5}$

३१। श्रु = अकोज्यानप इस समीकरण के वक्र में एक फन्दे का फल बताओ। उ० $\frac{\pi अ^2}{न}$

३२। श्रु = अज्यानप इस समीकरण के वक्र मे सब फन्दों का फल बताओ।

$$उ\ फल = \begin{cases} \frac{\pi अ^2}{4} & यदि\ न\ विषम \\ \frac{\pi अ^2}{2} & यदि\ न\ सम \end{cases}$$

३३। दीर्घवृत्त के एक नाभि से जितनी श्रुतियाँ है उन्हे अपनी सीध में बढ़ा

कर ग तुल्य काट उन पर एक वक्र रेखा कर दिया। इस से और दीर्घवृत्त की परिधि से उत्पन्न जो क्षेत्र हुआ उसका फल बतावो।

उत्तर ^{ग}ग (२क + ग)

जहाँ क = दीर्घवृत्त का लघुव्यासार्द्ध।

३४। $श्रु^{म} = अ^{म}$ कोज्यामप इस समीकरण के वक्र मे एक फन्दे का फल यदि आ और वक्र के मूलविन्दु ही इस के पाददल की मूलविन्दु जहाँ है वैसे पाददल का सम्पूर्ण फल $आ_{१}$ तो सिद्ध करो कि

$$आ_{१} = आ\left(१ + \frac{म}{२}\right)$$

३५। नाभि से जो परवलय में दो श्रुतियाँ हों उन से और परवलय के चाप से जो क्षेत्र बना उसका फल सिद्ध करो कि।

$$\frac{अ^{\frac{१}{२}}}{३}\left\{\left(\frac{श्रु + श्रु_{१} + ग}{२}\right)^{\frac{३}{२}} - \left(\frac{श्रु + श्रु_{१} - ग}{२}\right)^{\frac{३}{२}}\right\}$$

जहाँ परवलय की कोटि $र = \sqrt{४ अ य}$ और परवलय के चाप की पूर्णज्या ग है।

३६। दीर्घवृत्त के केन्द्र न से वृहद्व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनाया गया उसको सहायक वृत्त कहो और न को नाभि। दीर्घवृत्त की परिधि में व विन्दु लेकर इस के कोटि को अपनी सूत्र में बढ़ा कर मानो कि सहायक वृत्त की परिधि में प विन्दु पर लगी, और दीर्घवृत्त के व्यासार्द्धाग्र अ अक्ष में अ विन्दु पर मानो तो यदि ∠अ न प = ज तो सिद्ध करो कि अनाव दीर्घवृत्तखण्ड का फल = $\frac{अक}{२}$ (ज—इज्याज) यह होगा।

जहाँ अ, क वृहल्लघुव्यासार्द्ध हैं।

३७। $४अ^{४}र^{२} = क^{२}य^{२}(अ^{२} - २अय)$ इस समीकरण के वक्र में फन्दे का फल बतावो। उ० $\frac{अ.क}{१५}$

३८। जिन दो वक्रों के $र^{२} - ४अय = ०$, $य^{२} - ४अर = ०$ ये समीकरण हैं उनके चापों से बने क्षेत्र का फल बतावो। उ० $\frac{१६ अ^{२}}{३}$

३९। जिस वक्र का $र = ग$ ज्या $\frac{य}{अ}$ ला ज्या $\frac{य}{अ}$ यह समीकरण है उसका फल० से लेकर $अ^{ग}$ तक य के मान में क्या होगा। उ० २अग (१-ला२)

४०। जिस दीर्घवृत्त का $अय^2 + २कयर + गर^2 = १$ यह समीकरण है उसका फल क्या होगा। उ० $\frac{\pi}{\sqrt{(अग - क^2)}}$

(१२८ प्रक्रम का अन्तिम वाक्य देखो)

४१। जिस दीर्घवृत्त का $अय^2 + २कयर + गर^2 + २घय + २चर + फ = ०$ यह समीकरण है उसका क्षेत्रफल क्या होगा।

$$उ० \quad \frac{\pi(अच^2 + गघ^2 + फक^2 - २चजक - अगफ)}{(अग - क^2)^{\frac{3}{2}}}$$

४२। जिस वक्र का $४र^2(अ^2 + य^2) - ८अर(अ^2 - य^2) + २(अ^2 - य^2)^2 = ०$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण फल क्या होगा। उ० $अ^2\pi\{४ - \frac{५\sqrt{५}}{२}\}$

४३। केन्द्र से दीर्घवृत्त की कोटियो पर बने अर्द्धवृत्त पर स्पर्शरेखा कर देने से स्पर्श बिन्दुओ पर जानेवाला जो वक्र हो उसका फल क्या होगा।

दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{क^2} = १$ यह है

उ० वक्र का अक्षीय समीकरण दीर्घवृत्त के केन्द्र को ध्रुवस्थान मान $ध्रु^2 = \frac{अ^2क^2}{क^2 + ४अ^2 स्प^2 \frac{प}{२}}$

और $फल = \frac{\pi(अ^2 \times क)}{२(२अ + क)}$

४४। जिस परवलय का $र^2 = ४अय$ यह समीकरण है उसके भीतर स्थिर (२ ग) पूर्णज्या घूमती है। उसके दोनो प्रान्तो पर परवलय मे जो दो स्पर्शरेखा हैं उनके योगबिन्दु के गमन से जो वक्र होगा उसके और परवलय के भीतर समग्र फल क्या होगा। उ० $\frac{ग^{2\pi}}{२}$

(परवलय के तिर्यक्भुजकोटि का समीकरण देखो)

४५। एक लड़के ने सात हाथ डंडे के दोनो शिरो को एक दीर्घवृत्त की परिधि पर रखकर चारो ओर घुमाने लगा। उस डंडे के बीच में नीचे एक लोहे की नोकदार कील लगी थी। इसके कारण डंडे के चारो ओर घूम जाने से दीर्घवृत्त के भीतर एक नया वक्र बन गया। लड़के ने हँसकर अपने गुरु से जो कि उसे हिसाब पढ़ाता था पूछा कि गुरुजी दीर्घवृत्त और नये वक्र के भीतर एक

वर्गहस्त पत्थर की कितनी पटिया फर्श के लिये लगेंगी। बताओ गुरु ने क्या उत्तर दिया। यहाँ बृहद्व्यास १४ हाथ का समझो।

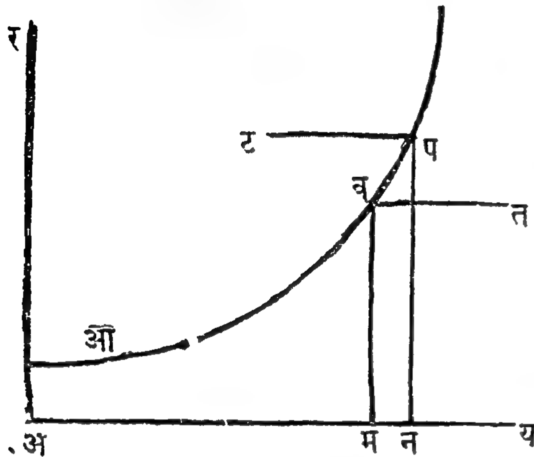
यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{२२}{७}$ मानो तो पत्थर के पटिये की संख्या ३८$\frac{१}{२}$

इति सप्तमाध्याय।

अथ अष्टमाध्याय।

वक्र के पृष्ठफल और घनफल का आनयन।

१४१। कल्पना करो कि अर, अय लम्बरूप अक्ष, आ स्थिरविन्दु



चा = आव, व विन्दु का भु = य, को = र है। व के पास प एक और विन्दु लो और आवप वक्र को अ य अक्ष के चारो ओर घुमा दो तो एक घनक्षेत्र वन जायगा जिसके आव चाप के घूमने से जो पृष्ठफल होगा उसके गति का सम्वन्ध चाप के गति के वश से $\frac{\text{ता पृ}}{\text{ताचा}} = \text{२}\pi\text{र}$ (चलनकलन का १६० वाँ प्रक्रम देखो)

इस लिये $\text{पृ} = \int \text{२}\pi\text{र ता चा}$ . . . (१)

इसी तरह से $\text{पृ} = \int \text{२}\pi\text{र} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} \text{ताय}$. (२)

$\text{पृ} = \int \text{२}\pi\text{र} \frac{\text{ताच}}{\text{तार}} \text{तार}$ . . (३)

$\text{पृ} = \int \text{२ र ता चा} = \int \text{२}\pi\text{ र} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ताप} = \int \text{२}\pi\text{भुज्या प} \frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} \text{ताप}$ (४)

जहाँ $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताप}} = \sqrt{\left\{\text{श्रु} + \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right]^2\right\}}$

किसी स्थान मे पृष्ठफल के लिये इन चारो समीकरणो मे से गणितलाघव समझ कर एक को चुन सकते हो। जहाँ सहज मे र, चाप के फल रूप मे आ सके वहाँ (१) पहले को जहाँ $\frac{\text{ताचा}}{\text{तार}}$ सहज मे र के फलरूप मे आ सके वहाँ (३) को और जहाँ अक्षीयसमीकरण मालूम हो वहाँ (४) को ले सकते हो। प्रायः (२) वहुत ही कामका है क्योकि वक्र के समीकरण से र और

$\frac{\text{ताच}}{\text{ताय}}$ दोनों प्रायः सहज में य के फलरूप में आजाते हैं इस लिये इसी को वहुधा लेाग लेते हैं।

प्रत्येक समीकरणों से उचित सीमा के भीतर चाप से वने पृष्ठ का फल मालूम हो जायगा।

१४२। अ य अक्ष से अ दूरी पर अ य के समानान्तर अ य के चारो ओर यदि एक अपरिमित रेखा घूमे तो स्पष्ट है कि समतलमस्तकरूप एक शङ्कु वन जायगा इस लिये $य_2$, $य_1$ भुज के भीतर इस शङ्कु का पृष्ठ-फल (२) समीकरण लेने से (र = अ, $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{१ + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2} = १$)

$$\int_{य_1}^{य_2} २\pi \text{ अ ताय} = २\pi \text{ अ } (य_2 - य_1) \text{ यह होगा।}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि इस शङ्कु के आधार परिधि को ऊँचाई के अन्तर से गुण देने से दोनो उचाइयों के भीतर का पृष्ठफल हो जायगा।

१४३। अ विन्दु पर अ य अक्ष से अ तुल्य कोण वनाने वाली रेखा यदि अ य के चारो ओर घूमे तो स्पष्ट है कि समसूची का पृष्ठ उत्पन्न हो जायगा जहाँ किसी विन्दु का भु = य और को = र = य स्प अ

इस लिये $\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\right)^2\right\}} = \sqrt{(१ + \text{स्प}^2 \text{अ})} = \text{छे अ}$।

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$\text{पृ} = २\pi \int \text{स्प अ छे अ य ताय} = \pi \text{ स्प अ छे अ } य^2 + \text{स्थि}$$

और $य_2$, $य_1$ के भीतर पृष्ठफल = π स्प अ छे अ $(य_2^2 - य_1^2)$ यही पृष्ठफल उस घनक्षेत्र का भी होगा जिसे भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती में वापी क्षेत्र कहा है।

इस में यदि $य_1 = ०$ और मूलस्थान से $य_2$ दूरी पर अ य अक्ष पर लम्बरूप धरातल से सूचीपृष्ठसूत्रों को काटें तो कटे हुए परिधि का व्यासार्द्ध = त्रि = $य_2$ स्पअ इसलिये समसूच्याकारशङ्कु का पृष्ठफल = πकोछेअत्रि^{2} इसी में यदि परिधि = प = २π त्रि और सूची का पृष्ठसूत्र = पृ सू = को छे अ त्रि तो पृष्ठफल = $\frac{\text{प} \times \text{पृ सू}}{२}$। इस का साधन हमने अपने चलनकलनके १५९वें प्रक्रम में केवल क्षेत्रयुक्ति ही से किया है।

१४४। गोल के पृष्ठफल का आनयन।

कल्पना करो कि वृत्त का समीकरण $र^2 = अ^2 — य^2$ यह है और यह वृत्त य अक्ष के चारो ओर घूमकर एक गोल को बनाया है तो $\frac{तार}{ताय} = -\frac{य}{र}$

और $\frac{ताच}{ताय} = \sqrt{\{१ + (\frac{तार}{ताय})^2\}} = \sqrt{(१ + \left[\frac{य^2}{र^2}\right]} = \frac{अ}{र}$

इस लिये १४१ प्रक्रम का (२) समीकरण लेने से

$$पृ = २\pi \int र\frac{अ}{र} ताय = २\pi अ \int ताय = २\pi \; अ \; य + स्थि$$

कल्पना करो कि मूलविन्दु से $य_1$, $य_2$ दूरी पर य अक्ष पर लम्बरूप जो दो धरातल है उन से गोल को काटा तो कटे हुए खण्ड का पृष्ठफल $= २\pi\, अ\, (य_2 — य_1) = प\, (य_2 — य_1)$, (यदि प = गोल की परिधि।) इस पर से सिद्ध होता है कि कटे खण्ड का पृष्ठफल $य_2 — य_1$ इसके अर्थात् उसके ऊँचाई के वश से घटता बढ़ता है अर्थात् खण्डों की ऊँचाइयो में जो सम्वन्ध है वही उनके पृष्ठफल में सम्वन्ध होता है।

यहाँ यदि $य = अ$ और $य_2 = -अ$ तो गोल का समग्र पृष्ठफल $= ४\pi अ^2$ = ४ × वृत्तफल।

अर्थात् वृत्त के फल को चार गुना कर देने से वृत्त से वने गोल का पृष्ठफल होता है। भारतवर्ष मे सव से पहले इस गोल के पृष्ठफल को भास्कराचार्य ने निकाला है और यद्यपि उन से इस की सच्ची उपपत्ति न हुई तथापि गोल का वहुत सा खण्ड कर और प्रत्येक खण्डो का फल साधन कर उनके योग पर से अटकर से सच्चा ही पृष्ठफल निकाला और लल्ल ने जो अशुद्ध पृष्ठफल का साधन किया था उसका खण्डन किया।

भास्कराचार्य ने अपने गोलाध्याय में यह भी दिखलाया है कि गोल के परिधि के आधे को व्यास मान एक कपड़े का वृत्त वनाया जाय और इस से यदि गोल को ढाँके तो गोल का आधे से अधिक खण्ड ढँक जाता है इस लिये कपड़े के वृत्त का जो फल उसके दूने से गोल का पृष्ठफल अल्प ही होगा और गणित से निश्चय है कि गोल के वृत्त के फल से कपड़े के वृत्त का दूना फल पांच गुना के आसन्न है इस लिये वृत्त के फल को पांच गुना करने से गुणनफल गोल के पृष्ठफल से अधिक होगा इस लिये लल्लने जो अपने गणित में लिखा है कि

(वृत्तफलं परिधिघ्नं समन्ततो भवति गोलपृष्ठफलम्) वृत्तफल को परिधि से गुण देने से पृष्ठफल होता है यह वहुत ही अशुद्ध है।

१४५। वृहद्व्यास के चारो ओर दीर्घवृत्त के घूमने से जो घनक्षेत्र हो उसको दीर्घगोल कहो तो इस के पृष्ठफल के आनयन के लिये कल्पना करो कि दीर्घवृत्त का समीकरण $अ^2 र^2 + क^2 य^2 = अ^2 क^2$ यह है

$$तो\ यहाँ\ \frac{तार}{ताय} = -\frac{क^2 य}{अ^2 र}\ और\ \frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left[१ + \frac{क^4 य^2}{अ^4 र^2}\right]}$$

$$= \frac{क(\sqrt{(अ^2 - इ^2 य^2)}}{अर}$$

इस लिये १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$$पृ = \frac{२\pi क}{अ}\int\sqrt{(अ^2 - इ^2 य^2)}\ ताय = \frac{२\pi कइ}{अ}\int\sqrt{(\frac{अ^2}{इ^2} - य^2)}\ ताय \cdots (१)$$

$$= \frac{\pi कइ}{अ}\left\{य\sqrt{\left[\frac{अ^2}{इ^2} - य^2\right]} + \frac{अ^2}{इ^2} ज्या^{-१}\frac{इय}{अ}\right\}$$

यदि ०, अ के भीतर य के मान में पृष्ठफल का साधन करें तो दीर्घगोल

$$का\ आधा\ पृष्ठफल = \pi\ अक\left\{\sqrt{(१ - इ^2)} + \frac{ज्या^{-१}इ}{इ}\right\}$$

(दीर्घवृत्तलक्षण देखो)

यदि $य_२$, $य_१$ के भीतर चलानयन करें तो (१) से

$$पृ = \frac{२\pi कइ}{अ}\int_{य_१}^{य_२}\sqrt{(\frac{अ^2}{इ^2} - य^2)}\ ताय$$

यह दिखलाता है कि जिस दीर्घवृत्त का $\frac{अ}{इ}$ वृहद्व्यासार्द्ध और क लघुव्यासार्द्ध है उसका $य_२$, $य_१$ सम्बन्धि द्विगुण कोटियो के भीतर जो खण्ड है उसे π से गुण देने से $य_२$, $य_१$ भुज सम्बन्धि अपने दीर्घवृत्त का पृष्ठफल हो जायगा।

इसी तरह यदि दीर्घवृत्त लघुव्यास के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल भुज और कोटि को वदल देने से

$$पृ = २\pi\int य\ ताचा = २\pi\int\left[अ^2 + \frac{अ^4 इ^2}{क^4} र^2\right]^{\frac{१}{२}} तार$$

$$= २\pi\frac{अ^2 इ}{क^2}\int\left[र^2 + \frac{क^4}{अ^2 इ^2}\right] तार$$

$$= २\pi \frac{अ^२इ}{क^२}\left\{ \frac{र}{२}\sqrt{(र^२ + \frac{क^४}{अ^२इ^२})} + \frac{क^४}{अ^२इ^२} ला \left\{ र + \sqrt{\left[र^२ + \frac{क^४}{अ^२इ^२} \right]} \right\} \right.$$

$$= \pi \frac{अर}{क^२}(अ^२इ^२र^२ + क^४)^{\frac{1}{२}} + \pi \frac{क^२}{इ} ला \frac{अइर + \sqrt{(अ^२इ^२र^२ + क^४)}}{अइ}$$

०, क के बीच मे चलानयन करने से और उसको दूना कर देने से

समग्र पृष्ठफल $= २\pi अ^२ + \pi \frac{क^२}{इ} ला \frac{१+इ}{१-इ}$

यदि $\frac{य^२}{अ^२} - \frac{अ^२इ^२र^२}{क^२} = १$ इस अतिपरवलय का $य_१$, $य_२$ के भीतर फल साधन करो तो स्पष्ट होगा कि इस फल से π गुना ऊपर के घनक्षेत्र का $य_१$ $य_२$ भुजसम्बन्धी पृष्ठफल होगा।

१४६। परवलय का चाप य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घनक्षेत्र वनाता है उसके पृष्ठफल का आनयन।

कल्पना करो कि परवलय का समीकरण $र^२ = ४अय$ यह है तो

$$\frac{तार}{ताय} = \frac{२ अ}{र} \quad \frac{ताचा}{तार} = \sqrt{१ + \frac{र^२}{४अ^२}}$$

$$= \frac{\sqrt{(४अ^२ + र^२)}}{२अ}$$ इस लिये १४१ प्रक्रम के (३) समीकरण से

$$पृ = \int २\pi र \frac{ताचा}{तार} तार = \frac{\pi}{अ} \int र\sqrt{(४अ^२ + र^२)} \, तार$$

$$= \frac{\pi}{२अ} \int \sqrt{(४अ^२ + र^२)} \, २ र \, तार = \frac{\pi}{२ अ} \times \frac{२}{३} (४ अ^२ + र^२)^{\frac{३}{२}}$$

$$= \frac{\pi}{३अ} (४ अ^२ + र^२)^{\frac{३}{२}} + स्थि$$

०, और $र_१$ के भीतर पृष्ठफल $= \frac{\pi}{३अ} \left\{ (४अ^२ + र_१^२)^{\frac{३}{२}} - ८अ^३ \right\}$

१४७। कातन्वली (Catenary) का पृष्ठफलानयन।

इस का $र = \frac{ग}{२} (इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}})$ यह समीकरण है

और जहाँ य = ० वहाँ से गणना करने से $चा = \frac{ग}{२} (इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{\frac{-य}{ग}})$

(७३वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये यदि य अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से घनक्षेत्र वना हो तो उसका पृष्ठफल १४१ प्रक्रम के (२) समीकरण से

$\int 2\pi र \frac{ताचा}{ताय} ताय$ यह होगा परन्तु यहाँ वक्र के लक्षण से

$$र^2 = \frac{ग^2}{४}(इ^{\frac{2य}{ग}} + इ^{-\frac{2य}{ग}} + 2) = \frac{ग^2}{४}(इ^{\frac{2य}{ग}} - 2 + इ^{-\frac{2य}{ग}} + ४) = चा^2 + ग^2$$

इस लिये र तार = चा ताचा। $\frac{र}{चा} = \frac{ताचा}{ता}$ और $\frac{तार}{ताय} = \frac{1}{2}(इ^{\frac{य}{ग}} - इ^{-\frac{य}{ग}})$

$= \frac{चा}{ग}$ इस लिये $\frac{ताचा}{ताय} = \frac{र}{ग}$।

$$\therefore पृ = 2\pi \int र \frac{ताचा}{ताय} ताय = 2\pi \int \frac{र^2 ताय}{ग} = \frac{2\pi}{ग} \int \frac{ग^2}{४}(इ^{\frac{2य}{ग}} + इ^{\frac{2य}{ग}} + 2) ताय$$

$$= \frac{\pi ग}{2} \int (इ^{\frac{2य}{ग}} + इ^{\frac{2य}{ग}} + 2) ताय = \frac{ग^2 \pi}{४}(इ^{\frac{2य}{ग}} - इ^{-\frac{2य}{ग}}) + ग \pi य$$

$$= \pi (र चा + ग य)$$

इस से यह सिद्ध होता है कि चाप और कोटि के घात में ग गुणित भुज जोड़ कर उसको व्यास मानो तो इस व्यास पर से जो परिधि हो वही कातन्वली घनक्षेत्र का पृष्ठफल होगा।

इसी स्थान में यदि र अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बना हो तो पृष्ठफल =

$$2\pi \int य ताचा = 2\pi \int \frac{यर ताय}{ग} = \pi \int य(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}) ताय$$

परन्तु $\int यइ^{\frac{य}{ग}} ताय = गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग \int इ^{\frac{य}{ग}} ताय = गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग^2 इ^{\frac{य}{ग}}$

और $\int यइ^{-\frac{य}{ग}} ताय = -गयइ^{-\frac{य}{ग}} + ग \int इ^{-\frac{य}{ग}} ताय = -गयइ^{-\frac{य}{ग}}$

$- ग^2 इ^{-\frac{य}{ग}}$ खण्डचलानयन से।

इस लिये

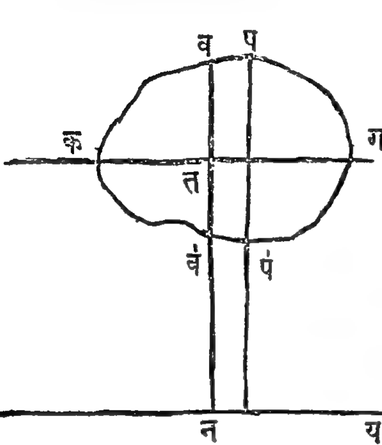
$$०, य \text{ के बीच में } पृ = \pi \int_0^य य इ^{\frac{य}{ग}} ताय + \pi \int_0^य य इ^{-\frac{य}{ग}} ताय$$

$$= \pi (गयइ^{\frac{य}{ग}} - ग^2 इ^{\frac{य}{ग}} + ग^2 - गयइ^{-\frac{य}{ग}} - ग^2 इ^{-\frac{य}{ग}} + ग^2)$$

$$= २\pi \left\{ ग^२ + य\left[\tfrac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} — इ^{-\frac{य}{ग}}\right)\right] - ग\left[\tfrac{ग}{२}\left(इ^{\frac{य}{ग}} + इ^{-\frac{य}{ग}}\right)\right] \right\}$$

$$= २\pi\,(ग^२ + यचा — गर)।$$

१४८। कल्पना करो कि कवपग प'व'क एक ऐसा सीमितवक्र है जिस का कग रेखा के दोनो ओर तुल्य अवयव है। कग रेखा अय अक्ष के समानान्तर और अय अक्ष क्षेत्र के बाहर है।



अय अक्षके चारो ओर इस क्षेत्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का पृष्ठफल १४१ प्रक्रम से यदि व, प और व'प' को बहुत ही पास पास समझो और अय अक्ष पर व न लम्ब को र, व'न लम्ब को र' और क ग के दोनो ओर सब तरह से क्षेत्र के समान भाग होने से वप चाप = व'प' चाप तो $२\pi \int (र + र')$ ताचा = ४ π क ताचा यहाँ क = तन इस लिये यदि समग्र वक्र की लम्बाई अर्थात् परिधि कवपगप'व'क का मान संचा हो तो समग्र पृष्ठफल = २πक × संचा।

इस से यह सिद्ध होता है कि ऐसे क्षेत्रो का पृष्ठफल उन के परिधि और य अक्ष से समानान्तर रेखा का अन्तर जो हो उस को व्यासार्द्ध मानने से जो वृत्त की परिधि हो उन के घात के तुल्य होता है।

जैसे यदि वृत्त का समीकरण $(य—च)^२ + (र—ज)^२ — ग^२ = ०$ ऐसा हो तो स्पष्ट है कि य अक्ष के समानान्तर केन्द्रगामिनी रेखा जो होगी उस का य अक्ष से अन्तर ज होगा इस लिये य अक्ष के चारो ओर वृत्त के घूमने से गोलमुद्रिका होगी उस का पृष्ठफल = गोलपरिधि × ज व्यासार्द्ध की परिधि = २πग × २πज

यहाँ यदि १४१वे प्रक्रम से समानान्तर रेखा के ऊपरी भाग का पृष्ठफल साधन करो तो $पृ = २\pi \int \left[ज + \sqrt{\{ग^२ — (य—च)^२\}}\right]$ताचा

$$= २\pi \int ज\ ताचा + २ग \int \sqrt{\{ग^२ — (य—च)^२\}}\ ताचा$$

$= २\pi जचा + २\pi \int \sqrt{\{ग^2 - (य - च)^2\}}$ ताचा $= २\pi जचा + २\pi गय$

लघुरूप करने से।

इसी प्रकार रेखा के नीचे के भाग का पृष्ठफल $= २\pi जचा - २\pi गय$ ऐसा होगा।

इस लिये समग्र घनफल $= २\pi ज \times २चा = २\pi गज \times$ गो प

१४९। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण श्रु = अ(१ + कोज्याप) यह है, स्थिर रेखा के चारो ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस के पृष्ठफल का ज्ञान करना हो तो १४१वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$पृ = २\pi \int श्रुज्याप \frac{ताचा}{ताप} ताप।$

परन्तु $\frac{ताचा}{ताप} = \sqrt{\left\{ श्रु^2 + \left[\frac{ताश्रु}{ताप}\right]^2 \right\}} = अ\sqrt{\{(१ + कोज्याप)^2 + ज्या^2प\}}$

$= अ\sqrt{(२ + २कोज्याप)} = २अ\ कोज्या\frac{प}{२}$

इस लिये $पृ = ४\pi अ^2 \int (१ + कोज्याप) कोज्या\frac{प}{२} ज्याप\ ताप$

$= १६\ \pi अ^2 \int कोज्या^4 \frac{प}{२} ज्या\frac{प}{२} ताप = -\frac{३२\pi अ^2}{५} कोज्या^5 \frac{प}{२} + स्थि।$

$0, \pi$ के भीतर प के मान में समग्र घनक्षेत्र का पृष्ठफल $= \frac{३२\pi अ^2}{५}$

१५०। कल्पना करो कि परस्पर लम्बरूप तीन धरातलों के योग रेखाओं के वश से किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ(य, र, ल) = ० यह समीकरण है (९८वाँ प्रक्रम देखो) तो इस पर से स्पष्ट है कि

ल = फा (य,र) ऐसा होगा। जिस पृष्ठविन्दु का भु = य, को = र, शं = ल है उस विन्दु पर घनक्षेत्र में स्पर्शधरातल करने की इच्छा है।

स्पर्शधरातल उसे कहते है जिस के और वक्र के पृष्ठ के बीच दूसरा धरातल न वन सके। इस धरातल के जानने के लिये पहले साधारण किसी धरातल का समीकरण वनाते हैं।

कल्पना करो कि किसी इष्टधरातल में प कोई विन्दु है जिस के शङ्कु ल का मूल यर धरातल में म और यर धरातल और इष्ट धरातल की योगरेखा कग है।

म विन्दुसे अय और अर अक्ष पर क्रम से मन, मत लम्ब डाल कर बढ़ा दो और मान लो कि कग रेखा में इन दोनों लम्बो का योग न′, और त′ विन्दु में है।

प विन्दु से कग रेखा पर लम्ब पम′ है।

अब यहाँ घनक्षेत्रमिति से शं = ल = पम, भु = य = अन और कोटि = र = मन। ∠ मम′प = यर धरातल और इष्टधरातल से उत्पन्न कोण = इ, ∠ क = क, ∠ग = ग।

नग = अग–अन = अग—य ∵ नन′ = नग कोस्प न′ = (अग–य) कोस्पक

और न′म = न′न–मन = (अग—य) कोस्पक—र ∵ मम′ = न′म ज्यान′

= (अग—य) कोज्याक—रज्याक परन्तु मम′ = पम कोस्प ∠पम′म

= लकोस्पइ। इस लिये

(अग–य)कोज्याक–रज्याक = अगज्याग—यज्याग—रज्याक = लकोस्पइ

वा य ज्याग + रज्याक + लकोस्पइ—अगज्याग = ०, . . . (१)

इस मे ज्याग, ज्याक, कोस्पइ, और—अगज्याग इन स्थिराङ्कों को इन के महत्तमापवर्त्तन से भाग दे कर इन के स्थान मे क्रम से आ, का, खा, गा का उत्थापन देवो तो धरातल का समीकरण

आय + कार + खाल + गा = ० . (२) यह हुआ

कल्पना करो कि पृष्ठ के उस विन्दु पर गये धरातल का समीकरण

आय + कार + खाल + गा = ० यह है तो इस के दूसरे विन्दु के भु = य′, को = र′, शं = ल′ से आय′ + कार′ + खाल′ + गा = ० ऐसा समीकरण होगा।

इस लिये दोनों के अन्तर से आ(य′—य) + का(र′—र) + खा(ल′—ल) = ०

इसलिये $\acute{ल} - ल = \acute{आ} \triangle य + \acute{का} \triangle र$ जहाँ— $\frac{आ}{खा} = \acute{आ} - \frac{का}{खा} = -\acute{का}$

परन्तु $य + \triangle य, र + \triangle र$ भुजकोटि के वश से घनवक्र के पृष्ठ का शङ्कु

$$= ल + \frac{ताल}{ताय} \triangle य + \frac{ताल}{तार} \triangle र$$

$$+ \frac{१}{२}\left\{ \frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} (\triangle य)^{२} + २\frac{ता^{२}ल}{ताय\ तार} \triangle य \triangle र + \frac{ता^{२}ल}{तार^{२}} (\triangle र)^{२} \right\} + \ldots$$

(चलनकलन का ६८वाँ प्रक्रम देखो) इस लिये घनक्षेत्र के पृष्ठ के शङ्कु में धरातल के शङ्कु को घटा देने से

$$अन्तर = \acute{अं} = \left(\frac{ताल}{ताय} - \acute{आ}\right) \triangle य + \left(\frac{ताल}{तार} = \acute{का}\right) \triangle र$$

$$+ \frac{१}{२}\left\{ \frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} (\triangle य)^{२} + २\frac{ता^{२}ल}{ताय\ तार} \triangle य \triangle र + \frac{ता^{२}ल}{तार^{२}} (\triangle र)^{२} \right\} + \ .$$

यर धरातल में जिन विन्दुओं का य, र और $य + \triangle य, र + \triangle र$ भुजकोटि है उन पर गई रेखा य अक्ष से यदि ब कोण बनावे तो $\triangle र = यस्पब$ अन्तर मे इन का उत्थापन देने से

$$\acute{अं} = \left\{ \left[\frac{ताल}{ताय} - \acute{आ}\right] + \left[\frac{ताल}{तार} - \acute{का}\right] स्पब \right\} \triangle य$$

$$+ \left[\frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} + २\frac{ता^{२}ल}{ताय\ तार} स्प\ ब + \frac{ता^{२}ल}{तार^{२}} स्प^{२}ब \right\} \frac{(\triangle य)^{२}}{२} + \quad \Big]$$

इस लिये

$$\frac{\acute{अं}}{\triangle य} = \left[\frac{ताल}{ताय} - \acute{आ}\right] + \left[\frac{ताल}{तार} - \acute{का}\right] स्प\ ब$$

$$+ \left\{ \frac{ता^{२}ल}{ताय^{२}} + २\frac{ता^{२}ल}{तायतार} स्प\ ब + \frac{ता^{२}ल}{तार^{२}} स्प^{२}\ ब \right\} \frac{\triangle य}{२}$$

यह समीकरण दिखलाता है कि $\triangle य$ अत्यल्प लेने से $\frac{\acute{अं}}{\triangle य}$ यह $\left(\frac{ताल}{ताय} - \acute{आ}\right) + \left(\frac{ताल}{तार} - का\right) स्प\ ब$ इस के तुल्य हो सकता है इस में यदि $\triangle य, \triangle र$ ऐसे हों कि $स्प\ ब = -\frac{\frac{ताल}{ताय} - \acute{आ}}{\frac{ताल}{तार} - \acute{का}}$ तो स्पष्ट है कि एक दिशा में परमाल्प अन्तर शून्य के लगभग होगा।

परन्तु यदि $\frac{ताल}{ताय} = \acute{आ}$ और $\frac{ताल}{तार} = \acute{का}$ तो सव दिशाओं में परमाल्प अन्तर शून्य के लग भग होगा और $\triangle य$ के स्थान में ताय रखने से ठीक ही ठीक शून्य के तुल्य होगा ऐसी दशा में वह धरानल स्पर्शधरातल होगा

और उस का समीकरण अं, कं के स्थान मे $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$, $\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ का उत्थापन देने से

$\text{ल}' - \text{ल} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} (\text{य}' - \text{य}) + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} (\text{र}' - \text{र})$ यह होगा . . (३)

(१) समीकरण का रूपान्तर करने से

ल = अग स्प इ ज्या ग — य स्प इ ज्या ग — र स्प इ ज्या क

और $\text{ल}'$ = अ ग स्प इ ज्या ग — $\text{य}'$ स्प इ ज्या ग — $\text{र}'$ स्प इ ज्या क

इस लिये $\text{ल}' - \text{ल}$ = — स्प इ ज्या ग $(\text{य}' - \text{य})$ — स्प इ ज्या क$(\text{र}' - \text{र})$, (४)

(३) और (४) का तुलना करने से

$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ = — स्पइज्याग, $\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ = — स्पइज्याक = — स्पइकोज्याग

इस लिये $\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 = \text{स्प}^2\ \text{इ}$

इस लिये छे इ $= \sqrt{\left\{ 1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2 \right\}}$ (५)

मे यहाँ पर घनक्षेत्रमिति के सिद्धान्तो का वर्णन नही करता हूँ किन्तु घन-क्षेत्रमिति के बल से कुछ चलराशि के सिद्धान्त को दिखलाया चाहता हूँ। हिन्दी भाषा मे घनक्षेत्रमिति के न होने से उपयोगी सिद्धान्तो का कुछ वर्णन कर दिया है। डिमार्गन (Demorgan) साहब ने चलनकलन और चलराशिकलन के १५ वे अध्याय मे इस विषय पर बहुत बढ़ाकर लिखा है। चलराशिकलन मे घन-क्षेत्रमिति के सिद्धान्तो का लिखना मै अनावश्यक समझता हूँ।

१५१। कल्पना करो कि यर धरातल से जो इष्टधरातल इ तुल्य कोण बनाता है उसमे ख प व भ म त द ध ख एक कोई क्षेत्र है इसके सीमा के प्रति-बिन्दु से यर धरातल पर लम्ब डाल लम्बमूलो मे रेखा कर देने से यर धरा-तल मे एक नया क्षेत्र $\text{ख}_1\text{प}_1\text{व}_1\text{द}_1\text{व}'_1\text{प}'_1\text{ख}_1$ उत्पन्न हुआ इस का फल जानना हो तो पहले क्षेत्र मे कोई ख बिन्दु लेकर धरातलो के योगरेखा क ग के समा-नान्तर खद रेखा खींचो। इस का छोटा छोटा च के समान बहुतसा विभाग कर प्रति भागों पर पपं,

वर्वं, भर्भं, इत्यादि लम्ब खड़ा कर दो इस तरह से इस क्षेत्र का समानलम्ब-चतुर्भुज रूप वहुत खण्ड हो गये जिन मे किसी एक पर्पं वं व चतुर्भुज का फल $=$ च $\left[\frac{\text{पर्पं} + \text{वर्वं}}{२}\right]$ और इस चतुर्भुज के वश से यर धरातल मे नये क्षेत्र मे भी लम्बमूल के वश से एक समान लम्ब प$_१$पं$_१$वं$_१$व$_१$ चतुर्भुज उत्पन्न होगा जिस मे प$_१$ पं$_१$ = कोज्याइ × प पं, वं$_१$व$_१$ = कोज्याइ × व वं और इस मे लम्ब मान वही च के तुल्य होगा इस लिये इस का फल $=$ च $\left[\frac{\text{प}_१\text{पं}_१ + \text{व}_१\text{वं}_१}{२}\right] =$ च $\left[\frac{\text{प पं} + \text{व वं}}{२}\right]$ कोज्या इ = पहले चतुर्भुज का फल × कोज्या इ ॥ इसी तरह सब पहले चतुर्भुजों के फल को कोज्याइ से गुण देने से नये क्षेत्र के चतुर्भुजो का सब फल होगा इस लिये सब चतुर्भुजो का योग नये क्षेत्र का फल = पहले क्षेत्र के चतुर्भुजो का योग × कोज्याइ = पहले क्षेत्र का फल × कोज्याइ।

इस से यह सिद्ध होता है कि जिस धरातल मे जो कोई क्षेत्र हो उसके प्रान्त से दूसरे धरातल में लम्ब डाल इस क्षेत्र को दूसरे धरातल में परिणामन करे तो परिणत क्षेत्र का फल पहले क्षेत्र के फल को धरातलो के झुकाव की कोटिज्या से गुण देने से होगा।

१५२। कल्पना करो कि किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ का फ (य, र, ल) = ० यह समीकरण है। पृष्ठ के प विन्दु का भु = य, को = र, —श = ल और प विन्दु के वहुत ही पास जो व विन्दु है उस का भु = य + △य, को = र + △र, शं = ल + △ल। प, विन्दु पर एक स्पर्शधरातल वना लो और प और व विन्दुओं में लगा कर य ल, र ल, धरातलो के समानान्तर धरातलों को वनावो तो समानान्तर धरातलों से जो स्पर्शधरातल मे अवयव उत्पन्न हुआ उसके प्रान्त से य र धरातल पर यदि लम्ब डालें तो उस का परिणत रूप एक आयत होगा जिसका भुज = △य, को = △र इस लिये स्पर्शधरातल के अवयव का फल = $\frac{\triangle\text{य} \times \triangle\text{र}}{\text{कोज्या इ}}$। १५१ प्रक्रम से इस मे स्पष्ट है कि △ य के स्थान मे यदि ताय को रख दे तो स्पर्शधरातल का अवयव घनक्षेत्र के पृष्ठ का अवयव हो जायगा। परन्तु जव

य = ताय तो र = तार इस लिये रल धरातल के समानान्तर दोनों

धरातलो के वीच का पृष्ठफल $=$ ताय $\int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याड}}$ और समग्र पृष्ठफल

$$= \int \text{ताय} \int \frac{\text{तार}}{\text{कोज्याइ}} = \int\int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ \right\}} \text{ तार ताय}$$

१५० प्रक्रम और द्विगुण चलानयन से

यहाँ यदि पहले तार को स्थिर मान चलानयन करो तो यल धरातल के समानान्तर धरातल जो हैं उन के बीच का पहले पृष्टफल आवेगा फिर इस पर से तार के वश से समग्र पृष्ठफल आ जायगा।

पृष्ठ के समीकरण के वश से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}$ के मान विदित हो जायँगे फिर य, और र के उचित सीमाओं पर से अभीष्ट पृष्ठखण्ड का फल $\int\int \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ \right\}}$ तार ताय इस पर से विदित हो जायगा।

जैसे (१) जिस गोल के पृष्ठ का $य^२ + र^२ + ल^२ = अ^२$ यह समीकरण है उस के अष्टमांश का पृष्ठफल जानना है तो यहाँ

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = -\frac{य}{ल}, \frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = -\frac{र}{ल}$$

इसलिये $पृ = \int\int \sqrt{\left(१ + \frac{य^२}{ल^२} + \frac{र^२}{ल^२}\right)}$ तार ताय

$$= \int\int \frac{\text{अतार ताय}}{\sqrt{(अ^२ - य^२ - र^२)}}$$

$$= अ\int\int \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(अ^२ - य^२ - र^२)}} = अ\int\int \frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(र_१^२ - र^२)}}$$ यदि $अ^२ - य^२ = र_१^२$

परन्तु $\int \frac{\text{तार}}{\sqrt{(र_१^२ - र^२)}} = ज्या^{-१}\frac{र}{र_१}$

यहाँ यदि $ल = ०$ तो यर धरातल मे जो गोलपृष्ठ का अवयव लगा है उस का समीकरण $अ^२ - य^२ = र^२ = र_१^२$ ऐसा होगा इस मे यदि $र = ०$, और $र = र_१$ मानें तो अय अक्ष के ऊपर से य र धरातल और गोलपृष्ठ के सम्पात तक रल धरातल के समानान्तर धरातलो के वीच का

पृष्ठफल $= \int_०^{र_१} \frac{\text{तार}}{\sqrt{(र_१^२ - र^२)}} = \frac{\pi}{२}$

इसलिये $पृ = \frac{अ\pi}{२}\int$ ताय इस मे यदि ० और अ के वीच य के मान

में चलानयन करें तो गोल के अष्टमांश पृष्ठ का फल $= \frac{\pi अ^2}{२}$ इस लिये समग्र पृष्ठफल $= ४\pi अ^2$।

इसी स्थान में यदि पहले ताय और फिर तार के वश से चलानयन करें तो ऊपर की युक्ति से अष्टमांश पृष्ठ का फल

$$= \int_0^{अ} \int_0^{य_१} \frac{अ ताय तार}{\sqrt{(अ^2 - र^2 - य^2)}}$$ । जहाँ $य_१^2 = अ^2 — र^2$

(२) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का $ल^2 + (य कोज्या अ_१ + र ज्या अ_१)^2 — अ^2 = ०$ यह समीकरण है उस के पृष्ठ फल का क्या मान होगा।

यहाँ $$\frac{ताल}{ताय} = - \frac{कोज्या अ_१ (य कोज्या अ_१ + र ज्या अ_१)}{ल}$$

$$\frac{ताल}{तार} = - \frac{ज्या अ_१ (य कोज्या अ_१ + र ज्या अ_१)}{ल}$$

इसलिये $$पृ = \int\int \frac{अ तार ताय}{ल} = \int\int \frac{अ तार ताल}{\sqrt{\{ अ^2 - (य कोज्या अ_१ + र ज्या अ_१)^2 \}}}$$

यर धरातल घनपृष्ठ को जहाँ काटता है उस का समीकरण $अ = \pm$ (य कोज्या $अ_१$ — र ज्या $अ_१$) यह है। यहाँ धनचिह्न ग्रहण करने से धन पद में र = (अ — य कोज्या $अ_१$) कोछे $अ_१$

अब $$\int \frac{तार}{\sqrt{\{ अ^2 - (य कोज्या अ_१ + र ज्या अ_१)^2}}$$

$$= \frac{१}{ज्या अ_१} ज्या^{-१} \frac{य कोज्या अ_१ + र ज्या अ_१}{अ}$$ इस का र = ० और

र = (अ — य कोज्या $अ_१$) कोछे $अ_१$ के भीतर का मान

$$= \frac{१}{ज्या अ_१} \left(\frac{\pi}{२} - ज्या^{-१} \frac{य कोज्या अ_१}{अ} \right)$$

इस लिये $$पृ = \frac{अ}{ज्या अ_१} \int \left(\frac{\pi}{२} — ज्या^{-१} \frac{य कोज्या अ_१}{अ} \right) ताय$$

इस मे यदि $ज्या^{-१} \frac{य कोज्या अ_१}{अ} = स$, तो $\frac{अ ज्या स}{कोज्या अ_१} = य$ और

$$\frac{\text{अकोज्यासतास}}{\text{कोज्याअ}_१} = \text{ताय}$$

इसलिये

$$\int \text{तायज्या}^{-१} \frac{\text{यकोज्याअ}_१}{\text{अ}} = \int \frac{\text{असकोज्यासतास}}{\text{कोज्याअ}_१} = \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_१} \int \text{सकोज्यासतास}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_१} (\text{सज्यास} + \text{कोज्यास})$$

अब ० और $\frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_१}$ के भीतर य के मान मे

$$\text{पृ} = \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_१} \int \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_१} \left(\frac{\pi}{२} - \text{ज्या}^{-१} \frac{\text{यकोज्याअ}_१}{\text{अ}}\right) \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{अ}}{\text{ज्याअ}_१} \left(\frac{\pi}{२} \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_१} + \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_१} - \frac{\pi}{२} \frac{\text{अ}}{\text{कोज्याअ}_१}\right) = \frac{\text{अ}^२}{\text{ज्याअ}_१\text{कोज्याअ}_१}$$

यह पृष्ठफल धन पद मे जो घनक्षेत्र का खण्ड है उस का हुआ।

यदि ध्यान दे कर विचार करो तो जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण ऊपर लिख कर दिखाया है वह एक समतलमस्तक रूप शङ्कु है जिस के अक्ष का समीकरण $\text{ल} = ०$, $\text{य कोज्याअ}_१ + \text{रज्याअ}_१ = ०$ ऐसा होगा।

१५३। बहुत से घनक्षेत्र के पृष्ठ ऐसे होते हैं जिन के पृष्ठ का अवयव जो १५२ प्रक्रम में देखा गया है एक ही होते हैं। जैसे जिस पृष्ठ का $२\text{अल} = \text{य}^२ + \text{र}^२$ यह समीकरण है उस में

$$\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ = \frac{\text{य}^२ + \text{र}^२}{\text{अ}^२}$$ और जिस के पृष्ठ का समीकरण

$\text{अल} = \text{यर}$ यह है उस मे भी $\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^२ + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^२ = \frac{\text{य}^२ + \text{र}^२}{\text{अ}^२}$

वही सिद्ध होता है इस लिये दोनों मे पृष्ठ का परमाल्पमान अर्थात् तात्कालिकी गति एक ही है। ऐसे पृष्ठों का यूलर (Euler) ने Congruent नाम रक्खा है मैं इन्हें समगतिक पृष्ठ कहता हूँ।

इसी प्रकार $(\text{ल}—\text{ग}) = \{(\text{य}—\text{अ})^२ + (\text{र}—\text{क})^२\}\text{स्प}^२\text{इ}$ इस शङ्कु और

$य कोज्या अ_1 + र\ कोज्या क_1 + ल\ कोज्या इ = घ$ इस धरातल में भी पृष्ठ का अवयव एक ही है। जहाँ $कोज्या^2 अ_1 + कोज्या^2 क_1 + कोज्या^2 इ = १$ इसी तरह

$$२अल = य^2 + र^2$$

$$२अल = (य^2 — र^2)ग + २यर\sqrt{(१ — ग^2)}$$

$$२अल = \{ (य^2 + र^2)^2 — ४कयर + २ग(य^2 — र^2) + क^2 + ग^2 \}^{\frac{१}{२}}$$

इत्यादि सब पृष्ठ समगतिक पृष्ठ हैं।

१५४। यदि स्पर्शधरातल में ऐसा एक अवयव लें जिस का यर धरातल में परिणत मान श्रुताश्रुताप यह हो तो

$$पृ = \iint \sqrt{\left\{ १ + \left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^2 \right\}}\ श्रुताश्रु\ ताप$$

जैसे जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का $यर = अल$ यह समीकरण है वह $य^2 + र^2 = ग^2$ इस वृत्त से काटा गया तो कटे खण्ड का पृष्ठफल जानना हो तो यहाँ

$$छेइ = \sqrt{\left(१ + \frac{य^2}{अ^2} + \frac{र^2}{अ^2}\right)} = \frac{\sqrt{(अ^2 + श्रु^2)}}{अ}\ क्योंकि\ य^2 + र^2 = श्रु^2$$

$$इस\ लिये\ पृ = \int_0^{२\pi} \int_३^{ग} \frac{\sqrt{(अ^2 + श्रु^2)}}{अ}\ श्रुताश्रुताप$$

$$परन्तु \int \frac{\sqrt{(अ^2 + श्रु^2)}}{अ}\ श्रुताश्रु = \frac{१}{३अ}(अ^2 + श्रु^2)^{\frac{३}{२}}$$

$$इस\ लिये \int_0^{ग} \frac{\sqrt{(अ^2 + श्रु^2)}}{अ}\ श्रुताश्रु = \frac{१}{३अ}\left\{(अ^2 + ग^2)^{\frac{३}{२}} — अ^3\right\}$$

$$और \int \frac{१}{३अ}\left\{(अ^2 + ग^2)^{\frac{३}{२}} — अ^3\right\} ताप = \frac{प}{३अ}\left\{(अ^2 + ग^2)^{\frac{३}{२}} — अ^3\right\}$$

$$इस\ लिये\ अभीष्ट\ पृष्ठफल = \int_0^{२\pi} \int_0^{ग} \frac{\sqrt{(अ^2 + ग^2)}}{अ}\ श्रुताश्रुताप$$

$$= \frac{२\pi}{३अ}\left\{(अ^2 + ग^2)^{\frac{३}{२}} — अ^3\right\}$$

१५५। यदि पृष्ठ का अक्षीय समीकरण लें अर्थात्

$$य = श्रुज्याप कोज्याश_{१},\ र = श्रुज्यापज्याप_{१},\ ल = श्रु कोज्याप$$

और इन पर से ताय, तार इत्यादि का मान बना कर

$$पृ = \int\int\sqrt{\left\{१ + \left[\frac{ताल}{ताय}\right]^{२} + \left[\frac{ताल}{तार}\right]^{२}\right\}}\ तार\ ताय$$

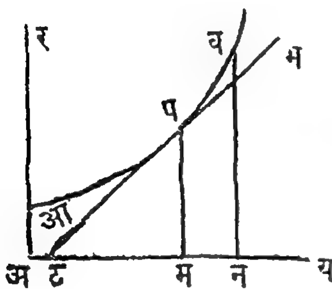
इस मे उत्थापन दे तो

$$पृ = \int\int\sqrt{\left\{श्रु^{२}ज्या^{२}प + \left[\frac{ताश्रु}{ताश}\right]^{२}ज्या^{२}प + \left[\frac{ताश्रु}{ताप_{१}}\right]^{२}\right\}}\ श्रुताश\ ताप_{१}$$

ऐसा सिद्ध होगा। जहाँ सुभीता समझ पड़े तहाँ इस पर से भी उचित सीमाओ के भीतर पृष्ठफल जान सकते हो विस्तार के भय से बहुत बढ़ाना नही चाहते। २५० प्रक्रम के (३) उदाहरण तक पहुँचोगे तो स्पष्ट घनक्षेत्र हो जायगा।

वक्र का घनफलानयन।

१५६। कल्पना करो कि आ, वक्र मे नियत विन्दु और प कोई विन्दु है जिस का भु = अम = य, को = पम = र और मान लो कि आ के भुज से य बड़ा है।



कल्पना करो कि आपव वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र वनाता है तो यदि आ और प विन्दु से गये और य अक्ष पर लम्बरूप ऐसे दो धरातलो से घनक्षेत्र को काटे और इन दोनो धरातलों के बीच में के घनफल को घ कहें तो चलनकलन के १६० वे प्रक्रम से

$$\frac{ताघ}{ताय} = \pi र^{२}$$

इस लिये $घ = \int \pi र^{२}\ ताय$

वक्र के समीकरण से र का मान य के फल के रूप मे आजायगा। समझ लो कि $\int \pi र^{२} ताय = फा(य)$ तो

$$घ = फा(य) + स्थि$$

कल्पना करो कि जिस विन्दु का $भु = य_{१}$ उस का घनफल $= घ_{१}$ और जिस विन्दु का $भु = य_{२}$ उस का घनफल $= घ_{२}$ है तो

$$घ_1 = फा(य_1) + स्थि$$
$$घ_2 = फा(य_2) + स्थि$$

इस लिये $घ_2 - घ_1 = फा(य_2) - फा(य_1) = \int_{य_1}^{य_2} \pi र^2 ताय = \pi \int_{य_1}^{य_2} र^2 ताय$

१५७। समसूच्याकार शङ्कु का घनफलानयन।

कल्पना करो कि एक सरल रेखा अ मूल विन्दु मे हो कर गई है और य अक्ष से अ तुल्य कोण वनाती है तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से समसूची उत्पन्न होगी (१४३वॉ प्रक्रम देखो) इस लिये यहॉ $र = य \cdot स्पअ$

$$घ = \int \pi स्प^2 अ\, य^2 ताय = \frac{\pi स्प^2 अ\, य^3}{3} + स्थि$$

और $घ_2 - घ_1 = \frac{\pi स्प^2 अ}{3}(य_2^3 - य_1^3)$

कल्पना करो कि $य_1 = 0$ और $त्रि = य_2\, स्पअ$ अर्थात् $य_2 = \frac{त्रि}{स्पअ}$ तो समसूच्याकार शङ्कु (जिसके आधार परिधि का व्यासार्द्ध त्रि है) का

$$घनफल = \frac{\pi स्प^2 अ}{3} \times \frac{त्रि^3}{स्प^3 अ} = \frac{\pi त्रि^3}{3 स्पअ} = \frac{\pi त्रि^2 य_2}{3}$$

इस से यह सिद्ध होता है कि समखात फल की तिहाई सूची का घनफल होता है। इस को भास्कराचार्य ने भी अपनी लीलावती में लिखा है।

१५८। गोल का घनफलानयन।

यहां $र^2 = अ^2 - य^2$

इस लिये $घ = \int \pi र^2 ताय = \pi \int (अ^2 - य^2) ताय$

$= \pi(अ^2 य - \frac{य^3}{3}) + स्थि$। $य = 0$ और $य = अ$ मानने से आधे गोल का

$घनफल = \frac{2\pi अ^3}{3}$ इस लिये सम्पूर्ण घनफल $= \frac{4\pi अ^3}{3} = \frac{4\pi अ^2 \times 2अ}{6}$

$= \frac{पृफ \times व्या}{6}$ अर्थात् पृष्ठफल को व्यास से गुण कर छ का भाग देने से गोल का घनफल होता है। इस को भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती मे लिखा है।

१५९। जिस परवलय का $र^2 = 4अय$ यह समीकरण है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$घ = \int \pi र^2 ताय = \pi \int ४अय ताय = ४अ\pi \int यताय = २अ\pi य^2 + स्थि$

इस लिये $घ_2 — घ_1 = २अ\pi(य_2^2 — य_1^2)$ इस में यदि $य_1 = ०$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_1 = ०$ इस लिये $र_2$ कोटि से बने वृत्त और शिरः स्थान के भीतर का घनफल $= २अ\pi य_2^2 = \frac{४अय_2 \pi य_2}{२} = \frac{\pi र_2^2 य_2}{२}$

अर्थात् जिस समतलमस्तकपरिधि शङ्कु का आधार $र_2$त्रिज्या से उत्पन्न परिधि हो और उँचाई $य_2$ हो उस के घनफल के आधे के बराबर उसी उँचाई और उसी आधार से जो परवलय का घनक्षेत्र होगा उस का घनफल होगा।

१६०। चलनकलन के ३८८ पृष्ठ मे जो चक्रालद (Cycloid) का समीकरण

$र = क (अ + ज्याय), \quad य = क (१ — कोज्याअ)$ यह लें तो य अक्ष के चारो ओर इस के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का

$घ = \int \pi र^2 ताय = \pi क^3 \int (अ + ज्याअ)^2 ज्याअताअ$

$= \pi क^3 \int (अ^2 + २अज्याअ + ज्या^2 अ) ज्याअताअ$

यहाँ खण्डचलानयन से

$\int अ^2 ज्याअताअ = — अ^2 कोज्याअ + २\int अकोज्याअताअ$

$= — अ^2 कोज्याअ + २अज्याअ + २कोज्याअ।$

$\int २अज्या^2 अताअ = \int अ(१ — कोज्या२अ)ताअ$

$= \frac{अ^2}{२} - \frac{अज्या२अ}{२} - \frac{कोज्या२अ}{४}।$

और $\int ज्या^3 अताअ = \frac{कोज्याअज्या^2 अ}{३} + \frac{२}{३}\int ज्याअताअ$

$= -\frac{कोज्याअज्या^2 अ}{३} - \frac{२कोज्याअ}{३}$ (१२ वे प्रक्रम के १५ वे उदाहरण से)।

अब आधे चक्रालद के घूमने से जो घनक्षेत्र होता है उस के घनफल का ज्ञान करना हो तो $य = ०$ और $य = २क$ वा $अ = ०, अ = \pi$ के भीतर ऊपर के चलों का मान ले आने से

$\int_0^\pi अ^2 ज्याअताअ = \pi^2 — २ — २ = \pi^2 — ४$

$२\int_0^\pi अज्या^2 अताअ = \frac{\pi^2}{२} - \frac{१}{४} + \frac{१}{४} = \frac{\pi^2}{२},$

और $\int_0^{\pi}$ ज्या^{3}अताअ $= \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$,

इस लिये अभीष्टघनफल

$= \pi क^3 \left\{ \pi^2 - ४ + \frac{\pi^2}{२} + \frac{४}{३} \right\} = \pi क^3 \left(\frac{3\pi^2}{२} - \frac{८}{३} \right)$।

१६१। यदि वक्र र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो स्पष्ट है कि उस का घनफल य और र को बदल देने से $\int \pi य^2 तार$ यह होगा। इस लिये $घ_2 - घ_1 = \pi \int_{र_1}^{र_2} य_2 तार$ ऐसा होगा।

१६२। परवलय का $र^2 = ४अय$ यह समीकरण है और यह र अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनाता है तो इस का घन फल ऊपर के प्रक्रम से

$घ = \int \pi य^2 तार = \pi \int \frac{र^4}{१६अ^2} तार = \frac{\pi र^5}{८०अ^2} + स्थि$

इस लिये $घ_2 - घ_1 = \frac{\pi(र_2^5 - र_1^5)}{८०अ^2}$। इस में यदि $र_1 = ०$ तो क्षेत्र के समीकरण से $घ_1 = ०$ इस लिये $र_2$ त्रिज्या से बने वृत्त और शिरः स्थान के भीतर का घनफल $= \frac{\pi र_2^5}{८०अ^2}$।

१६३। यदि दो वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर दो घनक्षेत्र बनाते हों तो जो धरातल य अक्ष पर लम्ब है ऐसे दो धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों के काटने से उन के भीतर जो घनफल होंगे उन के अन्तर को घ कहो और पहले वक्र का र = फ(य) यह और दूसरे का र = फ(य) यह समीकरण हो तो पिछले प्रक्रमों से स्पष्ट है कि $घ = \pi \int [\{फ(य)\}^2 - \{फ(य)\}^2] ताय$ यह होगा।

जिन दोनों लम्बरूपी धरातलों से दोनों घनक्षेत्रों को काटा है उन का समीकरण क्रम से यदि $य = य_1$, $य = य_2$ ऐसे हों तो ऊपर के चल में $य_1$, $य_2$ के भीतर जो मान होगा वही घनफलों का अन्तर होगा।

कल्पना करो कि एक सीमित वक्र ऐसा है कि एक सरल रेखा जिस का समीकरण र = क है उस के सब कोटि खण्डरूपी पूर्णज्याओं का समान द्विभाग करती है (१४८वें प्रक्रम का क्षेत्र देखो) तो पूर्णज्या का मान यदि फि(य) हो तो रेखा के नीचे वक्र के भाग का समीकरण र = अ — फि(य) = फा(य) और ऊपर

के भाग का समीकरण र = क + फि(य) = फ(य) ऐसा होगा । इस लिये दोनो भागों से उत्पन्न घनक्षेत्र का फल = घ = $\pi\int[\{फ(य)\}^2 - \{फा(य)\}^2]$ताय

= $४\pi क\int$ फि(य)ताय

कल्पना करो कि सीमित वक्र के दोनो प्रान्त के जहाँ कोटि वक्र की स्पर्शरेखा हो जाती है भुज क्रम से $य_1$, $य_2$ हैं तो य अक्ष के चारो ओर सीमित वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र उत्पन्न होगा उस का घन—

फल = $४\pi क\int_{य_1}^{य_2}$ फि(य)ताय यह होगा ।

यह अक्ष के चारो ओर वक्र के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा इस वाक्य का तात्पर्य यह है कि य, और र अक्ष से जितने जितने अन्तर पर वक्र के प्रत्यवयव हैं उतने ही उतने ही अन्तर पर सर्वत्र रहे ऐसा वक्र को चारो ओर घुमाने से वक्र के आकार के वश से आकाश मे जो घनाकृति उत्पन्न हो वही वक्रजन्य घनक्षेत्र है ।

ऊपर के घनफल मे अर्थात् $\pi\int[\{फ(य)\}^2 - \{फा(य)\}^2]$ताय इस में यदि फ(य) के स्थान मे र और फा(य) के स्थान मे $र'$ रख दे तो

घ = $\pi\int(र^2 - र'^2)$ताय = $\pi\int(र + र')(र - र')$ताय = $२\pi क\int(र - र')$ताय ऐसा होगा परन्तु $\int(र - र')$ताय यह पिछले अध्याय से सीमित वक्र का फल है।

इस लिये यदि सम्पूर्ण वक्र का फल आ हो तो सम्पूर्ण घनक्षेत्र का फल $२\pi क \times$ आ होगा । यहाँ भी १४८ प्रक्रम के ऐसा समझ लेना चाहिये कि वक्र का सब भाग य अक्ष के ऊपर है। यदि वक्र का कुछ भाग य अक्ष के नीचे भी हो तो सहज मे दिखला सकते हो कि $२\pi क \times$ आ यह य अक्ष के नीचे और ऊपर के घनक्षेत्र विभागो के घन फलो का अन्तर होगा ।

जैसे १४८ प्रक्रम में जो $(य - च)^2 + (र - ज)^2 - ग^2 = 0$ इस वृत्त के य अक्ष के चारो ओर घूमने से गोलीय मुद्रिका होगी उस का घनफल ऊपर की युक्ति से $२\pi^2 ग^2 ज$ यह होगा जहाँ ग वृत्त का व्यासार्द्ध और ज, य अक्ष से वृत्त के केन्द्र का लम्बरूपी अन्तर है ।

१६३। इसी तरह यदि दोनो वक्र जिन के समीकरण क्रम से

य = फ(र), य = फा(र)

ये हैं र अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से घनफलान्तर = घ = $\pi\int[\{फ(र)\}^2 - \{फा(र)\}^2]$ तार यह होगा ।

फिर इस पर से पूर्ववत् विचार कर सकते हो।

१६४। १५६वें प्रक्रम में घनफल के लिये जो युक्ति लिखी गई है उसी युक्ति से चाहै जैसा घनक्षेत्र हो सब का घनफल जान सकते हैं।

जैसे किसी घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से काटे और कटे क्षेत्र का फल फ(य) कल्पना करे तो स्पष्ट है कि इस लम्बरूपी धरातल के वहुत ही पास जो दूसरा लम्बरूप धरातल है उस से भी जो कट कर दोनों धरातलो के बीच मे घनक्षेन का घनफल $\triangle$घ है वह फ(य)$\triangle$य के समान होगा इस लिये

$\frac{\triangle \text{घ}}{\triangle \text{य}} =$ फ(य) $\triangle$ य को शून्य अर्थात् ताय मानने से

$\frac{\text{ताघ}}{\text{ताय}} =$ फ(य) $\therefore$ घ $= \int$ फ(य) ताय ऐसा होगा।

१६५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र जिसके पृष्ठ का समीकरण

$\frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{र}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{ल}^2}{\text{ग}^2} = १$ यह है उसका घनफलानयन।

यहाँ यदि घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब धरातल से काटो जो कि मूल विन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा है तो घनक्षेत्र के लक्षण से कटा हुआ प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिसके दोनों व्यासार्द्ध क्रम से

$\text{क}\sqrt{\left[१ - \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}\right]}, \text{ग}\sqrt{\left[१ - \frac{\text{य}^2}{२}\right]}$ ये हैं इस लिये छेदित प्रदेश का फल $=$ फ(य) $= \pi$ क ग$\left(१ - \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}\right)$ यह हुआ और अभीष्ट क्षेत्र का संपूर्ण घनफल

$$= \int_{-\text{अ}}^{\text{अ}} \left[१ - \frac{\text{य}^2}{\text{अ}^2}\right] \pi \text{क ग ताय} = \frac{४\pi \text{ अ क ग}}{३}$$

१६६। किसी सूची क्षेत्र का घनफलानयन।

कल्पना करो कि सूची का आधार कोई वहुभुजक्षेत्र है जिस का फल आ है और सूची का वेध वा उँचाई वे है तो यदि भुज, कोटि शङ्कुओं का मूल विन्दु सूची का शिरःस्थान मानें और य अक्ष को सूची के आधार पर लम्ब रूप मानें तो १६४ प्रक्रम की युक्ति से सूची का घनफल $\int_0^{\text{वे}}$ फ(य) ताय यह होगा। अव यदि य अक्ष पर लम्बरूपी धरातल से सूची को काटें

तो स्पष्ट है कि छेदित प्रदेश आधार का सजातीय होगा इस लिये इस प्रदेश का फल = फ(य) = $\frac{य^2 आ}{वे^2}$ इस लिये सूची का घनफल

$$= \int_0^{वे} फ(य) ताय = \int_0^{वे} \frac{य^2 आ}{वे^2} ताय = \frac{आ}{वे^2} \int_0^{वे} य^2 ताय = \frac{आ\ वे}{३}$$

बहुभुज क्षेत्र रूपी आधार के स्थान मे यदि कोई सीमित क्षेत्र हो तब भी यही घनफल आवेगा। इस पर से यह सिद्ध होता है कि आधार पर बेध तुल्य बेध मे जो समखात का घनफल होता है उसके तृतीयांश के तुल्य सूची का घनफल होता है। इसको भी भास्कराचार्य ने अपनी लीलावती के खातव्यवहार में लिखा है (समखातफलत्र्यंशः सूचीखाते फलं भवति) परन्तु इसकी उपपत्ति कहीं नहीं लिखी है।

१६७। कल्पना करो कि $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} - \frac{ल^2}{ग^2} = १$ यह एक आतिपरवलयिक घनक्षेत्र का समीकरण और $\frac{य^2}{अ^2} - \frac{र^2}{क^2} - \frac{ल^2}{ग^2} = ०$ यह एक समसूच्याकार शङ्कु का समीकरण है तो पहले घनक्षेत्र को य अक्ष पर लम्ब और मूल विन्दु से य तुल्य हट कर य अक्ष में लगा हुआ जो धरातल है उस से काटे तो छेदित प्रदेश एक दीर्घवृत्त होगा जिस का फल फ(य) = $\pi\ क\ ग \left[\frac{य^2}{अ^2} + १ \right]$ यह होगा और उसी धरातल से शङ्कु का छेदित प्रदेश भी दीर्घवृत्तही होगा जिसका फल = फा(य) = $\frac{\pi\ क\ ग\ य^2}{अ^2}$ इस लिये दोनों का अन्तर π क ग यह हुआ। इस लिये शङ्कु, आतिपरवलयिक और दो लम्ब रूपी धरातल जो मूल विन्दु से क्रम से $य_1$, $य_2$ तुल्य हट कर य अक्ष मे लगे हैं उनके भीतर का घनफल = $\int_{य_1}^{य_2} \pi\ क\ ग\ ताय$

$= \pi\ क\ ग\ (य_2 - य_1)$

१६८। जिन समानान्तर धरातलों से घनक्षेत्र को काट कर ऊपर के प्रक्रमों में घनफल साधन की युक्ति दिखाई है वे यदि य अक्ष पर लम्ब न हो किन्तु य अक्ष उन से $अ_1$ तुल्य झुका हो तो स्पष्ट है कि $\int$ फ(य) ताय इस

के स्थान मे $\int$ फ(य) ज्याअ$_1$ताय इस को लेने से घनफल का मान आ जायगा।

१६९। १६४वे प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int$ फ (य) ताय इस लिये फ(य) को कल्पना कर लें कि किसी वक्र की कोटि र है तो १३८वें प्रक्रम की युक्ति से तीन समानान्तर वा चार समानान्तर धरातलों से जिन का परस्पर अन्तर = च है छेदित प्रदेश के फलों से आद्यन्त धरातलान्तर्गत घन फल का स्वल्पान्तर से मान $\frac{च}{३}$ (आ$_०$+४ आ$_१$+आ$_२$) वा $\frac{३च}{८}$ { आ$_०$ + आ$_३$ + ३(आ$_१$+आ$_२$) } यह होगा जहाँ र$_०$, र$_१$, इत्यादि के स्थान में आ$_०$, आ$_१$ इत्यादि को रख दिया है।

१७०। १५६वे प्रक्रम से सिद्ध है कि घ = $\int \pi र^2$ ताय परन्तु

$\pi र^2 = \int २ \pi$ र तार इस लिये द्विगुण चलानयन की रीति से घनफल

को $\int\int २ \pi$ र तार ताय = $२\pi \int\int$ र तार ताय इस से प्रकाश कर सकते हैं। ११४वे प्रक्रम के क्षेत्र को यदि य अक्ष के चारो ओर घुमावें तो द ट चतुर्भुज से एक वलय उत्पन्न होगा जिसका घनफल स्वल्पान्तर से $२\pi र \triangle य \triangle र$ यह होगा और एक स्तम्भ मे जितने चतुर्भुज हैं सब से उत्पन्न वलयों के घनफल का योग $\triangle य \int_{फ(य)}^{फा(य)} २\pi$ र तार अर्थात्

$\triangle य \times २\pi \int_{फ(य)}^{फा(य)}$ र तार = $\pi \triangle य [\{फा(य)\}^2 - \{फ(य)\}^2]$ यह होगा

इस लिये काता कत के घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का घनफल

$$= \pi \int_{अगा}^{अचा_1} [\{फा(य)\}^2 - \{फ(य)\}^2] ताय$$

$$= \int_{य_1}^{य_2} \int_{फ(य)}^{फा(य)} २\pi र \; तार \; ताय$$

$$= २\pi \int_{य_1}^{य_2} \int_{फ(य)}^{फा(य)} र \; तार \; ताय$$ यदि अचा = य$_2$, अगा = य$_1$

ऊपर के $\pi \int_{\text{अगा}}^{\text{अचा}_1} [\{ \text{फा(य)} \}^2 - \{ \text{फ(य)} \}^2]$ ताय इस समीकरण मे यदि फा(य) के स्थान मे फ (य) और फ (य) के स्थान मे फा(य) को रख दे तो ठीक १६३वें प्रक्रम का समीकरण हो जायगा।

१७१। यदि जिन वक्रों के क्रम से य = फ(र), य = फा(र) ये समीकरण हैं उन के चाप से और जिन रेखाओ के क्रम से $र = र_1$, $र = र_2$ ये समीकरण हैं उन से बना हुआ क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावे तो ऊपर की युक्ति से उसका घनफल $= 2\pi \int_{र_1}^{र_2} \int_{\text{फा(र)}}^{\text{फ(र)}} र$ ताय तार ऐसा होगा इस का ताय के वश यदि चल बना लो तो

$$घ = 2\pi \int_{र_2}^{र_1} \{ \text{फ(र)} - \text{फा(र)} \} र \, तार$$

१७२। ऊपर के प्रक्रमो की व्याप्ति दिखलाने के लिये ११६वे प्रक्रम का क्षेत्र लो। कल्पना करो कि अलक वक्र क्षेत्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर जो घन क्षेत्र बनाया उसका घनफल जानना है तो स्पष्ट है कि कनल के घूमने से जो अर्द्ध-गोल होगा और अनल के घूमने से जो परवलय संवन्धि घनक्षेत्र होगा उनके घनफलो के अन्तर के समान अभीष्ट घनफल होगा। इन दोनो घनक्षेत्रो का घन-फल पिछले प्रक्रमों से विदित है इसलिये अभीष्टघनक्षेत्र का घनफल भी इन दोनो के अन्तर पर से विदित होगा इसलिये द्विगुण चलानयन से जो इसका घनफल निकलेगा उसकी जॉच अच्छी तरह से इस उदाहरण मे होगी अर्थात् दोनो रीति से फलो का मान एक हो जानेसे मन भर जायगा मानो कि न मूल विन्दु और नक य अक्ष मे धनात्मक मार्ग है तो अल वक्र का समीकरण $र^2 = 4 अ (अ - य)$ और कल का $र^2 = 4 अ^2 - य^2$ यह होगा।

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से अभीष्ट घनफल

$$= \int_0^{2अ} \int_{\frac{4अ^2 - र^2}{4अ}}^{\sqrt{(4 अ^2 - र^2)}} 2\pi र \, ताय \, तार$$

इसी जगह यदि यह इच्छा होकि पहले र के वश से चलानयन करे तो अलक का अफ रेखा से दो विभाग करने से

घ = वृत्त खण्ड का घ फ + परवलय के खण्ड का घ फ

$$= \int_{अ}^{२अ} \int_{०}^{\sqrt{(४अ^2 - य^2)}} २\pi र \, तार \, ताय$$

$$+ \int_{०}^{अ} \int_{\sqrt{(४अ^2 - ४\,अय)}}^{\sqrt{(४अ^2 - य^2)}} २\pi र \, तार \, ताय$$

इसी जगह यदि य अक्ष के चारो ओर घलग के घूमने से जो घनक्षेत्र वने उसका घनफल अपेक्षित हो तो मान लो कि य अक्ष की धनात्मक दिशा नघ की ओर है तब न को मूल विन्दु मानने से लग का समीकरण $र^2 = ४\,अ\,(अ+य)$ और लघ का $र^2 = ४\,अ^2 - य^2$ यह होगा।

इस लिये अपेक्षित घनफल $= \int_{०}^{२अ} \int_{\sqrt{(४अ^2 - य^2)}}^{\sqrt{(४अ^2 + ४अय)}} २\pi र \, तार \, ताय$

इसी स्थान मे यदि पहले य के वश से चल अपेक्षित हो तो लल, रेखा से अभीष्ट क्षेत्र का दो विभाग कर देने से

घ = वृत्तखण्ड का घ फ + परवलयखण्ड का घ फ

$$= \int_{०}^{२\,अ} \int_{\sqrt{(४अ^2 - र^2)}}^{२\,अ} २\pi र \, ताय \, तार$$

$$+ \int_{\frac{र^2 - ४अ^2}{४अ}}^{२\,अ\sqrt{३}} २\pi र \, ताय \, तार$$

१७३। यदि क्षेत्र र अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र वनावे तो य, र को परस्पर वदल देने से ऊपर की युक्ति से सहज मे सिद्ध हो जायगा कि $घ = \int\int २\pi य \, ताय \, तार$।

१७४। किसी घनक्षेत्र के पृष्ठ में एक प विन्दु और इस विन्दु के वहुत ही पास दूसरी व विन्दु लेकर दोनो विन्दुओं में लगा कर यल, रल धरातलों के समानान्तर दो दो धरातलो को वनावो तो घनक्षेत्र के भीतर एक आयत आधार के ऊपर समखात वन जायगा जिस के आधार का भुज य, कोटि र और वेध, ल होगा इस लिये समखात का घनफल $= ल \,\triangle य \,\triangle र$। $\triangle य$, $\triangle र$ को वहुत छोटा मानने से समखात का घनफल = ल तार ताय, इस लिये समग्र घनफल = $\int\int ल \, तार \, ताय$ इस मे पहले यदि $\int ल \, तार$ इस का मान निकालो तो स्पष्ट है

कि यह य अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इसे यदि फ(य) के बराबर मान लो तो समग्र घनफल $= \int$ फ(य) ताय यही १६४वें प्रक्रम से भी सिद्ध हुआ है ।

इसी मे यदि पहले $\int$ ल ताय इस का मान निकालो तो यह र अक्ष पर लम्ब रूप धरातल जो होगा उस से छेदित प्रदेश का फल होगा इस लिये इस को यदि फ(र) कहो तो ऊपर की युक्ति से समग्र घनफल $= \int$ फ(र) तार । सर्वत्र सीमाओ का विचार कर घनफल निकालना चाहिये ।

१७५। दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र का अष्टमांश घनफल (जिस के पृष्ठ का समीकरण $\frac{य^२}{अ^२} + \frac{र^२}{क^२} + \frac{ल^२}{ग^२} = १$ यह है) जानना हो तो यहाँ

$$ल = ग\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}$$

इस लिये $घ = ग\int\int\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}\,तार\,ताय$

यहाँ पहले $\int\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}\,तार = क\int\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)}\frac{तार}{क}$

$$= क\left\{\frac{र}{२क}\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२} - \frac{र^२}{क^२}\right)} + \frac{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)}{२}\,ज्या^{-१}\frac{र}{क\sqrt{\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)}}\right\}$$

इस में $र = ०$ और $र = क\sqrt{१ - \frac{य^२}{अ^२}}$ के भीतर का चल

$= \frac{\pi क}{४}\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)$ । इस लिये $घ = \int\frac{\pi\,क\,ग}{४}\left(१ - \frac{य^२}{अ^२}\right)ताय$

$= \frac{\pi\,क\,ग}{४}\left[य - \frac{य^३}{३अ^२}\right]$ ० और अ के बीच य के मान मे समग्र का $\frac{१}{८}$ घन फल $= \frac{\pi\,क\,ग}{४}\left(अ - \frac{अ^३}{३अ^२}\right) = \frac{\pi\,क\,ग}{४}\,\frac{२अ}{३} = \frac{\pi\,अ\,क\,ग}{६}$ इस को ८ से गुण देने से सम्पूर्ण घनफल $= \frac{४\pi\,अकग}{३}$ । यही १८५वे प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है ।

१७६। जिसके पृष्ठ का समीकरण य र = अल है उस से यर धरातल से और जिन चारो धरातलों का क्रम से $य = य_१$, $य = य_२$, $र = र_१$, $र = र_२$ ये समीकरण हैं उन से बने हुए घनक्षेत्र का घनफल जानना है ।

यहाँ १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$घ = \frac{य_2}{य_1}\int_{र_1}^{र_2} \frac{यर}{अ} \text{ तार ताय} = \frac{1}{2अ}\int_{य_1}^{य_2} (र_2^2 - र_1^2) य \text{ ताय}$$

$$= \frac{1}{4अ}(र_2^2 - र_1^2)(य_2^2 - य_1^2)$$

$$= \frac{1}{4अ}(य_2 - य_1)(र_2 - र_1)\{य_1र_1 + य_2र_2 + य_1र_2 + य_2र_1\}$$

$$= \frac{1}{4}(य_2 - य_1)(र_2 - र_1)(ल_1 + ल_2 + ल_3 + ल_4)$$

जहाँ $ल_1$, $ल_2$, $ल_3$, $ल_4$ ये चारो कोनो के क्रम से शङ्कु हैं

यहाँ पर यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर सर्वत्र यर धन है।

१७७। जिस धरातल का समीकरण ल = ०, वृत्त का $(य-च)^2 + (र-ज)^2 = ग^2$ और घन के पृष्ठ का य र = अ ल यह है उन से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना है।

यहाँ वृत्त के समीकरण से र की सीमा $ज - \sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}}$ और $ज + \sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}}$ ये होंगी इस लिये १७४वें प्रक्रम की युक्ति से

$$घ = \int\int \frac{य र}{अ} \text{तार ताय} = \frac{1}{अ}\int\int यर \text{ तार ताय}$$

$$= \frac{2 ज}{अ}\int य\sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}} \text{ ताय}$$

जहाँ य की सीमा च—ग, च + ग, ये हैं

और $\frac{2 ज}{अ}\int य\sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}} \text{ ताय} = \int (य-च)\sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}} \text{ताय}$ $+ च \int \sqrt{\{ग^2 - (य-च)^2\}}$ ताय यदि य—च = त तो ऊपर का घनफल

$$= \frac{2 ज}{अ}\int त\sqrt{\{ग^2 - त^2\}} \text{ तात} + च \int\sqrt{\{ग^2 - त^2\}} \text{तात}$$

यहाँ त की सीमा —ग, + ग है इस लिये सीमाओं के भीतर ऊपर के चल का मान निकालने से अभीष्ट घनफल $= \frac{ज च ग^2 \pi}{अ}$,

यहाँ भी यह मान लिया गया है कि सीमाओं के भीतर यर धन है अर्थात् $(य-च)^2 + (र-ज)^2 = ग^2$ इस वृत्त का सब भाग प्रथम वा तृतीय पद में है ऐसा समझ कर तब ऊपर का घनफल निकाला गया है।

१७८। यदि घनक्षेत्र को ऐसे धरातलों से काटें जिस में शङ्कु मूल के

अक्षीय समीकरण के वश श्रुताश्रुताप यह आधार का फल हो तो समखात का फल लश्रुताश्रुताप यह होगा इस लिये घ = $\int$ लश्रुताश्रुताप । यहाँ श्रु^{2} = य^2 + र^2

जैसे जिस धरातल का ल = ०, और दो पृष्ठों का य^2 + र^2 = ४ अ ल,

र^2 = २ गय—य^2 ये समीकरण हैं उन से बने घनक्षेत्र का फल जानना है तो यहाँ $\frac{\text{श्रु}^2}{\text{४अ}}$ = ल और श्रु, प की ऐसी सीमा होगी जिस में चल का फैलाव र^2 = २ गय − य^2 इस वृत्त के संपूर्ण फल तक हो तो यहां श्रु$_1$ = २ ग कोज्याप ऐसा मानने से अभीष्ट घनफल

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{\text{श्रु}_1} \frac{\text{श्रु}^3}{\text{४अ}} \text{ ताश्रु ताय} = \frac{\text{ग}^4}{\text{अ}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^4\text{पताप}$$

$$= \frac{\text{२ ग}^4}{\text{अ}} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi \text{ ग}^4}{\text{८ अ}} \text{(खण्डचलानयन से)}$$

१७९। जिस पृष्ठ का ल = अ इ$^{-\frac{\text{य}^2 + \text{र}^2}{\text{ग}^2}}$ = अइ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ यह समीकरण है उस से और यर अक्ष से बने घनक्षेत्र का घनफल जानना हो तो यहाँ पृष्ठ के समीकरण से स्पष्ट है कि मूल विन्दु से चारो ओर अनन्त दूर तक पृष्ठ फैला हुआ है इस लिये य की सीमा ०, और २ π होगी

और श्रु की ०, और ∞ होगी इस लिये घ = $\int\int$ अ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ श्रुताश्रुताप

इस मे $\int$ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ श्रुताश्रु इस का मान = $-\frac{\text{इ}^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}}{2}$ ग^2 यह होगा

इस लिये $\int_0^{\infty}$ इ$^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}}$ श्रताश्रु = $\frac{\text{ग}^2}{2}$ और तब अभीष्ट घनफल का प्रमाण

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \int \text{अ इ}^{-\frac{\text{श्रु}^2}{\text{ग}^2}} \text{ श्रुताश्रुताप} = \text{अ} \int_0^{2\pi} \frac{\text{ग}^2}{2} \text{ ताय} = \frac{2\pi\text{अग}^2}{2} = \pi\text{अग}^2$$

१८०। १७४वे प्रक्रम मे जो समखात का फल लतायतार यह निकाला है उसको ल अक्ष पर लम्ब जो धरातल है उन से अनन्त विभाग कर डाले तो एक

विभाग वा समखात घनफल की तात्कालिकी गति = ताल तार ताय यह होगी इस लिये घनक्षेत्र के घनफल का मान त्रिगुण चलानयन की रीति से

$\int\int\int$ ताल तार ताय यह होगा।

१८१। जिस नलक का $य^2 + र^2 - २ अ य = ०$ यह समीकरण है उसके यदि उस खण्ड का घनफल जानना चाहते हो जो कि ल = य स्पअ$_1$, ल = यस्पक$_1$ इन धरातलों से नलक के कटने से उत्पन्न हुआ है तो यहाँ नलक के समीकरण से $र^2 = २ अ य - य^2 = र_1^2$ ∴ $र_1 = \sqrt{(२ अ य - य^2)}$

$$\text{अब १८० प्रक्रम की युक्ति से } घ = \int_0^{२अ}\int_{-र_1}^{र_1}\int_{य स्प अ_1}^{य स्प क_1} \text{तालतारताय}$$

$$= \int_0^{२अ}\int_{-र_1}^{र_1} (\text{यस्पक}_1 - \text{यस्पअ}_1)\text{तार ताय}$$

$$= \int_0^{२अ}(\text{स्पक}_1 - \text{स्पअ}_1)\ २य\sqrt{(२अय - य^2)}\text{ताय}$$

$$= २(\text{स्पक}_1 - \text{स्पअ}_1)\frac{\pi\ अ^2}{२}\text{।}$$

१८२। १७८वे प्रक्रम मे समखात का आधार जिस का फल, $\int\int$ श्रुताश्रुताप यह है उसे मान लो कि यर के धरातल मे है अब इस आधार को स्थिररेखा अर्थात् य अक्ष के चारो ओर घुमाओ तो स्पष्ट है कि इस आधार के घूमने से एक घनवलय होगा जिसका घनफल = २ π र श्रुताश्रुताप = २π श्रुज्याप श्रुताश्रुताप यह होगा और पूरा फेरा करने में आधार का धरातल यर धरातल से २π कोण उत्पन्न करेगा इस लिये बहुत पास पास के दो स्थानों मे आधार के धरातल के आने मे यर धरातल से उत्पन्न कोण का मान क्रम से $प_1$, $प_1$ + ताप$_1$ मानो तो घनवलय के घनफल का परमाल्प विभाग वा तात्कालिकी गति

= ताप$_1$ श्रुज्यापश्रुताश्रुताप = $श्रु^2$ज्यापताश्रुतापताप$_1$ इस लिये उचित सीमाओं के वश से सम्पूर्ण घनक्षेत्र का घनफल घ = $\int\int\int$ $श्रु^2$ज्याप ताश्रुतापताप$_1$

जैसे जिस गोल का व्यासार्द्ध अ है उसके अष्टमांश का घनफल जानना है तो पहले $\int श्रु^2\ ताश्रु = \frac{श्रु^3}{३}$ इस में ०, और अ के बीच श्रु के मान

में चल = $\frac{अ^3}{3}$

तव $घ = \int\int \frac{अ^3}{3}$ ज्यापतापताप$_1$

इस तरह से पहले र के वश चल ले आने से श्रु^{2}ज्याप श्रु प प$_1$ इन सव अवयवो का योग जो कि एक सूची के (जिसके आधार का फल = अ^{2}ज्याप प प$_1$ और वे = अ) समान है आया।

फिर प के वश चल ज्ञान करने से

$\int$ ज्याप ताप = — कोज्याप,

यहाँ प की सीमा ० और $\frac{\pi}{2}$ मानने से

$घ = \int \frac{अ^3}{3}$ ताप$_1$

इस तरह यहाँ प के वश चलानयन से $\frac{अ^3}{3}$ ज्याप △प △ प$_1$ इस चाल को प, और प + प$_1$ के भीतर जितनी सूचियाँ हैं उनका योग आया।

फिर सव के पीछे प$_1$ के वश से चल ज्ञान करने से और प$_1$ की सीमा ० और $\frac{\pi}{2}$ मानने से गोल के अष्टमांश घनफल का मान = घ = $\frac{\pi अ^3}{6}$

१८३। एक समसूच्याकार शङ्कु का शिरःस्थान एक गोल के पृष्ठ पर है और शिरःस्थान से गोलगर्भ तक जो रेखा गई है वही शङ्कु का अक्ष है। गोल का व्यासार्द्ध अ और शङ्कु का शिरःकोणार्द्ध अ$_1$ है तो शङ्कु के आधार के गोल के पृष्ठ मे लगने से शङ्कु पृष्ठ और गोल पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल जानना हो तो शङ्कु के शिरःस्थान को मूलविन्दु मानने से गोल-पृष्ठ का अक्षीयसमीकरण

श्रु = २अकोज्याप यह होगा। इस लिये अभीष्ट

$$घनफल = \int_0^{2\pi}\int_0^{अ_1}\int_0^{२अकोज्याप} श्रु^2 ज्यापताश्रुतापताप_1$$

१८४। इसी प्रकार श्रु = अ(१ + कोज्याप) इस वक्र के स्थिर रेखा के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका घनफल।

$$घ = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{अ(१ + कोज्याप)} श्रु^2 ज्यापताश्रुतापताप_1$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\text{अ}(१+\text{कोज्याष})} \text{श्रु}^2\text{ज्याष ताश्रुताष}_1 \text{ ताष} \quad (\text{६३वें प्रक्रम से})$$

$$= \frac{2\pi\,\text{अ}^3}{3}\int_0^{\pi}(१+\text{कोज्याष})^3 \text{ ज्याषताष}$$ इसका मान १२वें प्रक्रम के १५वें

उदाहरण से वा खण्डचलानयन से $\frac{\pi\, ८\, \text{अ}^3}{३}$ यह होगा ।

१८५। जिन दो घनक्षेत्रों के पृष्ठ का समीकरण (१) $\text{फ}\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}, \frac{\text{र}}{\text{क}}, \frac{\text{ल}}{\text{ग}}\right) = 0$

(२) फ(य, र, ल) = ० ये हों तो यदि

$\frac{\text{य}}{\text{अ}} = \text{य}', \frac{\text{र}}{\text{क}} = \text{र}', \frac{\text{ल}}{\text{ग}} = \text{ल}'$ तो

$\text{लतायतार} = \text{अकग ल}'\ \text{ताय}'\ \text{तार}'$

इस लिये १७४वें प्रक्रम से

$$(१) \text{ का घ} = \iint \text{लतायतार} = \iint \text{अकगल}'\text{ताय}'\text{तार}' = \text{अलक} \times (२) \text{काघ।}$$

जैसे दैर्घवृत्तीय घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण $\frac{\text{अ}^2\text{य}^2}{\text{अ}^2} + \frac{\text{अ}^2\text{र}^2}{\text{क}^2} + \frac{\text{अ}^2\text{ल}^2}{\text{ग}^2} - \text{अ}^2 = 0$

और गोल का $\text{य}^2 + \text{र}^2 + \text{ल}^2 - \text{अ}^2 = 0$ यह है इस लिये

दैर्घवृत्तीयघनक्षेत्र का घनफल $= \frac{\text{अकग} \times}{\text{अअअ}}$ गोल का घनफल

$= \frac{४\pi\text{अ}^3 \times \text{अकग}}{३ \times \text{अ}^3} = \frac{४\pi\text{अकग}}{३}$ यही १६५वें प्रक्रम में भी सिद्ध हुआ है ।

इस प्रकार से ऊपर कहे हुए सिद्धान्तों से सैकड़ों नये सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं जिन के बल से बड़े बड़े कठिन प्रश्नों का उत्तर सहज मे निकल सकता है । विद्यार्थियो को चाहिये कि जिस प्रश्न में जिस सिद्धान्त से सहज में उत्तर निकलने की आशा पाई जाय उसका उत्तर बड़ी सावधानी से उसी सिद्धान्त से निकालें । उत्तर निकालने में सीमाओं का विचार बड़ी सावधानी से करना चाहिये क्योंकि सीमा ही से तो क्षेत्र बँधा है और जब सीमा ही बिगड़ गई तो क्षेत्र ही दूसरा हो गया इस लिये जिस का फल अपेक्षित है उस का फल सीमाओं के बिगड़ जाने से कथमपि न निकलेगा । जहाँ कही सीमाओं मे संशय जान पड़े वहाँ वक्र क्षेत्र की आकृति बनाकर सीमाओं का ज्ञान कर लो ।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

१। जिस वक्र का $यर = अ^{२}$ यह समीकरण है उसके चाप के य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या पृष्टफल होगा ।

२। $र = \frac{क}{अ} इ^{\frac{य}{ग}}$ यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका पृष्टफल क्या होगा ।

३। चक्रालद यदि शिरःस्थानगतस्पर्शरेखा के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्टफल क्या होगा ।

उ० $\frac{३२\pi क^{२}}{३}$

४। यदि चक्रालद अपने आधार के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो उसका सम्पूर्ण पृष्टफल क्या होगा । उ० $\frac{६४\pi क^{२}}{३}$

५। त्रीतर (Tractory) य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका सम्पूर्ण पृष्टफल बतावो (९१वाँ प्रक्रम देखो) उ० $४\pi ग^{२}$

६। एक गोल को दो तुल्य समतलपरिधि रूप शङ्कु से (जो कि गर्भक्षितिज पर लम्ब है और जिन के आधार वृत्त का व्यास गोल के व्यासार्द्ध तुल्य है और जिन के अक्ष गोल के उन व्यसार्द्धों का सम द्विभाग करते हैं जिनके योग से गर्भक्षितिज का व्यास बनता है) आर पार छेद डाला तो अवशिष्ट गोल के भाग का पृष्टफल क्या होगा ।

उ० अवशिष्ट भाग का पृष्टफल गोल व्यास के वर्ग का दूना होगा (१५२ प्रक्रम का (१) उदाहरण देखो। सीमा का विचार अच्छी तरह से करलो)

७। जिस वक्र का $र = अ \pm अ\ ला \frac{य}{अ}$ यह समीकरण है वह यदि य अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र बनावे तो $य = अ$, $य = अक$ इस के भीतर के खण्ड का क्या पृष्टफल होगा ।

$$उ०\ ४\pi अ^{२} \left\{ \sqrt{(१ + क^{२})} - \sqrt{२} + ला \frac{क(१ + \sqrt{२})}{१ + \sqrt{(१ + क^{२})}} \right\}$$

८। जिस वक्र के समीकरण पर से $र\ ताय = -(अ^{२} - र^{२})^{\frac{१}{२}} रतार$ ऐसा सिद्ध हो य अक्ष के चारो ओर उसके घूमने से जो घनक्षेत्र होगा उस का सम्पूर्ण पृष्टफल क्या होगा । उ० $२\pi अ^{२}$ ।

९। एक गोल को एक समतलमस्तकपरिधि रूप शङ्कु से छेद डाला तो छेदित प्रदेश का क्या पृष्ठफल होगा। इस प्रश्न में इतना जानते हैं कि गोल की परिधि से शङ्कु की आधार परिधि आधी है और शङ्कु का एक पृष्ठसूत्र गोलगर्भ मे होकर जाता है।

उत्तर, यदि गोल का व्यासार्द्ध = अ तो अभीष्ट पृष्ठफल $= २\pi अ^{२} - ४अ^{२}$।

१०। एक गोल जिसका व्यासार्द्ध १५ हाथ है उन दो समानान्तर धरातलों से काटा गया केन्द्र से जिनका अन्तर क्रम से ३, ७ हाथ हैं तो धरातलों के बीच में जो गोलखण्ड है उसका पृष्ठफल क्या होगा।

उ० ३७६·९९०८ वर्ग हस्त।

११। पृथ्वी के पृष्ठ से कितनी ऊँचाई पर पृथ्वी के पृष्ठ भाग की तिहाई देख पड़ेगी। उ० पृथ्वी के व्यास के समान ऊँचाई पर।

१२। एक समसूच्याकार शङ्कु के भीतर एक गोल बना हुआ है गोल का व्यासार्द्ध त्रि और गोल के केन्द्र और शङ्क्वग्र का अन्तर (अ) है तो शङ्कु और गोल के पृष्ठफलो में क्या सम्बन्ध होगा। उ० $स = \frac{अ^{२} - त्रि^{२}}{४अ\,त्रि}$

१३। अ, क गोल के व्यासार्द्ध क्रम से ३ और ४ हाथ हैं इन के पृष्ठफल के योग के समान ग गोल का पृष्ठफल है तो बतावो कि ग गोल का क्या व्यासार्द्ध होगा। उ० ५ हाथ

१४। यदि एक त्रिभुज जो कि थ अक्ष के एकही ओर है य अक्ष के चारो ओर घूमने से घनक्षेत्र बनावे तो उसका पृष्ठफल कैसे निकालोगे। हर एक भुज को बढ़ाकर य अक्ष से मिला दो तो त्रिभुज के घूमने से वर्धित भुज भी घूमकर समसूची बनावेंगे फिर इन सूचियो के पृष्ठसूत्रों की सीमा तीनों भुज क्रम से कल्पना कर सूची खण्ड के पृष्ठफलों के योग से अभीष्ट पृष्ठफल जानलो।

१५। दो समानान्तर धरातलों के काटने से एक गोल खण्ड ऐसा उत्पन्न हुआ कि उसके मुखपरिधि का व्यासार्द्ध (अ) आधार परिधि का व्यासार्द्ध (क) और गोलखण्ड की ऊँचाई (उ) ठीक ठहरी तो उस गोलखण्ड का समग्र पृष्ठफल क्या होगा।

$$उ० \left[\pi\left\{२उ\sqrt{अ^{२} + \left\{\frac{क^{२} - अ^{२} + उ^{२}}{२उ}\right\}^{२}} + क^{२} + अ^{२}\right]$$

१६। $र = अ^२ (क + य)$ यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घन क्षेत्र वनाता है उसका घनफल सिद्ध करो कि

$$\frac{\pi अ^२ (क + य)^३}{६} + स्थि \text{ यह होगा}$$

१७। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $र^२ (य - अ क) = अ_१ य (य - गक)$ यह वक्र घनक्षेत्र वनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_२ - घ_१ = \pi अ_१ \left\{ \frac{य_२^२ - य_१^२}{२} + क(अ-ग)(य_२ - य_१) + अक^२(अ-ग) ला \frac{य_२ - अक}{य_१ - अक} \right\}$$

१८। य अक्ष के चारो ओर घूमकर यदि $र^२ = \frac{अय(य-३अ)}{य-४अ}$ यह अक्ष घन-क्षेत्र वनावे तो ० और ३अ, य के मान मे क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi अ^३}{२}$ (१५—१६ ला २)

१९। शिरः स्थानगत स्पर्श रेखा के चारो ओर घूमकर चक्रालद जो घनक्षेत्र वनाता है उसका क्या घनफल होगा उ० $\pi^२ अ^३$ ।

२०। यदि आधार के चारो ओर चक्रालद घूमे तो क्या घनफल होगा।

उ० $५\pi अ^३$

२१। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $र^२ = \frac{य^३}{२अ - य}$ यह वक्र वनाता है उसका घनफल क्या होगा। उ० $२\pi^२ अ^३$

२२। अपने असीमपथ के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $र^२ = \frac{४ अ^२ (२ अ - य)}{य}$ यह वक्र वनाता है उसका घनफल क्या होगा।

उ० $४\pi^२ अ^३$ ।

२३। जिस वक्र का $(र - क^२)^२ = १६अ^३ य$ यह समीकरण है वह र अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र वनाता है उस मे चारो ओर से घिरा हुआ जो भाग है उस का घनफल क्या होगा। उ० $\frac{\pi क^९}{३१५अ^६}$

२४। जिस गोलखण्ड मे मुखव्यासार्द्ध ($र_१$) आधार व्यासार्द्ध ($र_२$) ऊँचाई (वे) उसका घनफल क्या होगा। उ० $\frac{\pi वे}{६} \left\{ वे^२ + ३ (र_१^२ + र_२^२) \right\}$

२५। जिस वक्र का $र^२ = २ मय + नय^२$ यह समीकरण है वह यदि य अक्ष के चारो ओर घूमकर घनक्षेत्र वनावे तो सिद्ध करो कि

$$घ_२—घ_१ = \frac{\pi(य_२—य_१)}{२}\left\{र_२^२+र_१^२—\frac{१}{३}(य_२—य_१)^२\right\}$$

२५। एक समसूची (जिस का शिरःकोण ६०° है) के भीतर एक गोल है जो कि सूची के आधार और पृष्ठसूत्रों को स्पर्श करता है। यदि गोल का व्यासार्द्ध (त्रि) हो तो गोल और सूची से बने घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi त्रि^३}{६}$

२६। य अक्ष के चारो ओर घूमने से जो घनक्षेत्र $श्रु^४ = अ^२(य^२—र^२)$ यह वक्र बनाता है उस का क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi अ^३}{२}\left\{\frac{१}{\sqrt{२}} ला(१+\sqrt{२})—\frac{१}{३}\right\}$

२७। जिस वक्र में $श्रु^४ = अ^२य^२+क^२र^२$ हैं वह य अक्ष के चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उस का घनफल निकालो।
इस में अ > क समझो।

उ० $\frac{\pi}{६}(२ अ^२+३ क^२)अ + \frac{\pi क^४}{२\sqrt{(अ^२-क^२)}} ला \frac{अ+\sqrt{(अ^२—क^२)}}{क}$

२८। २७ वें प्रश्न में यदि अ = क तो घनक्षेत्र का क्या फल होगा।

उ० $\frac{४ \pi अ^३}{३}$।

२९। २७ वें प्रश्न का वक्र यदि र अक्ष के चारो ओर घूमे तो घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा।

उ० $\frac{\pi}{६}(२क^२+३अ^२)क + \frac{\pi अ^४}{२\sqrt{(अ^२—क)}} ज्या^{-१}\frac{\sqrt{अ^२—क^२}}{अ}$

३०। जिस के पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^२}+\frac{र^२}{क^२}+\frac{ल^४}{ग^४}=१$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{८\pi अकग}{५}$

३१। जिसके पृष्ट का $\frac{य^२}{अ^२}+\frac{र^२}{क^२} = २ ल$ यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें ल = ग) से काटे तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० $\pi अ क ग^२$

३२। जिस के पृष्ठ का $\frac{य^२}{अ^२}+\frac{र^२}{क^२}=\frac{२ ल}{ग}-\frac{ल^२}{ग^२}$ यह समीकरण है उसे

यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल (जिसमें ल = च) से काटे तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा।

$$\text{उ०}\quad \pi \text{ अ क} \left\{ \frac{\text{च}^2}{\text{ग}} - \frac{\text{च}^3}{3\text{ग}^2} \right\}$$

३३। जिसके पृष्ठ का $\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\text{र}}{\text{क}}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\frac{\text{ल}}{\text{ग}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1$ यह समीकरण है उसका प्रथम पद में जो खण्ड है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\text{अकग}}{90}$

३४। जिस के पृष्ठ का $\left(\frac{\text{य}}{\text{अ}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\text{र}}{\text{क}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\text{ल}}{\text{ग}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{4\,\pi\,\text{अ क ग}}{35}$

३५। जिसके पृष्ठ का $(\text{य}^2 + \text{र}^2 + \text{ल}^2)^3 = 27\text{अ}^3\text{यरल}$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा। उ० $\frac{\text{०अ}^3}{2}$

(१८२ प्रक्रम देखो और श्रु का परमाधिक मान समीकरण को अभीष्ट समीकरण मे बदल $\frac{3\text{अ}}{2\sqrt[3]{2}}$ यह जान लो)

३६। जिस त्रिभुज के तीनों भुज क्रम से अ, क, ग है वह यदि ग भुज के चारो ओर घूमकर एक घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा।

$$\text{यदि स} = \frac{\text{अ}+\text{क}+\text{ग}}{2} \text{ तो घनफल} = \frac{4\pi}{3}\quad \frac{\text{स(स}-\text{अ)(स}-\text{क)(स}-\text{ग)}}{\text{ग}}$$

३७। जिसके पृष्ठ का $\text{ल}^{\text{न}} = \text{अय}^2 + \text{कर}^2$ यह समीकरण है उसे यदि यर धरातल के समानान्तर धरातल से काटे (जिस धरातल में $\text{ल} = \text{ल}_1$) तो कटे खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi\text{ल}_1^{\text{न}+1}}{(\text{न}+1)\sqrt{\text{अक}}}$

३८। जिस वृत्त का व्यासार्द्ध अ है उस मे एक पूर्णज्या केन्द्र से ग दूरी पर है इस के ऊपर का चाप इस पूर्णज्या के चारो ओर घूमकर यदि घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा। चाप को समझो कि परिधि के आधे से छोटा है और $\text{कोज्याप}_1 = \frac{\text{ग}}{\text{अ}}$। प_1 = कोण का चापीयमान।

$$\text{उ०}\quad \text{अभीष्ट घनफल} = 2\pi\text{ अ}\left\{ \frac{(2\text{अ}^2 + \text{ग}^2)\text{ज्याप}_1}{3} - \text{गप}_1 \right\}$$

३९। य अक्ष पर जो पूर्णज्या (ग) लम्ब है उसके चारो ओर घूमकर यदि परवलय का चाप घनक्षेत्र बनावे तो उसका क्या घनफल होगा।

उ० यदि पूर्णज्या के आधे पर जो लम्ब खड़ा हो वह जहाँ परवलय के चाप में लगे उसका मान पूर्णज्यार्द्ध विन्दु से क मानो तो घनफल = $\frac{८\pi \text{क}^2 \text{ग}}{१५}$

४० एक गोल जिसका व्यासार्द्ध (अ) है एक धरातल से जो गोल गर्भ से द दूरी पर है काटा गया है। काटने से जो गोल में एक वृत्त बना उसे आधार मान दो समसूची बनाया जिसके वेध क्रम से, अ + द, अ − द है तो दोनों के घनफलो का क्या अन्तर होगा। उ० $\frac{2\pi \text{द}}{3}(\text{अ}^2 - \text{द}^2)$

४१। एक परवलय के य अक्ष पर केन्द्र कल्पना कर एक वृत्त बनाया तो यह वृत्त परवलय की एक शाखा मे दो जगह जहाँ पर लगा उनके कोटियो का लम्ब रूपी अन्तर क ठहरा और यह वृत्त य अक्ष को दो जगह जहाँ काटा वे दोनों विन्दु परवलय के भीतर हैं। अब यदि परवलय और वृत्त दोनो साथही य अक्ष के चारो ओर घूमें तो परवलय और वृत्त के सम्पातान्तर्गत परवलय चाप, और वृत्तचाप के वश से एक घनक्षेत्र होगा। बतावो इसके घनफल का क्या मान होगा। उ० $\frac{\pi \text{क}^3}{६}$

४२। जिस गोल का व्यासार्द्ध (अ) है उसे गोल गर्भ से (ग) अन्तर पर जो धरातल है उससे काट डाला। काटने से जो गोलार्द्ध से अल्प खण्ड है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi}{3}(\text{अ} - \text{ग})^2 (२\text{अ} + \text{ग})$

४३। परवलय का $\text{र}^2 = ४ \text{अय}$ यह समीकरण है। य अक्ष मे केन्द्र कल्पना कर परवलय के विन्दु का भु = ३ अ है उसे स्पर्श करते हुए एक वृत्तार्द्ध बनाया जिसके केन्द्र का अन्तर परवलय के शिरःस्थान से (४ अ) दूरी पर भुज की ओर है। यदि परवलय और वृत्तार्द्ध दोनो साथही य अक्ष के चारो ओर घूम कर घनक्षेत्र बनावें तो गोलपृष्ठ और परवलय सम्बन्धी पृष्ठ के भीतर का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{१४}{3} \text{अ}^3 \pi$

४४। लघुव्यासाग्र पर जो दीर्घवृत्त में स्पर्शरेखा है दीर्घवृत्त के परिधि का चतुर्थांश उसके चारो ओर घूमकर जो घनक्षेत्र बनाता है उसका क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi \text{अ} \text{क}^2}{६}(१० - ३\pi)$

(जहाँ लघुव्यासार्द्ध = क, बृहद्व्यासार्द्ध = अ)

४५। एक गोले के नीचे ऊपर छेद कर उसके भीतर एक चोंगे को रख दिया तो यह चोंगा उसके भीतर चौचक बैठ गया यदि चोगे की ऊँचाई (ग) हो तो चोगे के पृष्ठ और गोल के पृष्ठ के भीतर जो घनक्षेत्र होगा उसका क्या घन-फल होगा। उ० $\frac{\pi ग^3}{६}$

४६। किसी घनक्षेत्र मे पृष्ठ के प विन्दु का मूल विन्दु से अन्तर श्रु हो और प विन्दुगत स्पर्शधरातल पर मूलविन्दु से लम्ब = श्रुकोज्याप और पृष्ठफल की तात्कालिकी गति = तापृ तो सिद्ध करो कि

$$घ = \frac{१}{३}\int श्रु कोज्याप तापृ$$

४७। जिस सूची के खण्ड में मुख परिधि का व्यासार्द्ध ($त्रि_१$) आधार-परिधि का व्यासार्द्ध ($त्रि_२$) और ऊँचाई (वे) है उस का घनफल क्या होगा।

उ० $\frac{\pi वे}{३}(त्रि_१^२ + त्रि_१ त्रि_२ + त्रि_२^२)$

४८। समसूचियो का पृष्ठसूत्र (ग) स्थिर है। जिसका सब से अधिक घन-फल है उसके शिरःकोण का क्या प्रमाण होगा। उ० $कोज्या^{-१}\frac{१}{\sqrt{3}}$

४९। एक समतलमस्तकपरिधिरूप शङ्कु के एक पृष्ठसूत्र को अक्ष मान एक समसूच्याकार शङ्कु बनाया। यदि दोनो शङ्कुओ का आधार (अ) और वेध (अ × उ) हो तो पहले शङ्कु से सूची के जो दो खण्ड होगे उनके पृष्ठफल और घनफल क्या होगे। उ० क्रम से खण्डो के

$$पृष्ठफल, \frac{४\pi\sqrt{(१+इ^२)} - ३\sqrt{(३+३इ^२)}}{६}अ^२, \frac{२\pi\sqrt{(१+इ^२)} + ३\sqrt{(३+३इ^२)}}{६}अ^२$$

$$और\ घनफल\ \frac{८\pi + २७\sqrt{३} - ६४}{१८}इअ^३, \frac{६४ - २७\sqrt{३} - २\pi}{१८}इअ^३,$$

५०। जिसके पृष्ठ का $ल^२ + \frac{अ^२र^२}{य^२} - ग^२ = ०$ यह समीकरण है उसे उन दो धरातलो से जिन मे य = ०, य = अ है काटा तो दो धरातलो के अन्तर्गत खण्ड का क्या घनफल होगा। उ० $\frac{\pi अ ग^२}{२}$

५१। $य^2 + र^2 = गल$, $य^2 + र^2 = अय$, और $ल = ०$ इन तीनों पृष्ठों के अन्तर्गत घनक्षेत्र का क्या घनफल होगा । उ० $\frac{३\pi अ^४}{३२}$

(१७८वाँ प्रक्रम देखो)

५२। जिस पृष्ठ का $\frac{य^2}{अ^४} + \frac{र^2}{क^४} + \frac{ल^2}{ग^४} = १$ यह समीकरण है उसका सम्पूर्ण घनफल क्या होगा । उ० $\frac{४\pi अ^2 क^2 ग^2}{३}$

(१८५वाँ प्रक्रम देखो)

५३। एक पुजारी ने ठाकुर जी के सामने जलती धूपवत्ती खोंसने के लिये मट्टी की एक समसूची वना रक्खी थी । एक दिन एक धनी ठाकुर जी के दर्शन के लिये आया और चलती वेर उस समसूची के शिरे से आधार तक एक सूत से नापकर कहा कि देखो यह १० अङ्गुल का सूत हुआ इसे मैं याद रखने के लिये जेव में रख लेता हूँ तुम इस सूची को खूव खोखली कर किसी दिन मेरी कोठी मे आवो तो मैं उसे सोने से भर दूँगा । प्रातःकाल पुजारी ने एक ज्यौतिषी से आकर निवेदन किया कि महाराज आप एक मट्टी की खोखली समसूची ऐसी वना दीजिये जिसके शिरे से आधार तक सर्वत्र दश अङ्गुल रहे और भीतर सोना भरने के लिये जगह भी खूव खुलासा रहे । ज्यौतिषी ने गणित द्वारा उसके आधार परिधि का मान निकाल पुजारी को वता दिया कि इसी परिधि पर दश अङ्गुल पृष्ठ सूत्र से किसी कोहार के द्वारा समसूची को वनालो । वतावो ज्यौतिषी ने आधार परिधि का क्या मान वतलाया था । उ० यदि व्यास परिधि का सम्वन्ध $\frac{२२}{७}$ हो तो आधार परिधि $= \frac{४४}{७}\sqrt{\frac{२००}{३}} = ५१ २९$

इति अष्टमाध्याय ।



अथ नवमाध्याय।

सान्तचलानयन।

१८६। जिस तात्कालिक सम्बन्ध का साधारण रीति से अनन्त चल का ज्ञान हो जाता है उस मे दोनो सीमाओ का उत्थापन देने से उस के सान्तचल का भी ज्ञान हो जाता है। इस लिये सान्तचल का मूल अनन्तचल ही ठहरा तथापि बहुत से स्थानो मे अनन्तचल का रूप विना बनाये लाघव से सान्तचल का मान आ जाता है जैसा कि ५७वे प्रक्रम में कुछ उदाहरण दिखा आये है और बहुत से स्थानो मे जहॉ अनन्तचल का मान ठीक ठीक नही जान सकते वहॉ भी इस सान्तचल के नियम से अनेक चमत्कृत सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं इस लिये इस अध्याय मे कुछ सान्तचलानयन के प्रकार लिखे जाते हैं।

आज तक जितने सान्तचलो का ज्ञान हुआ है D Bierens de Haan ने सब को एकट्ठा कर के सान्तचलसारणी Tables d' Integrales Definies के नाम से छपवा दिया है। जिन को इच्छा हो उसे देखे हम यहॉ पर कुछ रीतियो को दिखलाते है।

१८७। $\int_{0}^{\pi}$ ज्या मय ज्यानय ताय इस का मान जानना चाहते है। जहॉ म, न अभिन्न धनात्मक संख्या है और म $>$ न।

$$\text{यहॉ ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{कोज्या (म}-\text{न) य}-\text{कोज्या (म}+\text{न) य}}{२}$$

$$\text{इस लिये} \int \text{ज्यामय ज्यानय} = \frac{\text{ज्या (म}-\text{न)य}}{२\,(\text{म}-\text{न})} - \frac{\text{ज्या (म}+\text{न)य}}{२(\text{म}+\text{न})}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{और} & \int_{0}^{\pi} \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = ० \\ \text{इसी प्रकार} & \int_{0}^{\pi} \text{कोज्यामय कोज्यानय ताय} = ०\end{array}\right\} \quad . \quad . \quad (१)$$

यदि म = न और अभिन्न धनात्मक तो

$$\int \text{ज्यामय ज्यानय ताय} = \int \text{ज्या}^{२}\text{नय ताय} = \int \frac{(१-\text{कोज्या २ नय})}{२} \text{ताय}$$

$= \frac{य}{२} - \frac{ज्या २ नय}{४न}$ ।

$\therefore \int_0^{\pi} ज्या^२ नय = \frac{\pi}{२}$, इसी तरह $\int_0^{\pi} कोज्या^२ नय = \frac{\pi}{२}$ ।

१८८। $\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^म य \; कोज्या^न य \; ताय$ इस का मान जानना है। जहाँ म और न अभिन्न धनात्मक संख्या हैं।

यहाँ ३५ वे प्रक्रम से

$$\int ज्या^म य \; कोज्या^न य \; ताय = \frac{कोज्या^{न-१} य \; ज्या^{म+१} य}{म+न} + \frac{न-१}{म+न} \int ज्या^म य \; कोज्या^{न-२} य \; ताय$$

$$वा \int ज्या^म य \; कोज्या^न य \; ताय = \frac{म-१}{म+न} \int ज्या^{म-२} य \; कोज्या^न य \; ताय - \frac{ज्या^{म-१} य \; कोज्या^{न+१} य}{म+न}$$

इस लिये दोनों पर से

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^म य \; कोज्या^न य \; ताय = \frac{न-१}{म+न} \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^म य \; कोज्या^{न-२} य \; ताय$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^म य \; कोज्या^न य \; ताय = \frac{म-१}{म+न} \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म-२} य \; कोज्या^न य \; ताय ।$$

इस लिये म और न में से कोई विषम हो तो सहज में सान्तचल विदित होगा म के स्थान में २ म + १ का उत्थापन देने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२म+१} य \; कोज्या^न य \; ताय = \frac{२म}{२म+न+१} \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२म-१} य \; कोज्या^न य \; ताय$$

इस लिये बार बार क्रिया करने से

$$\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२म+१} य \; कोज्या^न य \; ताय$$

$$= \frac{२म(२म-२)(२म-४) \quad २}{(२म+न+१)(२म+न-१) \; .(न+३)} \int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्याय \quad कोज्या^न य \quad ताय$$

परन्तु $\int$ ज्या य कोज्या^{न}यताय

$$= -\frac{\text{कोज्या}^{न+१}य}{न+१} \quad \therefore \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्याय कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{१}{न+१}$$

इस लिये

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२म+१}\text{य कोज्या}^{न}\text{य ताय} = \frac{२\cdot४\cdot६\ldots२म}{(न+१)(न+३)\ldots(२म+न+१)} \quad \ldots (२)$$

इसी प्रकार न यदि विषम हो तो न के स्थान मे २न + १ का उत्थापन देने से

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{२न+१}\text{य ताय} = \frac{२न}{म+२न+१}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या}^{२न-१}\text{य ताय}$$

$$= \frac{२न(२न-२)\ldots२}{(म+२न+१)(म+२न-१)\ldots(म+३)}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{म}\text{य कोज्या य ताय}$$

$$= \frac{२\cdot४\cdot६\ldots२न}{(म+१)(म+३)\ldots(म+२न+१)} \quad (३)$$

इसी तरह

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२म}\text{य कोज्या}^{२न}\text{यताय} = \frac{२न-१}{२(म+न)}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२म}\text{य कोज्या}^{२न-२}\text{य ताय}$$

$$= \frac{१\cdot३\cdot५\ldots(२न-१)}{(२म+२)(२म+४)\ldots(२म+२न)}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२म}\text{य ताय}$$

$$= \frac{१\cdot३\cdot५\ldots(२न-१)\;१\cdot३\cdot५\ldots(२म-१)}{२\cdot४\cdot६\ldots(२म+२न)}\cdot\frac{\pi}{२} \quad (४)$$

बहुत सान्तचलो का रूप ऊपर के आकार मे ला सकते हो।

जैसे यदि य = स्पय

$$\text{तो} \int_{0}^{\infty}\frac{\text{ताय}}{(१+य^{२})^{न}} = \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{कोज्या}^{२न-२}\text{प ताप} = \int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{२न-२}\text{प ताप}$$

(४१) प्रक्रम के (४) समीकरण से)

$$= \frac{१\cdot३\cdot५\ldots(२न-३)}{२\cdot४\cdot६\ldots(२न-२)}\frac{\pi}{२} \text{ (१२ वे प्रक्रम के (१५) उदाहरण से)}$$

इसी तरह य = अ ज्याप मानने से

$$\int_{0}^{अ} य^{न}(अ^{२}-य^{२})^{\frac{म}{२}}\text{ताय} = अ^{न+म+१}\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{न}\text{प कोज्या}^{म+१}\text{प ताप}$$

और $य = अ(१-कोज्याप)$ मानने से

$$\int_0^{अ}(२अय-य^२)^{\frac{म}{२}} ताय = अ^{म+१}\int_0^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{म+१}प\ ताप$$ इत्यादि।

१८९। $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{फ(य)}{फा(य)}$ ताय इस का मान जानना है जहाँ जानते हैं कि फा(य) में

जो सब से बड़ा य का मान २न हो तो (फ)य में य का सब से बड़ा घात न—२ के समान वा २न—२ से छोटा है और $फा(य) = ०$ इस में य का मान कोई सम्भाव्य संख्या नहीं है। इसलिये यहाँ स्पष्ट हो जायगा कि य के सम्भाव्य मान में $\frac{फ(य)}{फा(य)}$ यह अनन्त के तुल्य नहीं होगा।

मान लो कि $फा(य) = ०$ इस में एक जोड़ा असम्भाव्य मान $अ_१+क_१\sqrt{-१}$, $अ_१-क_१\sqrt{-१}$ ये हैं और १७वें प्रक्रम से $\frac{फ(य)}{फा(य)}$ इस का रूप खण्डभिन्नों में ले आवें तो इन दोनो मानों के वश से एक खण्ड—

$$भिन्न = \frac{आ_१+का_१\sqrt{-१}}{य-अ_१+क_१\sqrt{-१}},\ दूसरा = \frac{आ_१-का_१\sqrt{-१}}{य-अ_१-क_१\sqrt{-१}}$$ है

$$इस\ लिये\ दोनो\ का\ योग = \frac{२आ_न(य-अ_१)+२का_१क_१}{(य-अ_१)^२+क_१^२}$$

इस प्रकार से दो दो खण्ड भिन्नो का योग करने से

$$\frac{फ(य)}{फा(य)} = \frac{२आ_१(य-अ_१)+२का_१क_१}{(य-अ_१)^२+क_१^२} + \frac{२आ_२(य-अ_२)+२का_२क_२}{(य-अ_२)^२+क_२^२}$$

$$+ \cdot + \frac{२आ_न(य-अ_न)+२का_नक_न}{(य-अ_न)^२+क_न^२} \quad \cdots (१)$$

(जहाँ और दो दो असम्भाव्य मानों के वश से $आ_२$, $अ_२$, इत्यादि सिद्ध हुए हैं)

(१) में समच्छेद करने से स्पष्ट है कि दहने पक्ष में $य^{२न-१}$ का गुणक $२(आ_१+आ_२+आ_३+\cdot+आ_न)$ यह होगा परन्तु बायें पक्ष में अर्थात् फ(य) में $य^{२न-१}$ का गुणक ० है क्योंकि मान लिया है कि फ(य) में सब से बड़ा य का घात २न-२ के समान वा २न-२ से छोटा है इस लिये सरूप समीकरण की विधि से $आ_१+आ_२+आ+\cdot+आ_न = ०$।

(१) में एक खण्ड का चल साधारण रीति से

$$\int \frac{२आ_१(य—अ_१)ताय}{(य—अ_१)^२ + क_१^२} + \int \frac{२का_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = आ_१ला\left\{(य-अ_१)^२ + क_१^२\right\}$$

$$+ २का_१स्प^{-१}\left(\frac{य—अ_१}{क_१}\right)$$

इस लिये $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२का_१क_१ताय}{(य-अ_१)^२ + क_१^२} = २का_१\pi$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य—अ_१)ताय}{(य—अ_१)^२ + क_१^२}$ इस में मान लो कि $\infty = \frac{१}{इ_१ए}$, $-\infty = \frac{—१}{इ_२ए}$

जहाँ $ए = ०$, अब $आ_१ला\{(य—अ_१)^२ + क_१^२\}$ इस में य के स्थान मे क्रम से $\frac{१}{इ_१ए}$, $—\frac{१}{इ_२ए}$ का उत्थापन दे कर अन्तर करने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{२आ_१(य—अ_१)\ ताय}{(य—अ_१)^२क + ^२_१} = आ_१\left[ला\left\{\left(\frac{१}{इ_१ए} - अ_१\right)^२ - क_१^२\right\}\right.$$

$$\left. —ला\left\{\left(—\frac{१}{इ_२ए} —अ_१\right)^२ + क_१^२\right\}\right]$$

$$= आ_१\left[ला\left\{\frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{इ_१^२ए^२}\right\}\right.$$

$$\left. —ला\left\{\frac{(१ + इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२}{इ_२^२ए^२}\right\}\right]$$

$$= आ_१ला\left\{\frac{इ_२^२}{इ_१^२}\cdot\frac{(१-इ_१अ_१ए)^२ + इ_१^२क_१^२ए^२}{(१ + इ_२अ_१ए)^२ + इ_२^२क_१^२ए^२}\right\} = आ_१ला\left[\frac{इ_२^२}{इ_१^२}\right]$$

$= २आ_१ला\frac{इ_२}{इ_१}$, ए का मान शून्य मानने से ।

इस प्रकार से (१) मे एक खण्डभिन्न सम्बन्धि $\infty, —\infty$ सीमाओं के भीतर का मान $= २आ_१ला\frac{इ_२}{इ_१} + २का_१\pi$ यह सिद्ध हुआ ।

इसी तरह (१) के सब खण्डभिन्नो के $= \infty, —\infty$ सीमाओ के भीतर सान्त-चलों का मान ले आ कर योग कर देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{फ(य)}{फा(य)}ताय = २\ (आ_१ + आ_२ + \quad + आ_न)\ ला\left[\frac{इ_२}{इ_१}\right]$$

$$+ २\pi(\text{का}_१ + \text{का}_२ + \cdots + \text{का}_न)$$
$$= २\pi(\text{का}_१ + \text{का}_२ + \cdots + \text{का}_न \cdots \quad \cdot (२)$$

१९०। ऊपर के प्रक्रम संबंधि एक उदाहरण अत्यन्त चमत्कृत दिखाते हैं।

मानो कि $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{य^{२म} \text{ताय}}{१ + य^{२न}}$ इस का मान जानना है जहाँ न और म धन अभिन्न संख्या है और न ７ म यहाँ मानो कि $य^{न२} + १ = ०$ इस में एक मान $\text{अं}'$ है तो २५वें प्रक्रम से $\text{आ}_१ - \text{का}_१\sqrt{-१} = - \frac{\text{अं}'^{२म+१}}{२न}$ और चलनकलन के ३१७वे प्रक्रम से $\text{अं}'$, $\text{कोज्या} \frac{२क+१}{२न}\pi + \sqrt{-१}\ \text{ज्या} \frac{२क+१}{२न}\pi$ इस चाल का होगा जिस मे क कोई धन संख्या न से छोटी है।

इस लिये $\text{अं}'^{२म+१} = (\text{कोज्या} \frac{२क+१}{२न}\pi + \sqrt{-१}\ \text{ज्या} \frac{२क+१}{२न}\pi)^{२म+१}$
$$= \text{कोज्या} \frac{२क+१}{२न} (२म + १)\pi + \sqrt{-१}\ \text{ज्या} \frac{२क+१}{२न} (२म + १)\pi$$
$$= \text{कोज्या} (२क + १) प + \sqrt{-१}\ \text{ज्या}(२क + १)प, \text{ यदि } \frac{(२म+१)\pi}{२न} = प$$

इस लिये असम्भाव्य और सम्भाव्य को समान करने से

$\text{आ}_१ - \text{का}_१\sqrt{-१} = - \frac{\text{कोज्या}(२क + १)प}{२न} - \frac{\sqrt{-१}\text{ज्या}(२क + १)प}{२न}$ इस में

$\text{का}_१ = \frac{\text{ज्या}(२क + १)प}{२न}$, क के स्थान में ०, १, २, $\cdots\cdots$ न − १ का उत्थापन देकर योग करने से

$$\text{का}_१ + \text{का}_२ \cdots + \text{का}_न$$
$$= \frac{१}{२न} \{ \text{ज्या}प + \text{ज्या}३प + \text{ज्या}५प \cdots + \text{ज्या}(२न - १)प \}$$

इस मे यदि $स = \text{ज्या}प + \text{ज्या }३प + \cdots + \text{ज्या }(२न - १)प$

तो $२\ स\ \text{ज्या}प = २\text{ज्या}^२प + २\text{ज्या}प\text{ज्या}३प + \cdots + २\text{ज्या}प\text{ज्या }(२न-१)प$
$$= १ - \text{कोज्या}२प + \text{कोज्या}२प - \text{कोज्या}४प + \cdots$$
$$+ \text{कोज्या }(२न - २)प - \text{कोज्या}२नप$$
$$= १ - \text{कोज्या}२नप = २\text{ज्या}^२नप = २\text{ज्या}^२ (२म + १)\frac{\pi}{२} = २$$

इस लिये $प = \frac{१}{\text{ज्या}प} = \frac{१}{\text{ज्या } \frac{२म+१}{२न}\pi}$।

इसका उत्थापन ऊपर के मान मे देने से

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{य^{२म}\text{ताय}}{१ + य^{२न}} = \frac{१}{२न} \frac{२\pi}{\text{ज्या } \frac{२म+१}{२न}\pi} = \frac{\pi}{न\ \text{ज्या } \frac{२म+१}{२न}\pi}$$

$$= २ \int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म}}{१ + य^{२न}} ताय$$ (चतुर्थाध्यायके (१) अभ्यासार्थ प्रश्न से)

इस लिये $\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म}}{१ + य^{२न}} ताय = \frac{\pi}{२न} \cdot \frac{१}{ज्या \frac{२म+१}{२न}\pi}$

१९१। $\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म}}{१ - य^{२न}}$ ताय इस का मान जानना है जहाँ न $>$ म और दोनो धनात्मक अभिन्न संख्या हैं।

इस के जानने के लिये पहले दिखलाते हैं कि

$$\int_{०}^{\infty} \frac{ताय}{१ - य^{२}} = ०$$

क्योंकि $\int_{०}^{\infty} \frac{ताय}{१ - य^{२}} = \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१ - य^{२}} + \int_{१}^{\infty} \frac{ताय}{१ - य^{२}}$ (४१प्रक्रम के (१)समीकरणसे)

परन्तु यदि य $= \frac{१}{र}$ तो $\int_{१}^{\infty} \frac{ताय}{१ - य} = \int_{०}^{१} \frac{तार}{१ - र^{२}} = - \int_{०}^{१} \frac{तार}{१ - र^{२}} = - \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१ - य^{२}}$

(४१ प्रक्रम के (३) समीकरण की कल्पना से)

इसका उत्थापन देने से

$$\int_{०}^{\infty} \int \frac{ताय}{१ - य^{२}} = \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१ - य^{२}} + \int_{१}^{\infty} \frac{ताय}{१ - य^{२}} = \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१ - य^{२}} - \int_{०}^{१} \frac{ताय}{१ - य^{२}} = ०$$

यह सिद्ध हुआ।

अब $\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म} ताय}{१ - य^{२न}}$ इस में स्पष्ट है कि $१ - य^{२न} = ०$ इस में दो सम्भाव्य मान य के आवेंगे एक $+१$ दूसरा -१ इस लिये खण्डभिन्नो मे $+१, -१$ इन दोनो मान के वश से जो दो भिन्न होंगे उन का योग $= \frac{१}{न(१ - य^{२})}$ यह होगा। इस लिये ऊपर की युक्ति से

$\frac{१}{न} \int_{०}^{\infty} \frac{ताय}{१ - य^{२}} = ०$। बाकी खण्डभिन्नो मे न$-१$ जोड़े असम्भाव्य मान होंगे इस लिये

$$\int_{०}^{\infty} \frac{य^{२म} ताय}{१ - य^{२न}} = २\pi (का_{१} + का_{२} + \quad + का_{न+१})$$

यहाँ भी ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{का}_1+\text{का}_2+\quad+\text{का}_{\text{न}-1}=\frac{1}{2\text{न}}\{\text{ज्या}2\text{प}+\text{ज्या}\;4\text{प}+\cdots+\text{ज्या}\;2(\text{न}-1)\text{प}\}$$

जहाँ पहले के ऐसा $\text{प}=\frac{(2\text{म}+1)}{2\text{न}}\pi$

यहाँ पर भी सरलत्रिकोणमिति की युक्ति से सब जीवाओ के योग

$$\text{का मान}=\frac{\text{कोज्याप}-\text{कोज्या}(2\text{न}-1)\text{प}}{2\text{ज्याप}}=\text{कोस्प}\frac{(2\text{म}+1)\pi}{2\text{न}}$$

$$\text{इस लिये}\int_0^\infty\frac{\text{य}^{2\text{म}}\text{ताय}}{1-\text{य}^{2\text{न}}}=\frac{\pi}{2\text{न}}\text{कोस्प}\frac{2\text{म}+1}{2\text{न}}\pi\text{।}$$

इस में और ऊपर के प्रक्रम मे यदि $\text{य}^{2\text{न}}=\text{ल}$ और $\text{अ}=\frac{2\text{म}+1}{2}$ तो

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty\frac{\text{य}^{2\text{म}}\text{ताय}}{1+\text{य}^{2\text{न}}}=\int_0^\infty\frac{\text{ल}^{\text{अ}-1}\text{ताल}}{1+\text{ल}}=\frac{\pi}{\text{ज्याअ}\pi}\text{।}\\ \text{और}&\int_0^\infty\frac{\text{य}^{2\text{म}}\text{ताय}}{1-\text{य}^{2\text{न}}}=\int_0^\infty\frac{\text{ल}^{\text{अ}-1}\text{ताल}}{1-\text{ल}}=\pi\text{कोस्प अ}\pi\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

यहाँ म, और न के वश से सिद्ध कर सकते हो कि अ सर्वदा धनात्मक और १ से अल्प है।

१९२। ऊपर के दो प्रक्रमों में जो दो सान्तचल आये हैं उनके बल से अनेक रूपान्तर बना सकते हो। जैसे ऊपर के प्रक्रम के (१) समीकरण में यदि $\text{ह}=\text{ल}^{\text{अ}}$ तो

$$\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1+\text{ह}^{\frac{1}{\text{अ}}}}=\frac{\text{अ}\pi}{\text{ज्याअ}\pi},\quad\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1-\text{ह}^{\frac{1}{\text{अ}}}}=\text{अ}\pi\text{कोस्प अ}\pi$$

इन मे $\text{त}=\frac{1}{\text{अ}}$ मानने से

$$\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1+\text{ह}^{\text{त}}}=\frac{\pi}{\text{तज्या}\frac{\pi}{\text{त}}},\int_0^\infty\frac{\text{ताह}}{1-\text{ह}^{\text{त}}}=\frac{\pi}{\text{त}}\text{कोस्प}\frac{\pi}{\text{त}}\cdots\quad(1)$$

जहाँ त धन और १ से अधिक है।

$$\text{और}\int_0^\infty\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}=\int_0^1\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}+\int_1^\infty\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}$$

$$\text{परन्तु यदि य}=\frac{1}{\text{ल}}\text{तो}\int_1^\infty\frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}=\int_1^0-\frac{\text{ल}^{-\text{न}}\text{ताल}}{1+\text{ल}^2}=\int_0^1\frac{\text{य}^{-\text{न}}\text{ताय}}{1+\text{य}^2}$$

$$\therefore \int_0^\infty \frac{य^न ताय}{१+य^२} = \int_0^१ \frac{य^न + य^{-न}}{१+य^२} ताय । \cdots \quad (२)$$

और १९० प्रक्रम के सान्तचल मे यदि न=१, और २ म=न∠१ मान

ले तो $\int_0^\infty \frac{य^न ताय}{१+य^२} = \frac{\pi}{२ को ज्या \frac{न\pi}{२}} \cdots \quad (३)$

(३) से (२) का मान

$$= \frac{\pi}{२ कोज्या \frac{न\pi}{२}} = \int_0^१ \frac{य^न + य^{-न}}{१+य^२} ताय = \int_0^१ \frac{य^न + य^{-न}}{य+य^{-१}} \frac{ताय}{य} \cdots (४)$$

इसी तरह

$$\frac{\pi}{२} स्प \frac{न\pi}{१} = \int_0^\infty \frac{य^न ताय}{१-य^२} = \int_0^१ \frac{य^न - य^{-न}}{य-य^{-१}} \frac{ताय}{य} \cdots \quad (५)$$

सर्वत्र समझो कि न ∠ १ है

(४) और (५)वे मे यदि य = $इ^{-\pi ल}$ और अ = नπ तो

$$\int_0^\infty \frac{इ^{अल} + इ^{-अल}}{इ^{\pi ल} + इ^{-\pi ल}} ताल = \frac{छे \frac{अ}{२}}{२} । \int_0^\infty \frac{इ^{अल} - इ^{-अल}}{इ^{\pi ल} - इ^{-\pi ल}} ताल = \frac{स्प \frac{अ}{२}}{२}, \quad (६)$$

इस तरह से सैकड़ों रूपान्तर कर सकते हो।

१९३। इस सान्तचलानयन की विधि से फल मे चाहे जिस वर्ण को स्वतन्त्र मान उसके वश से चाहे जौन सा तात्कालिक सम्बन्ध जान सकते हैं।

जैसे $\int_अ^क फ(य) ताय$ इस का तात्कालिक सम्बन्ध क को स्वतन्त्र मान उस के वश से निकालना है जहाँ यह जानते हैं कि फ(य) मे क नही है और क और अ यहाँ यदि $\int फ(य) ताय = फा(य) + स्थि$,

तो $\int_अ^क फ(य) ताय = फा(क) - फा(अ)$ दोनो परस्पर स्वतन्त्र हैं।

इस लिये $\frac{ताम}{ताक} = \frac{ता}{ताक} \{ फा(क - फा अ) \} = \frac{ताफा(क)}{ता क} = फ(क)$ यह बड़े लाघव से सिद्ध हो जाता है इसके लिये यूरप के लोगो की कल्पना जो टाड् हण्टर इत्यादिकों ने लिखी है सो दिखाते हैं।

कल्पना करो कि $स = \int_{अ}^{क} फ(य)ताय$

और जब बदल के क + △क हुआ तब स का मान स + △स हुआ।

इस लिये $$स + \triangle स = \int_{अ}^{क+\triangle क} फ(य)\ ताय$$

इस लिये $$\triangle स = \int^{क+\triangle क} फ(य)ताय - \int_{अ}^{क} फ(य)\ ताय$$

$$= \int_{अ}^{क+\triangle क} फ(य)ताय$$ (४१) प्रक्रम के (१) (समीकरण से)

परन्तु ४०वें प्रक्रम से

$$\int_{क}^{क+\triangle क} फ(य)ताय = \triangle क\ फ(क + प\triangle क)$$

जहां प कोई १ से अल्प भिन्नाङ्क है।

इस तरह से $\frac{\triangle स}{\triangle क} = फ(क + प\triangle क)$, △ क का, मान शून्य मानने से

$$\left.\begin{array}{l} \frac{तास}{ताक} = फ(क) \\ और\quad \frac{ता^{न}स}{ताक^{न}} = फ^{(न-१)}(क) \end{array}\right\} \cdots\cdots \quad (१)$$

इसी तरह अ को स्वतन्त्र मानने से यदि फ (य) में अ न हो और अ,क परस्पर स्वतन्त्र हों तो $\frac{तास}{ताअ} = -फ(अ)$

और $$\frac{ता^{न}स}{ताअ^{न}} = -फ^{(न-१)}(अ) \cdots\cdots \quad (२)$$

१९४। $स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग)ताय$ यहां पर ग को स्वतन्त्र मानने से $\frac{तास}{ताग}$ का मान जानना है जहां अ और क दोनो ग की अपेक्षा स्वतन्त्र है।

यहां $$स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग)\ ताय$$

इस लिये $$स + \triangle स = \int_{अ}^{क} फ(य, ग + \triangle ग)\ ताय$$

और $$\triangle स = \int_{अ}^{क} फ(य,ग + \triangle ग)\ ताय - \int_{अ}^{क} फ(य, ग)ताय$$

$$= \int_{अ}^{क} \{ फ(य,ग+\triangle ग) - फ(य,ग) \} ताय$$

इस लिये $$\frac{\triangle स}{\triangle ग} = \int_{अ}^{क} \left\{ \frac{फ(य,ग+\triangle ग) - फ(य,ग)}{\triangle ग} \right\} ताय$$

$\triangle ग$ को शून्य मानने से तात्कालिक सम्बन्ध के धर्म से

$$\frac{तास}{ताग} \int_{अ}^{क} \frac{ताफ(य,ग)}{ताग} ताय$$

इसमे इतना समझ लो कि अ, वा क दोनों में से कोई अनन्त के तुल्य नहीं है। क्योंकि चलनकलन की युक्ति से

$$\frac{फ(य,ग+\triangle ग) - फ(य,ग)}{\triangle ग} = \frac{ताफ(य,ग)}{ताग} + इ_१ \text{ ऐसा होगा।}$$

जहां $\triangle ग$ को शून्य मानने से $इ_१$ भी शून्य हो जायगा।

इस लिये $$\frac{\triangle स}{\triangle ग} = \int_{अ}^{क} \frac{ताफ(य,ग)}{ताग} ताय + \int_{अ}^{क} इ_१ \, ताय$$

अव यहां प्रत्यक्ष देख पड़ता है कि ग को शून्य मानने से यदि क, और अ अनन्त न हों तो $\int_{अ}^{क} इ_१$ ताय यह शून्य के तुल्य हो जायगा।

$$\left.\begin{aligned} &\text{अव जव } \frac{तास}{ताग} = \int_{अ}^{क} \frac{ताफ(य,ग)}{ताग} ताय \\ &\text{इसलिये } \frac{ता^{न}स}{ताग^{न}} = \int_{अ}^{क} \frac{ता^{न}फ(य,ग)}{ताग^{न}} ताय \end{aligned}\right\} \cdots\cdots \quad ..(१)$$

कल्पना करो कि (१) मे $\int फ(य,ग) ताय = फा(य,ग)$

और $$\int \frac{ताफा(य,ग)}{ताग} ताय = फि(य,ग)$$

तो $$\frac{तास}{ताग} = \frac{ताफा(क,ग)}{ताग} - \frac{ताफा(अ,ग)}{ताग} = फि(क,ग) - फि(अ,ग) \quad (२)$$

इसमे मानो कि फ (य, ग) मे क नहीं है और अ, क से स्वतन्त्र है तो

(२) से $$\frac{ता\,फा(क,ग)}{ताग} + फि(अ,ग) - \frac{ता\,फा(अ,ग)}{ताग} = \frac{ता\,फा(क,ग)}{ताग} + स्थि$$

$$= फि(क,ग) \ldots \quad (३)$$

जहां $\text{फि}\,(\text{अ},\text{ग}) - \frac{\text{ता}\,\text{फा}\,(\text{अ},\text{ग})}{\text{ताग}} = \text{स्थि} = \text{क}$ में स्वतन्त्र स्थिराङ्क।

अब (३) में चाहे क के स्थान में जो उत्थापन दो समीकरण ठीक ही रहेगा मान लो कि क के स्थान में य को रख दिया तो

$$\frac{\text{ता}\,\text{फा}\,(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}} + \text{स्थि} = \text{फि}\,(\text{य},\text{ग}) \quad . \quad \ldots\ldots(४)$$

(४) में यदि स्थिराङ्क को छोड़ दें और फा (य, ग) और फि (य,ग) के स्थान में इनका पहला मान रख दें तो

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\int \text{फ}\,(\text{य},\text{ग})\,\text{ताय} = \int\frac{\text{ता}\,\text{फ}\,(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}}\text{ताय} \quad .. \qquad (५)$$

(५) वें से एक के चलज्ञान से दूसरे का चलज्ञान सहज में हो सकता है जैसे

यदि $\text{फ}\,(\text{य},\text{ग}) = \frac{१}{१+\text{ग}^२\text{य}^२}$ तो $\text{फ}\,(\text{य},\text{ग})\,\text{ताय} = \int\frac{\text{ताय}}{१+\text{ग}^२\text{य}^२} = \frac{१}{\text{ग}}\text{स्प}^{-१}\text{गय}$

और $\frac{\text{ताफा}\,(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}} = -\frac{२\,\text{गय}^२}{(१+\text{ग}^२\text{य}^२)^२}$, $\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\int\text{फ}\,(\text{य},\text{ग})\,\text{ताय} = \frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\left(\frac{१}{\text{ग}}\,\text{स्प}^{-१}\text{गय}\right)$

$= \frac{१}{\text{ग}}\,\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}(\text{स्प}^{-१}\text{गय}) = \frac{१}{\text{ग}}\cdot\frac{\text{य}}{१+\text{ग}^२\text{य}^२}$

इस लिये (५)वें से

$$\frac{\text{ता}}{\text{ताग}}\int\text{फ}\,(\text{य},\text{ग})\,\text{ताय} = \frac{१}{\text{ग}}\,\frac{\text{य}}{१+\text{ग}^२\text{य}^२} = \int\frac{\text{ताफ}\,(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}}\text{ताय} = -\int\frac{२\,\text{गय}^२\,\text{ताय}}{(१+\text{ग}^२\text{य}^२)^२}$$

देखो यहां $\int\text{फ}\,(\text{य},\text{ग})\,\text{ताय} = \int\frac{\text{ताय}}{१+\text{ग}^२\text{य}^२}$ इसके ज्ञान से तात्कालिक सम्बन्ध पर से इससे अधिक कठिन का $-\int\frac{२\text{गय}^२\,\text{ताय}}{(१+\text{ग}^२\text{य}^२)^२}$ इसका ज्ञान सहज में हो गया।

१९५। यदि $\text{स} = \int_{\text{अ}}^{\text{क}}\text{फ}\,(\text{य},\text{ग})\,\text{ताय}$ इसमें यदि क, और अ दोनों ग के फल हों तो $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}}$ का मान जानना।

यहां स्पष्ट है कि तीन चलराशि के वश से अर्थात् अ, क, ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकलेगा। इस लिये चलनकलन के प्रक्रम से और ऊपर के प्रक्रमों से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \int_{\text{ग}}^{\text{क}}\frac{\text{ताफ}\,(\text{य},\text{ग})}{\text{ताग}}\text{ताय} + \frac{\text{तास}}{\text{ताक}}\cdot\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} + \frac{\text{तास}}{\text{ताअ}}\cdot\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$

$$= \int_{ग}^{क} \frac{ताफ (य, ग)}{ताग} ताय + फ (क, ग) \frac{ताक}{ताग} - फ (अ, ग) \frac{ताअ}{ताग}$$

इसी तरह से

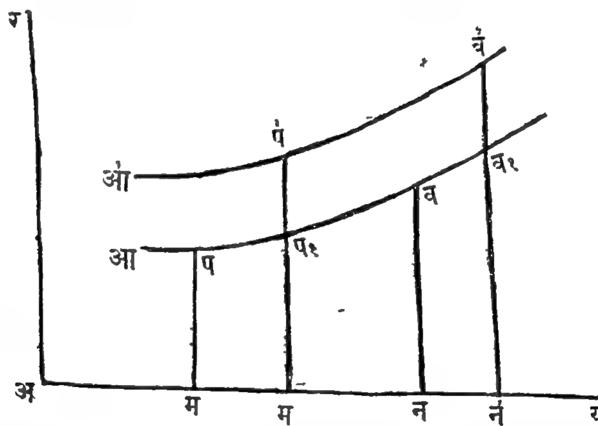
$$\frac{ता^2स}{ताग^2} = \int_{ग}^{क} \frac{ता^2फ (य, ग)}{ताग^2} ताय$$

$$+ फ(क, ग) \frac{ता^2क}{ताग^2} + \frac{ताफ (क, ग)}{ताक} \left\{\frac{ताक}{ताग}\right\}^2 + 2\frac{ताफ (क, ग)}{ताग} \cdot \frac{ताक}{ताग}$$

$$- फ (अ, ग) \frac{ता^2अ}{ताग^2} - \frac{ताफ (अ, ग)}{ताअ} \left\{\frac{ताअ}{ताग}\right\}^2 - 2 \frac{ताफ (अ, ग)}{ताग} \frac{ताअ}{ताग}$$

इसी तरह $\frac{ता^3स}{ताग^3}$ इसका और इससे अधिक का भी मान जान सकते हो।

१९६। १९५ प्रक्रम में जो $\frac{तास}{ताग}$ इसका मान दिखलाया है उसे क्षेत्र की रीति से भी दिखा सकते हो।



मान लो कि आपव वक्र का समीकरण र = फ(य,ग) और आंपंवं का समीकरण र = फ(य,ग + △ग) यह है और मानो कि

अम = अ, अ न = क, म मं = △ अ, न नं = △क तो स, पमनव का और स + △स पमंनंवं का क्षेत्रफल होगा। इसलिये

$\triangle स = पंप_1व_1 वं + वननं व_1 - पममंप_1$

और $\frac{\triangle स}{\triangle ग} = \frac{पं प_1व_1 वं}{\triangle ग} + \frac{व न नं व_1}{\triangle ग} - \frac{प म मं प_1}{\triangle ग}$।

इस में मनं का मान यदि परमाल्प अर्थात् ताय के तुल्य हो तो $\frac{पं प_1व_1वं}{ग} = \frac{फ(य,ग + \triangle) - फ(य, ग)}{ग\triangle}$ ताय, $\frac{वननंव_1}{\triangle ग} = फ(क, ग) \frac{\triangle क,}{\triangle ग,}$

और $\frac{\text{प म म' प}_1}{\triangle \text{ग}} = \text{फ}(\text{अ, ग})\frac{\triangle \text{अ}}{\triangle \text{ग}}$। इस पर से △ग के स्थान में ताग मानने से

$$\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \frac{\text{ताफ(य,ग)}}{\text{ताग}}\text{ताय} + \text{फ(क,ग)}\frac{\text{ताक}}{\text{ताग}} - \text{फ(अ,ग)}\frac{\text{ताअ}}{\text{ताग}}$$

यही १९५ प्रक्रम में भी उत्पन्न हुआ था।

१९७। ऊपर के प्रक्रमों में जो सिद्धान्त दिखलाये है उनकी व्याप्ति के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते है।

(१) उस वक्र को जानना है जिस में चाप, य अक्ष, और कोटि से बने क्षेत्र का फल भुजकोटि के घात से न गुणित हो। जहाँ न कोई स्थिराङ्क है। मानो कि वक्र का समीकरण र = फ(य) है तो फलानयन की विधि से

$\int_0^{\text{ग}} \text{फ(य) ताय}$ यह उस खण्ड का फल होगा जो वक्रचाप, य अक्ष, और उस कोटि से जिस मे भु = ग, है बना है इस लिये प्रश्न के आलाप से

$$\text{स} = \int_0^{\text{ग}} \text{फ(य) ताय} = \frac{\text{गफ(ग)}}{\text{न}}$$ यह स्थिति चाहे ग का मान जो हो सर्वत्र रहेगी इस लिये ग के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से १९३ प्रक्रम के (१) समीकरण से $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = \text{फ(ग)} = \frac{\text{फ(ग)} + \text{गफ}'\text{(ग)}}{\text{न}}$

इस लिये $(\text{न} - 1)\,\text{फ(ग)} = \text{गफ}'\text{(ग)}$

और $$\frac{\text{फ}'\text{(ग)}}{\text{फ(ग)}} = \frac{\text{न} - 1}{\text{ग}}$$

चलानयन से $\text{ला फ(ग)} = (\text{न} - 1)\,\text{लाग} + \text{स्थि}$

अर्थात् $\text{फ(ग)} = \text{आग}^{\text{न}-1}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।

ग के स्थान में य को रख देने से अभीष्ट वक्र का समीकरण

$\text{फ(य)} = \text{आय}^{\text{न}-1}$ यह हुआ।

(२) जिस वक्र का र = फ(य) यह समीकरण है उसमें यह जानते हैं कि ग के सब माने में

$$\frac{\int_0^{\text{ग}} \text{य}\,\{\text{फ(य)}\}^2 \text{ताय}}{\int_0^{\text{ग}} \{\text{फ(य)}\}^2 \text{ताय}} = \frac{\text{ग}}{\text{न}}$$ यह स्थिति है तो फ(य) का स्वरूप कैसा होगा।

यहा प्रश्न के अनुसार छेदगम कर देने से

$$\int_{0}^{ग} य \{ फ(य) \}^{२} ताय = \frac{ग}{न}\int_{0}^{ग} \{ फ(य) \}^{२} ताय$$ ऐसा होगा ।

ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$ग \{ फ(य) \}^{२} = \frac{१}{न}\int_{0}^{ग} \{ फ(य) \}^{२} ताय + \frac{ग}{न} \{ फ(ग) \}^{२}$$

समशोधन से $ग(१ - \frac{१}{न}) \{ फ(ग) \}^{२} = \frac{१}{न}\int_{0}^{ग} \{ फ(य) \}^{२} ताय$

इस का ग के वश से फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$(१ - \frac{१}{न} \{ फ(ग) \}^{२} + २ ग(१ - \frac{१}{न}) फ(ग) फ'(ग) = \frac{\{ फ(ग) \}^{२}}{न},$$ फ(ग)

का भाग दे कर समशोधन से $(१ - \frac{१}{न}) फ(ग) + २ग(१ - \frac{१}{न}) फ' (ग) = ०$

इस लिये $\frac{फ'(ग)}{फ(ग)} = \frac{२-न}{२(न-१)} \frac{१}{ग}$, चलानयन करने से

$$लाफ(ग) = \frac{२-न}{२(न-१)} लाग + स्थि ।$$

इस लिये $फ(ग) = आ\, ग^{\frac{२-न}{२(न-१)}}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है ।

इस तरह से $फ(य) = आ\, य^{\frac{२-न}{२(न-१)}}$ यह सिद्ध हुआ ।

यह उदाहरण स्थिति विद्या मे एक चमत्कार कारक है ।

(३) फ(य) का ऐसा स्वरूप जानना है जिसमें $\int_{0}^{म} \frac{फ(य)ताय}{\sqrt{(ग-य)}}$ यह ग से स्वतन्त्र हो जहां जानते हैं कि ग से फ(य) स्वतन्त्र है ।

यहां मानलो कि य = गल तो

$$स = \int_{0}^{ग} \frac{फ(य)ताय}{\sqrt{(ग-य)}} = \int_{0}^{१} \frac{\sqrt{ग}\, फ(गल)\, ताल}{\sqrt{(१-ल)}}$$ अब प्रश्नानुसार स, ग से स्वतन्त्र है इस लिये

$$० = \frac{तास}{ताग} = \int_{0}^{१} \frac{\frac{फ(गल)}{२\sqrt{ग}} + ल\sqrt{ग}\, फ'(गल)}{\sqrt{(१-ल)}} = \int_{0}^{ग} \frac{फ(य) + २यफ'(य)}{२ग\sqrt{(ग-य)}} ताय$$

यह सब ग के मान में जब $\frac{\text{तास}}{\text{ताग}} = ०$ है इस लिये अवश्य ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा सिद्ध कर सकते हो कि

$$\text{फ(य)} + \text{२य फ}'\text{(य)} = ० \therefore \frac{\text{फ}'\text{(य)}}{\text{फ(य)}} = -\frac{१}{\text{२य}}$$

इस लिये $\text{ला फ(य)} = -\frac{१}{२}\text{ला(य)} + \text{स्थि}$।

इस लिये $\text{फ(य)} = \frac{\text{आ}}{\sqrt{\text{य}}}$ जहां आ कोई स्थिराङ्क है।

इस वक्र में नीच स्थान से यदि उस विन्दु तक जिसका भु = य है चाप चाहो तो गति विद्या से

$$\frac{\text{ताचा}}{\text{ताय}} = \text{फ(य)} = \frac{\text{आ}}{\sqrt{\text{य}}} \therefore \text{चा} = \text{२आ}\sqrt{\text{य}}$$

(७१ वां प्रक्रम देखो) इस पर से कह सकते हो कि ऊपर का वक्र चक्रादल होगा।

(४) $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अय}}\,\text{ताय} = \frac{१}{\text{अ}}$ तो यहां न वार अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से $\int_0^\infty \text{य}^{\text{न}}\,\text{इ}^{-\text{अय}}\,\text{ताय} = \frac{\lfloor\text{न}}{\text{अ}^{\text{न}-१}}$ यह सिद्ध हुआ।

क्योंकि $\int \text{इ}^{-\text{अय}}\,\text{ताय} = \frac{\text{इ}^{-\text{अय}}}{\text{अ}} = -\frac{१}{\text{अइ}^{\text{अय}}}$

इस लिये $-\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अय}}\,\text{ताय} = -\frac{१}{\text{अइ}^{\infty}} + \frac{१}{\text{अइ}^{०}} = ० + \frac{१}{\text{अ}} = \frac{१}{\text{अ}}$

इस तरह से सैकड़ों प्रश्नोत्तर निकाल सकते हो।

१९८। फ्रुलानी का सिद्धान्त (Theorem of Frullani)

इसे सिद्ध करना है कि $\int_0^\infty \frac{\text{फ(अय)} - \text{फ(कय)}}{\text{य}}\,\text{ताय} = \text{फ}(०) \times \text{ला}\left(\frac{\text{क}}{\text{अ}}\right)$

कल्पना करो कि $\text{स} = \int_0^{\text{च}} \frac{\text{फ(ल)} - \text{फ(०)}}{\text{ल}}\,\text{ताल}$ इस में ल = अय तो

$$स = \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(०)}{य} ताय \ldots\ldots \quad (१)$$

इस मे यदि अ के स्थान में क को रख दें तो

$$स = \int_0^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय) - फ(०)}{य} ताय \ldots\ldots \quad (२)$$

(१) और (२) के अन्तर पर से

$$\int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय)ताय}{य} - \int_0^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०)ला \int_{\frac{च}{क}}^{\frac{च}{अ}} \frac{ताय}{य}$$

$$= \int_0^{\frac{च}{अ}} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय - \int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = फ(०) ला \left(\frac{अ}{क}\right) \ldots \quad (३)$$

यहां यदि $च = \infty$ तो यदि $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{फ(कय)ताय}{य} = ०$

तो $\int_0^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = फ(०) \times ला \left(\frac{क}{अ}\right)$

जैसे यदि फ (य) = कोज्याय तो

यहां $\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{कोज्याकय}{य} ताय = ०$ यदि $च = \infty$

क्योंकि $\int य^{-१} कोज्याकयताय = \frac{य^{-१} ज्याकय}{क} + \frac{१}{क} \int य^{-२} ज्याकयताय$

(खण्डचलानयन से)

इस लिये य का अनन्त मान मानने से कोज्याकय, और ज्याकय तो सर्वदा १ से कम रहेंगे परन्तु भाजक ∞ के तुल्य होगा।)

इस लिये $\int_0^{\infty} \frac{फ(अय) - फ(कय)}{य} ताय = \int_0^{\infty} \frac{कोज्याअय - कोज्याकय}{य} ताय$

$$= फ(०) ला\left(\frac{क}{अ}\right) = कोज्या(०) \times ला\left(\frac{क}{अ}\right) = ला\left(\frac{क}{अ}\right)$$

जहाँ कहीं फ $(०) = ०$ तहाँ फ्रुलानी (Frullani) के सिद्धान्त से ठीक मान न आवेगा जैसे $\int_{०}^{\infty} \frac{स्प^{-१}अय - स्प^{-१}कय}{य}$ ताय यहाँ फ$(०) = ०$ इस लिये

(३) समीकरण से

$$\int_{०}^{\infty} \frac{स्प^{-१}अय - स्प^{-१}कय}{य} ताय = \int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{स्प^{-१}कय}{य} ताय, \text{ जहाँ } च = \infty$$

दहने पक्ष में स्पष्ट है कि $\frac{च}{अ}, \frac{च}{क}$ भीतर सब अनन्त मान में

$स्प^{-१}कय = स्प^{-१}(\infty) = \frac{\pi}{२}$ इस लिये

$$\int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{स्प^{-१}कयताय}{य} = \frac{\pi}{२} \int_{\frac{च}{अ}}^{\frac{च}{क}} \frac{ताय}{य} = \frac{\pi}{२} ला \left(\frac{अ}{क}\right)$$

इस लिये $\int_{०}^{\infty} \frac{स्प^{-१}अय - स्प^{-१}कय}{य} ताय = \frac{\pi}{२} ला \left(\frac{अ}{क}\right)$

१९९। यूलर के चल (Eulerian Integrals)

$\int_{०}^{१} य^{द-१} (१ - य)^{म-१}$ ताय इस सान्तचल को यूलर का पहला चल कहते हैं।

और इसे हम बी (द,म) इस संकेत से प्रकाश करते हैं। यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का दूसरा अक्षर बीटा (B) को लेकर इस को बीटा फल (Beta function) कहते है। हमने अपने देश के अनुसार इस का नाम बीजफल रखा है।

$\int_{०}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१}$ ताय इस को यूलर का दूसरा चल कहते हैं और इसे हम गा(न) इस संकेत से प्रकाश करते हैं। यूरप के लोग ग्रीक वर्णमाला का तीसरा अक्षर गामा (G) को लेकर इसे गामा फल (Gmma function) कहते है हमने इसका नाम गाढ़फल रखा है।

इन दोनों को यूलर ने निकाला है इसी लिये आदर के लिये उसके नाम सहित इन्हें बोलते हैं।

यूलर का जन्म सन् १७०७ ई० में हुआ था और ७६ वर्ष की अवस्था मे इसकी मृत्यु हुई थी वीच में यह अंधा भी हो गया था और घर मे आग लग जाने से वहुत से इसके प्रकार भस्म भी हो गये तथापि वहुत से इस के ग्रन्थ अद्यावधि यूरप में प्रसिद्ध है जिनका वर्णन मै इस चलराशिकलन में व्यर्थ समझता हूँ इस लिये अपने कृत्य के ऊपर लौट कर कुछ इन दोनों चलों के सिद्धान्तों को दिखलाता हूँ। नीचे सर्वत्र द, म और न को धन समझो।

२००। ४१ वें प्रक्रम के (४) समीकरण से

$$\int_0^{१} य^{द-१} (१-य)^{म-१} \text{ ताय} = \int_0^{१} य^{म-१}(१-य)^{द-१}$$

इस लिये वी (द,म) = वी (म,द)

अर्थात् द,म का परस्पर परिवर्त्तन कर देने से मान मे कुछ भी अन्तर नही होता।

यदि वी (द,म) मे $य = \frac{र}{१+र}$ तो

$$\int_0^{१} य^{द-१}(१-य)^{म-१}\text{ताय} = \text{वी (द,म)} = \int_0^{\infty} \frac{र^{द-१}\text{तार}}{(१+र)^{द+म}}$$

उसी मे यदि $य = \frac{१}{१+र}$ तो

$$\int_0^{१} य^{द-१}(१-य)^{म-१}\text{ताय} = \text{वी (द, म)} = \int_0^{\infty} \frac{र^{म-१}\text{तार}}{(१+र)^{द+म}}\text{।}$$

२०१। यूलर के दूसरे चल मे यदि $इ^{-य} = र$ अर्थात् $य = \text{ला}\frac{१}{र}$

तो $\int_0^{\infty} इ^{-य}य^{न-१}\text{ताय} = \text{गा(न)} = \int_0^{१}\left(\text{ला}\frac{१}{र}\right)^{न-१}\text{तार}$ यह एक गा(न) का रूपान्तर है।

खण्ड चलानयन से

$$\int इ^{-य}य^{न}\text{ताय} = -इ^{-य}य^{न} + न\int इ^{-य}य^{न-१}\text{ताय}$$

और $इ^{-य}य^{न}$ 7 शून्य के तुल्य होता है यदि $य=०, य=\infty$ हो (चलनकलन का ३६ वॉ प्रक्रम देखो)

इस लिये $\int_0^{\infty} इ^{-य}य^{न}\text{ताय} = न\int_0^{\infty} इ^{-य}य^{न-१}\text{ताय}$

अर्थात् $\text{गा}(\text{न}+१) = \text{न}\text{गा}(\text{न})$ . . . . . . (१)

और $\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{य}} \text{ताय} = १$ (१९७ प्रक्रम के (४) उदाहरण से जहाँ अ = १)

इस लिये $\text{गा}(१) = १,$ . . . . . . (२)

यदि न अभिन्न हो तो (१) और (२) से

$$\text{गा}(\text{न}+१) = \underline{|\text{न}}$$

परन्तु यदि न भिन्न और १ से अधिक हो तो यदि गा(म) इसका मान (जहाँ म < १) ज्ञात हो तो (१) समीकरण से वार वार क्रिया करने से गा(न) का मान भी आ जायगा।

२०२। यदि जय = ल तो

$$\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{जय}} \text{य}^{\text{न}-१} \text{ताय} = \frac{१}{\text{ज}^{\text{न}}} \int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{ल}} \text{ल}^{\text{न}-१} \text{ताल} = \frac{\text{गा}(\text{न})}{\text{ज}^{\text{न}}}।$$

२०३। $\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} \text{य}^{\text{द}+\text{म}-१} \text{र}^{\text{म}-१} \text{इ}^{-(१+\text{र})\text{य}} \text{ताय ~ तार}$ इस का द्विगुण चलानयन से मान ले आवें तो २०२ प्रक्रम से

$$\text{गा}(\text{द}+\text{म}) \int_{0}^{\infty} \frac{\text{र}^{\text{म}-१} \text{तार}}{(१+\text{र})^{\text{द}+\text{म}}} = \text{गा}(\text{द}+\text{म}) \text{ वी}(\text{द},\text{म})$$ (२०० वें प्रक्रम)

और ऊपर के द्विगुण चल मे यदि पहले य के वश से चलानयन करें तो

$$\text{गा}(\text{म}) \int_{0}^{\infty} \frac{\text{इ}^{-\text{य}} \text{य}^{\text{द}+\text{म}-१}}{\text{य}^{\text{म}}} \text{ताय} = \text{गा}(\text{म}) \int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{य}} \text{य}^{\text{द}-१} \text{ताय}$$

= गा(म) गा(द) इस लिये ६३ वें प्रक्रम की अन्तिम युक्ति से

$$\text{गा}(\text{द}+\text{म}) \text{ वी}(\text{द},\text{म}) = \text{गा}(\text{म}) \text{ गा}(\text{द})$$

$$\therefore \text{वी}(\text{द},\text{म}) = \frac{\text{गा}(\text{म})\text{गा}(\text{द})}{\text{गा}(\text{द}+\text{म})}$$

इसमें यदि द + म = १ तो गा(द + म) = गा (१) = १ (२०१ प्रक्रम के (२) स॰ से)

$$\text{इस लिये वी}(\text{द},\text{म}) = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{र}^{\text{म}-१}\text{तार}}{१+\text{र}} = \text{गा}(\text{म}) \text{ गा}(१-\text{म})$$

अब यदि म < १ तो १९१ वें प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{र}^{\text{म}-१} \text{तार}}{१+\text{र}} = \frac{\pi}{\text{ज्याम}\pi}$$ इस लिये।

$$गा(म)\ गा(१-म) = \frac{\pi}{ज्या म\pi}$$

इस मे यदि $म = \frac{1}{2}$ तो $\{गा(\frac{1}{2})\}^{2} = \pi$ ∵ $गा(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

इसे नीचे की युक्ति से भी सिद्ध कर सकते हो।

२०४। चलनकलन से सिद्ध है कि $\frac{य^{च}-१}{च} = लाय$ यदि $च = ०$

इस लिये कल्पना करो कि $(ला\frac{१}{य})^{न-१} = \left[\frac{१-य^{च}}{च}\right]^{न-१} + र$

जहाँ जब $च = ०$ तो $र = ०$। च के स्थान में $\frac{१}{इ_{१}}$ रखो तो २०१ प्रक्रम से

$$गा(न) = इ_{१}^{न-१}\int_{०}^{१}(१-य^{\frac{१}{इ_{१}}})^{न-१}ताय + \int_{०}^{१} र\ ताय$$

समशोधन से $गा(न) = \int_{०}^{१} र\ तार = इ_{१}^{न-१}\int_{०}^{१}(१-य^{\frac{१}{इ_{१}}})^{न-१}ताय$

$$= इ_{१}^{न}\int_{०}^{१}ल^{इ_{१}-१}(१-ल)^{न-१}ताल,\ य = ल^{इ_{१}}\ मानने\ से$$

अब यहां हमे सामर्थ्य है कि $इ_{१}$ को धनात्मक और चाहे जितना बड़ा कल्पना कर सके इस लिये यदि $इ_{१} = \infty$ तो $र = ०$ इस लिये ५१ प्रक्रम के (१) समीकरण से और $इ_{१}$, और न को बदल देने से

$$गा(न) = \frac{\lfloor इ_{१}}{न(न+१)\ \ (न+इ_{१}-१)}इ_{१}^{न-१} \quad \ldots (१)$$

(१) मे न के स्थान मे न−म, न+म का उत्थापन देने से

$$गा(न-म) = \frac{\lfloor इ_{१}}{(न-म)(न-म+१)\ (न-म+इ_{१}-१)}इ_{१}^{न-म-१} \quad \ldots (२)$$

$$गा(न+म) = \frac{\lfloor इ_{१}}{(न+म)(न+म+१)\cdot(न+म+इ_{१}-१)}इ_{१}^{न+म-१} \quad \ldots (३)$$

इस लिये।

$$\frac{\{गा(न)\}^{२}}{\{गा(न-म)\}\ \{गा(न+म)\}} = \frac{\dfrac{\{\lfloor इ_{१}\}^{२}इ_{१}^{२न-२}}{न^{२}(न+१)^{२}\cdot\ (न+इ_{१}-१)^{२}}}{\dfrac{\{\lfloor इ_{१}\}^{२}इ_{१}^{२न-२}}{(न^{२}-म^{२})\{(न+१)^{२}-म^{२}\}\ \ \{(न+इ_{१}-१)^{२}-म^{२}\}}}$$

$$= \frac{(न^2 - म^2)\{(न+१)^2 - म^2\} \cdot \{(न+इ_1-१)^2 - म^2\}}{न^2(न+१)^2 \cdots\cdots (न+इ_1-१)^2}$$

$$= \left\{१ - \frac{म^2}{न^2}\right\}\left\{१ - \frac{म^2}{(न+१)^2}\right\}\left\{१ - \frac{म^2}{(न+२)^2}\right\} \cdots\cdots (४)$$

२०५ । ऊपर के प्रक्रम के (४) समीकरण मे यदि न = १ तो

$$\frac{१}{गा(१-म)गा(१+म)} = \left(१ - \frac{म^2}{१^2}\right)\left(१ - \frac{म^2}{२^2}\right)\left(१ - \frac{म^2}{३^2}\right)\cdots\cdots$$

$= \frac{ज्याम\pi}{म\pi}$ (चलनकलन के २०वे प्रकम के (८)वे उदाहरण से)

इस लिये $गा(१-म)\ गा(१+म) = \frac{म\pi}{ज्याम\pi}$

परन्तु २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से $गा\ (१+म) = म\ गा(म)$

इस लिये $गा(१-म)\ गा(म) = \frac{\pi}{ज्याम\pi}$ यह सिद्ध हुआ ।

२०६ । यदि $या = गा\left(\frac{१}{न}\right)गा\left(\frac{२}{न}\right)गा\left(\frac{३}{न}\right)\cdots गा\left(\frac{न-१}{न}\right)$ जहां न धन अभिन्न है

तो $या = गा\left(१-\frac{१}{न}\right)गा\left(१-\frac{२}{न}\right)\cdots गा\left(\frac{१}{न}\right)$ उलट के लिखने से इस

लिये $या^2 = गा\left(\frac{१}{न}\right)गा\left(१-\frac{१}{न}\right)गा\left(\frac{२}{न}\right)गा\left(१-\frac{२}{न}\right)\cdots गा\left(\frac{१}{न}\right)गा\left(१-\frac{१}{न}\right)$

$$= \frac{\pi^{न-१}}{ज्या\frac{\pi}{न}ज्या\frac{२\pi}{न}\cdots ज्या\frac{(न-१)\pi}{न}} \text{ (ऊपर के प्रक्रम से)}$$

परन्तु चलनकलन के ३१६ प्रक्रम के (१) समीकरण से यदि न के स्थान में २न का उत्थापन दो तो

$$\frac{य^{२न}-१}{य^2-१} = \left(१-२\,यकोज्या\frac{\pi}{न}+य^2\right)\left(१-२यकोज्या\frac{२\pi}{न}+य^2\right)\cdots$$

$\left(१-२यकोज्या\frac{(न-१)}{न}\pi+य^2\right)$ इस में क्रम से य = १, य = —१ मान चार्यें पक्ष में उस का ठीक मान न रख देने से

$$न = \left(२ज्या\frac{\pi}{२न}\right)^2\left(२ज्या\frac{२\pi}{२न}\right)^2\cdots\left(२ज्या\frac{(न-१)\pi}{२न}\right)^2$$

$$न = \left(२कोज्या\frac{\pi}{२न}\right)^2\left(२कोज्या\frac{२\pi}{२न}\right)^2\cdots\left(२कोज्या\frac{(न-१)\pi}{२न}\right)^2$$

दोनों का घात कर मूल लेने से

$$न = २^{न-१} ज्या\frac{\pi}{न} ज्या\frac{२\pi}{न} \cdot \quad ज्या\frac{(न-१)\pi}{न}$$

इस लिये $या^२ = \frac{(२\pi)^{न-१}}{न}$ और $या = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{-\frac{१}{२}}$

२०७। यदि $फ(य) = \frac{न^{नय} गा(य) गा(य+\frac{१}{न}) गा(य+\frac{२}{न}) \cdot \; गा(य+\frac{न-१}{न})}{न गा(नय)}$ (१)

तो य के स्थान में य + १ का उत्थापन देने से

$$फ(य+१) = \frac{न^{नय+न} गा(य+१) गा(य+१+\frac{१}{न}) गा(य+१+\frac{२}{न}) \quad गा(य+१+\frac{न-१}{न})}{न\, गा\,(नय+न)}$$

$$= \frac{न^{न} न^{नय} य गा(य)\,(य+\frac{१}{न}) गा(य+\frac{१}{न})(य+\frac{२}{न}) गा(य+\frac{२}{न}) \; (य+\frac{न-१}{न}) गा(य+\frac{न-१}{न})}{न\, गा\,(नय+न)}$$

$$= \frac{न^{न} य\,(य+\frac{१}{न})(य+\frac{२}{न}) \quad \cdot \quad (य+\frac{न-१}{न}) फ(य)}{(न य+न-१)\,(न य+न-२) \quad \cdots न य} = फ(य+१)$$

$$= \frac{नय(नय+१)(नय+२)}{(नय+न-१)(नय+न-२)} \frac{(नय+न-१)}{नय} फ(य) = फ(य)$$

इसी तरह $फ(य+२) = फ(य+१) = फ(य) = फ(य+म)$ जहाँ म चाहे जैसा वड़ा मान सकते हैं। इस लिये $फ(य) = फ(इ_१)$ जहाँ $इ_१ = \infty$। इस लिये फ(य), य से स्वतन्त्र है अर्थात् फ(य) का मान सर्वदा एक ही होगा चाहे य का कोई मान हो। इस लिये जव $य = \frac{१}{न}$ तो (१) में उत्थान देने से।

$$फ(\;य\;) = गा(\frac{१}{न}) गा(\frac{२}{न}) गा(\frac{३}{न}) गा(\frac{न-१}{न}) = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{-\frac{१}{२}}$$ (२०६ प्रक्रम से)

और जव

$$\frac{न^{नय} गा\,(य)\, गा\,(य+\frac{१}{न})\, गा\,(य+\frac{२}{न}) \quad \cdot\, गा(+\frac{न-१}{न})}{न\, गा(नय)} = (२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{-\frac{१}{२}}$$

इस लिये।

$$गा(य) गा(य+\frac{१}{न}) गा(य+\frac{२}{न}) \cdots \; गा(य+\frac{न-१}{न}) = गा(नय)\,(२\pi)^{\frac{न-१}{२}} न^{\frac{१}{२}-नय}$$

$\cdot$ (२)

यह एक साधारण सिद्धान्त उत्पन्न हुआ। इसमे यदि $य = \frac{१}{न}$ तो २०६ प्रक्रम का सिद्धान्त उत्पन्न हो जायगा।

इस (२) समीकरण के सिद्धान्त को गौस (Gauss) ने वर्णन किया है।

२०८। ऊपर के प्रक्रम में (२) का लघुरिक्थ लेकर य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से।

$$\frac{\text{न}\acute{\text{गा}}(\text{नय})}{\text{गा}(\text{नय})} = \frac{\acute{\text{गा}}(\text{य})}{\text{गा}(\text{य})} + \frac{\acute{\text{गा}}(\text{य}+\frac{१}{\text{न}})}{\text{गा}(\text{य}+\frac{१}{\text{न}})} + \quad + \frac{\acute{\text{गा}}(\text{य}+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})}{\text{गा}(\text{य}+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})} + \text{नलान} \cdots (१)$$

जहाँ $\acute{\text{गा}}(\text{नय})$ इत्यादि $\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\{\text{गा}(\text{नय})\}$ इत्यादि के बोधक हैं।

(१) का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और नय के स्थान में ल को रखने से।

$$\frac{\text{ता}^२\text{लागा}(\text{ल})}{\text{ताल}^२}$$

$$= \frac{१}{\text{न}^२}\left\{\frac{\text{ता}^२\text{लागा}(\text{य})}{\text{ताय}^२} + \frac{\text{ता}^२\text{लागा}(\text{य}+\frac{१}{\text{न}})}{\text{ताय}^२} + \cdots + \frac{\text{ता}^२\text{लागा}(\text{य}+\frac{\text{न}-१}{\text{न}})}{\text{ताय}^२}\right\}$$

यदि न का मान अनन्त कल्पना करें तो दहने पक्ष का मान ४० प्रक्रम के अनुसार

$$\frac{१}{\text{न}}\int_{\text{य}}^{\text{य}+१} \frac{\text{ता}^२\text{लागा}(\text{य})}{\text{ताय}^२}\text{ताय} = \frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{\text{तालागा}(\text{य}+१)}{\text{ताय}} - \frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}}\right\}$$

$$= \frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{\text{तालाय}+\text{ताला गा}(\text{य})}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताला गा}(\text{य})}{\text{ताल}}\right\} = \frac{१}{\text{न}}\left\{\frac{१}{\text{य}}\right\} = \frac{१}{\text{नय}} = ०$$

इस लिये यदि नय अर्थात् ल अनन्त हो तो $\frac{\text{ता}^२\text{ला गा}(\text{ल})}{\text{ता}^२\text{ल}}$ यह शून्य के तुल्य होगा।

अब २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से।

$$\text{गा}(\text{य}) = \frac{\text{गा}(\text{य}+१)}{\text{य}} = \frac{\text{गा}(\text{य}+२)}{\text{य}(\text{य}+१)} = \frac{\text{गा}(\text{य}+३)}{\text{य}(\text{य}+१)(\text{य}+२)} = \frac{\text{गा}(\text{य}+\text{न})}{\text{य}(\text{य}+१)\ (\text{य}+\text{न}-१)},$$ जहाँ

न = ∞ इस के लघुरिक्थ का तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से।

$$\frac{\text{तालागा}(\text{य})}{\text{ताय}} = \frac{\text{तालागा}(\text{य}+\text{न})}{\text{ताय}} - \left(\frac{१}{\text{य}} + \frac{१}{(\text{य}+१)} + \cdots + \frac{१}{(\text{य}+\text{न}-१)}\right)$$

इस का फिर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से और ऊपर की युक्ति से $\frac{\text{ता}^२\text{लागा}(\text{य}+\text{न})}{\text{ताय}^२} = ०$ करने से।

$$\frac{\text{ता}^२\text{लागा}(\text{य})}{\text{ताय}^२} = \frac{१}{\text{य}^२} + \frac{१}{(\text{य}+१)^२} + \frac{१}{(\text{य}+२)^२} + \cdots \text{अनन्त} \cdots (२)$$

इस का य के १ और य के मान मे सान्तचलानयन करने से ।

$$\frac{\text{तालागा}(य)}{\text{ताय}} + \text{स्थि} = (१ - \frac{१}{य}) + (\frac{१}{२} - \frac{१}{य+१}) + (\frac{१}{३} - \frac{१}{य+२}) + \quad (३)$$

इस मे यदि य = १ तो दहना पक्ष शून्य हो जायगा इस लिये ।

$$\frac{\text{तालागा}(य)}{\text{ताय}} = -\text{स्थि} = \frac{\text{गा}'(१)}{\text{गा}(१)} = \text{गा}'(१)$$

अर्थात् स्थि = $-$गा'(१) । इसको यूलर का स्थिराङ्क कहते है । और (३) में जो श्रेढी उत्पन्न हुई है वह य के प्रत्येक धन मान मे सान्त होगी अर्थात् उसका प्रत्येक धन य के मान मे मान एक निश्चत संख्या के भीतर ही रहेगा ।

गा(न) = $\int_0^\infty इ^{-य} य^{न-१}$ ताय इस का १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से न के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से गा'(न) = $\int_0^\infty इ^{-य} य^{न-१}$ लायताय

इस लिये गा'(१) = $\int_0^\infty इ^{-य}$ लाय ताय

(१) समीकरण मे मानो कि य = १ तो

$$\frac{\text{गा}'(न)}{\text{गा}(न)} - \text{लान} = \frac{१}{न}\left\{\frac{\text{गा}'(१)}{\text{गा}(१)} + \frac{\text{गा}'(१+\frac{१}{न})}{\text{गा}(१+\frac{१}{न})} + \cdots + \frac{\text{गा}'(१+\frac{न-१}{न})}{\text{गा}(१+\frac{न-१}{न})}\right\}$$

इसमे यदि न = ∞ तो ४० प्रक्रम के श्रेढी द्वारा दहना पक्ष $\int_1^2 \frac{\text{तालागा}(य)}{\text{ताय}}$ = लागा(२) $-$ लागा(१) = ० क्योंकि २०१ प्रक्रम के (१) समीकरण से गा(२) = गा(१)

इस लिये यदि न = ∞ तो $\frac{\text{गा}'(न)}{\text{गा}(न)} - \text{लान} = ०$ ऐसा होगा ।

(३) मे यदि य = ∞ तो ऊपर की युक्ति से $\frac{\text{तालागा}(य)}{\text{ताय}} = \frac{\text{गा}'(य)}{\text{गा}(य)} - \text{लान} = ०$

इस लिये स्थि = $१ + \frac{१}{२} + \frac{१}{३} + \cdots + \frac{१}{न} -$ लान ।

परन्तु $\frac{१}{न} = \frac{१}{२} \times \frac{२}{३} \times \frac{३}{४} \cdots \frac{न-१}{न}$ इसलिये $-$लान = ला$\frac{१}{न}$ = ला$\frac{१}{२}$ + ला$\frac{२}{३}$ $\cdots$ + ला$\frac{न-१}{न}$

इस लिये स्थि = $१ + \frac{१}{२}$ + ला$\frac{१}{२}$ + $\frac{१}{३}$ + ला$\frac{२}{३}$ +

= $१ + \frac{१}{२}$ + ला $(१ - \frac{१}{२}) + \frac{१}{३}$ + ला $(१ - \frac{१}{३})$ +

इस लिये साधारण रीति से पहले पद को छोड़ कर दो दो पदों को मिला कर एक पद मानने से न संख्यक पद = $\frac{१}{न}$ + ला $(१ - \frac{१}{न})$

$$= \frac{१}{न} - \frac{१}{न} - \frac{१}{२न^२} - \frac{१}{३न^३} - \frac{१}{४न^४} - \cdots = -\frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \frac{१}{४न^२} + \cdots\right)$$

इस लिये $स्थि = १ - यौ\left\{\frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \frac{१}{४न^२} + \cdots\right)\right\}$

$$= १ + यौ\left\{\frac{१}{न} + ला\left(१ - \frac{१}{न}\right)\right\} \cdots \qquad (४)$$

जहाँ न के स्थान में २,३.४, इत्यादि का उत्थापन देने से $\frac{१}{न^२}\left(\frac{१}{२} + \frac{१}{३न} + \quad\right)$

इस के वा $\frac{१}{न} + ला\left(१ - \frac{१}{न}\right)$ इस के जितने मान होंगे उन का योग यौ से अपेक्षित है।

स्थिर का मान जानने के लिये (४) समीकरण में जितना ही अधिक दशमलव अपेक्षित हो उतनीही न की संख्या बढ़ाते जाओ।

स्थिर का मान १० दशमलव तक ५७७२१५६६४९ यह है। सौ दशमलव से भी अधिक स्थान तक इसका मान परिगणित है। (See Proceedings of the Royal Society, Vol XIX. P. 514, and Vol XX. P. 29)

२०९। ऊपर के प्रक्रम के (२) समीकरण में यदि य के स्थान में य + १ का उत्थापन दे

$$तो\ \frac{ता^२लागा(य+१)}{ताय^२} = \frac{१}{(य+१)^२} + \frac{१}{(य+२)^२} + \frac{१}{(य+३)^२} + \cdots\cdots ।$$

न–२ वार तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ता^नलागा(य+१)}{ताय^न} = (-१)^न \underline{|न-१} \left\{\frac{१}{(य+१)^न} + \frac{१}{(य+२)^न} + \frac{१}{(य+३)^न} + \cdots\right\}$$

कल्पना करो कि $सा_न = १ + \frac{१}{२^न} + \frac{१}{३^न} + \quad + अनन्त$

तो ऊपर के समीकरण में यदि य = ० और न $>$ २ तो

$$\frac{ता^नलागा(य+१)}{ताय^न} = सा_न(-१)^न \underline{|न-१}$$

परन्तु जब य = ० तो $\frac{तालागा(य+१)}{ताय} = \frac{गा'(१)}{गा(१)} = -स्थि$ (२०८ प्रक्रम के (३) समीकरण से) और लागा (१ + य) = लागा (१) = ला (१) = ०, इसलिये म्याकलौरिन (maclaurin) के सिद्धान्त से

$$\text{लागा}(१+\text{य}) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} - \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \frac{\text{सा}_४\text{य}^४}{४} - \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \cdot \quad (१)$$

यदि य का मान १ से अल्प हो तो यह श्रेढी सान्त होगी।

२०१ प्रक्रम का (१) समीकरण और २०५ प्रक्रम का अन्तिम समीकरण दोनो पर से सिद्ध है कि यदि य के ०, और $\frac{१}{२}$ के भीतर सब मानो मे गा(य) इस का मान विदित हो तो, $\frac{१}{२}$, १ इन मानो मे वा १, $१\frac{१}{२}$ इन मानो मे अर्थात् वार वार क्रिया करने से य के सब धन मानो मे गा(य) का मान जान सकते हैं।

परन्तु (१) समीकरण की श्रेढी य के ० से लेकर $\frac{१}{२}$ तक सब मानो मे लागा (१+य) इस का मान बनाती है फिर इन लघुरिक्थ पर से १, से ले $१\frac{१}{२}$ तक सब मानो मे गा(य) का मान निकल आवेगा, इस तरह सब य के धन मानो मे गा(य) का मान जान सकते हैं।

२१०। $\text{लागा}(१+\text{य}) = -\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} - \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} +$

इस लिये $\text{लागा}(१-\text{य}) = \text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} +$

$$\text{लागा}(१+\text{य}) + \text{लागा}(१-\text{य}) = \text{ला}\{\text{गा}(१+\text{य})\,\text{गा}(१-\text{य})\}$$

$$= \text{ला}\{\text{यगा}(\text{य})\text{गा}(१-\text{य})\} = \text{लाय} + \text{ला}\{\text{गा}(\text{य})\text{गा}(१-\text{य})\}$$

$$= \text{ला}\left(\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi}\right), \quad \dots \quad (\text{२०५ प्रक्रम से})$$

$$= २\left(\frac{\text{सा}_२\text{य}^२}{२} + \frac{\text{सा}_४\text{य}^४}{४} + \quad\right) = \text{ला}\{\text{गा}(१+\text{य})\text{गा}(१-\text{य})\} = \text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi}$$

इसी तरह $-२\left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \quad\right) = \text{ला}\left\{\frac{\text{गा}(१+\text{य})}{\text{गा}(१-\text{य})}\right\}$

दोनों को जोड़ देने से $\text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi} - २\left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \cdot\right)$

$= \text{ला}\{\text{गा}(१+\text{य})\}^२$

इस लिये $\text{ला}(१+\text{य}) = \frac{१}{२}\,\text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi} - \left(\text{स्थिय} + \frac{\text{सा}_३\text{य}^३}{३} + \frac{\text{सा}_५\text{य}^५}{५} + \cdot\right)$

$= \frac{१}{२}\,\text{ला}\frac{\text{य}\pi}{\text{ज्याय}\pi} - \text{ला}\frac{१+\text{य}}{१-\text{य}} + (१-\text{स्थि})\text{य} - \frac{१}{३}(\text{सा}_३-१)\text{य}^३ - \frac{१}{५}(\text{सा}_५-१)\text{य}^५ -$

य का मान $\frac{१}{२}$ से अल्प हो तो यह श्रेढी बहुत शीघ्र सान्त हो जायगी।

२११। गा (१+य) इस का न्यूनतम मान निकालना हो तो पीछे जो

लागा(१ + य) का मान निकला है उसका तात्कालिक सम्बन्ध निकाल उसको शून्य के तुल्य करो। इस तरह से यदि मान निकालो तो असकृद्विधि से

गा (१ + य) के न्यूनतम मान में, १ + य = १ ४६१६३२१४५११०५ ।

लेजेण्ड्र (Legendre) साहब ने लागा (य + १) के मान के लिये एक सारणी बना डाली है जिस में से संक्षेप कर के य के १,२ मानो के भीतर लागा (य) के मान हम इस अध्याय के अन्त मे लिखेंगे ।

२१२। बहुत से सान्तचलो का मान गाढ फल के रूप में आ जाता है जैसे $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^2\text{य}^2}$ ताय इसमे यदि $\text{अ}^2\text{य}^2 = \text{र}$ तो

$$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^2\text{य}^2}\text{ताय} = \int_0^\infty \frac{\text{इ}^{-\text{र}}\text{तार}}{\text{२अ}\sqrt{\text{र}}} = \int_0^\infty \frac{\text{इ}^{-\text{र}}\text{र}^{\frac{1}{2}-1}\text{तार}}{\text{२अ}} = \frac{1}{\text{२अ}}\text{गा}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

(गाढ़ फल के लक्षण से) $= \frac{\sqrt{\pi}}{\text{२अ}}$ (२०५ वे प्रकम से)

$$\text{और} \int_0^1 \frac{\text{य}^{\text{द}-1}(1-\text{य})^{\text{म}-1}}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{द}+\text{म}}}\text{ताय}$$

इस मे यदि $\frac{\text{य}}{\text{य}+\text{अ}} = \frac{\text{र}}{1+\text{अ}}$ तो $\text{य} = \text{रअ} - 1 + \text{अ} - \text{र}$

$$\int_0^1 \frac{\text{य}^{\text{द}-1}(1-\text{य})^{\text{म}-1}}{(\text{य}+\text{अ})^{\text{द}+\text{म}}}\text{ताय} = \frac{1}{\text{अ}^{\text{म}}(1+\text{अ})^{\text{द}}}\int_0^1 \text{र}^{\text{द}-1}(1-\text{र})^{\text{म}-1}\text{तार}$$

$$= \frac{1}{\text{अ}^{\text{म}}(1+\text{अ})^{\text{द}}}\text{बी}(\text{द},\text{म})\frac{1}{\text{अ}^{\text{म}}(1+\text{अ})^{\text{द}}}\frac{\text{गा}(\text{द})\,\text{गा}(\text{म})}{\text{गा}(\text{द}+\text{म})}$$ (२०३ प्रक्रम से)

फिर $\int_0^1 \text{य}^{\text{द}-1}(1-\text{य}^2)^{\text{म}-1}$ताय इस में मानो कि $\text{य}^2 = \text{र}$ तो

$$\int_0^1 \text{य}^{\text{द}-1}(1-\text{य}^2)^{\text{म}-1}\text{ताय} = \tfrac{1}{2}\int_0^1 \text{र}^{\frac{\text{द}}{2}-1}(1-\text{र})^{\text{म}-1}\text{तार} = \frac{\text{गा}(\frac{\text{द}}{2})\text{गा}(\text{म})}{\text{२गा}(\frac{\text{द}}{2}+\text{म})}$$

इस तरह से $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{प}}\text{प}\,\text{को ज्या}^{\text{व}}\text{प}$ ताप इसमे यदि ज्याप = य तो

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्या}^{\text{प}}\text{प}\ \text{कोज्या}^{\text{व}}\text{प}\ \text{ताय} = \int_0^1 \text{य}^{\text{प}+1-1}(1-\text{य}^2)^{\frac{\text{व}+1}{2}-1}\ \text{ताय}$$

$$= \frac{\text{गा}(\frac{\text{प}+1}{2})\text{गा}(\frac{\text{व}+1}{2})}{\text{२गा}(\frac{\text{प}+\text{व}}{2}+1)}$$

फिर $\int_0^१ \frac{य^{द-१}(१-य)^{म-१}ताय}{\{अय+क(१-य)\}^{द+म}}$ इस से मानो कि $य = \frac{कर}{अ(१-र)+कर}$ तो

इसका रूप $= \frac{१}{अ^द क^म} \int_0^१ र^{द-१}(१-र)^{म-१}तार = \frac{गा(द)गा(म)}{अ^द क^म गा(द+म)}$

फिर $\int_0^अ य^{द-१}(अ-य)^{म-१}ताय$ इस से मान लो कि य = अर तो इस का

रूप $= अ^{द+म-१} \int_0^१ र^{द-१}(१-र)^{म-१}तार = अ^{द+म-१} \frac{गा(द)गा(न)}{गा(द+न)}$ . . (१)

२१३। $\iiint य^{द-१}र^{म-१}ल^{न-१}$ ताल तार ताय . इस अनेक गुण चल का मान गाढ़ फल के रूप में ले आओ। जहाँ जानते हैं कि य + र + ल + < १ और सब चल संख्याओ का मान ऐसा माना गया है जिसमे अनेक गुण चल का मान धन हो।

यहाँ पहले ल के वश से चलानयन करने से और ०, १ − य − र सीमा मानने से $\int ल^{न-१}ताल = \frac{(१-य-र)^न}{न} = \frac{गा(न)}{गा(न+१)}(१-य-र)^न$ फिर र के वश से चलानयन करने से र के ०, १−य के मान के भीतर

$\int र^{म-१}(१-य-र)^न तार = \frac{(१-य)^{म-न}(गाम)गा(न+१)}{गा(म+न+१)}$, २१२ प्रक्रम के (१) समीकरण से

अन्त में य के वश चलानयन से और ०, १ सीमा मानने से।

$\int य^{द-१}(१-य)^{म-न}ताय = \frac{गा(द)गा(न-न-१)}{गा(द-म-न-१)}$ इस लिये अभीष्ट अनेक गुण

चल का मान $\frac{गा(न)}{गा(न-१)} \cdot \frac{गा(म)गा(न-१)}{गा(म-न+१)} \cdot \frac{गा(द)गा(म+न+१)}{गा(द-म-न-१)}$

२१४। $\iiint \cdot अ_१^{द-१}क_१^{म-१}ख_१^{न-१} \ldots$ ताख, ताक, ताअ₁ इसका मान गाढ़ फल के रूप में जानना है

जहाँ $\left[\frac{अ_१}{अ}\right]^प + \left[\frac{क_१}{क}\right]^ब + \left[\frac{ख_१}{ख}\right]^म + \cdot \cdot < १$ और चल संख्याओं का मान ऐसा है जिस में सब धन मान हैं।

मान लो कि $य = \left[\frac{अ_१}{अ}\right]^प$ $र = \left[\frac{क_१}{क}\right]^ब$, $ल = \left[\frac{ख_१}{ख}\right]^म$, ...

तो ऊपर के प्रक्रम से चल का रूप

$$= \frac{अ^{द}क^{म}ख^{न}\quad\cdot}{प\,व\,भ\quad\cdot\cdot}\quad\frac{गा(\frac{द}{प})गा(\frac{म}{व})गा(\frac{न}{भ})}{गा(\frac{द}{प}+\frac{म}{व}+\frac{न}{भ}+\cdot\cdot+१)}$$

यह सिद्धान्त लेज्यून डिरिचलेट् (Lejeune Dirichlet.) का निकाला है।

इस में यदि प = व = $\cdot$ = १ और च = अ = क = ख तो

$$अ_१ + क_१ + ख_१ + \cdots < च$$

$$\iiint अ_१^{द-१}क_१^{म-१}ख^{न-१}\quad ताख_१ताक_१ताअ_१$$

$$= \frac{च^{द+म+न}गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न+\quad +१)} = ना\, च^{द+म+न+}$$

जहाँ ना $= \frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न+\quad+१)}$

इसी प्रकार यदि चलानयन ऐसा किया जाय जिस में $अ_१ + क_१ + ख_१ +$

$$< च + \triangle च$$

तो ऊपर की युक्ति से उस का मान $ना(च+\triangle च)^{द+म+न}$ ऐसा होगा।

इस लिये दोनो का अन्तर $ना\{(च+\triangle च)^{द+म+न+} - च^{द+म+न+\cdot}\}$

$= ना(द+म+न+\cdot\quad)च^{द+म+न+\quad १}\triangle च$ यदि $\triangle च$ अत्यन्त अल्प हो

$$= \frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न+\quad)}च^{द+म+न+\quad -१}\triangle च$$

२१५। $\iiint य^{द-१}र^{म-१}ल^{न-१}\quad फ(य+र+ल+\quad)तालतारताय$ इस का मान एक चलानयन के रूप मे ले आना है, जहाँ चलानयन ऐसा किया गया है जिस में सब चलो के धन मान लिये गये है जहाँ $य+र+ल+\quad < ग$।

लाघव के लिये मान लो कि तीन चलराशि है।

यहाँ ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि फ(य+र+ल) के स्थान मे १ मान लें तो उस भाग का चल जो कि योग के च, च + △ च के भीतर है $\frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न)}च^{द+म+न\quad\cdot-१}\triangle च$ यह होगा

परन्तु फ(य + र + ल) = फ(च) के स्थान मे १ रख कर ऊपर का मान दिखलाया है इस लिये उस को फ(च) से गुण देने से

$\frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न)}फ(च)च^{द+म+न+\quad -१}\triangle च$ यह एक खण्ड की गति हुई

इस लिये सम्पूर्ण चल = $\frac{गा(द)गा(म)गा(न)}{गा(द+म+न)}\int_0^{ग} फ(च)\, च^{द+म+न+\cdots-१}$ ताच यही रीति चाहे जितनी चलराशि हो सर्वत्र दिखलाई जा सकती है।

२१६। इसी प्रकार त्रिगुण चल

$$\iiint अ_१^{द-१}क_१^{म-१}ख_१^{न-१} फ\left\{\left(\frac{अ_१}{अ}\right)^{प}+\left(\frac{क_१}{क}\right)^{व}+\left(\frac{ख_१}{ख}\right)^{भ}\right\}$$

ताख, ताक, ताअ, यह जहाँ चलराशियों के सब धन मान मे

$\left[\frac{अ_१}{अ}\right]^{प}+\left[\frac{क_१}{क}\right]^{व}+\left[\frac{ख_१}{ख}\right]^{भ}$ यह ग से अधिक नही है

$$\frac{अ^{द}क^{म}ख^{म}}{पवभ}\;\frac{गा\left(\frac{द}{प}\right)गा\left(\frac{म}{व}\right)गा\left(\frac{न}{भ}\right)}{गा\left(\frac{द}{प}+\frac{म}{व}+\frac{न}{भ}\right)}\int_0^{ग} फ(च) च^{\frac{द}{प}+\frac{म}{व}+\frac{न}{भ}-१} \text{ ताच}$$

इसके तुल्य होगा।

यह रीति चाहे जितनी चलराशि हो सर्वत्र दिखलाई जा सकती है।

२१७। $\iint \frac{य^{प-१}र^{व-१} ताय\, तार}{(त+अय+कर)^{प+व}}$ इसका रूप साधारण चलानयन के अर्थात् एक चलानयन के स्वरूप मे ले आना है जहाँ य, र के सब मान धन हैं और य+र यह ज से अधिक नहीं है। और प, व, त, अ, और क सब धन स्थिराङ्क है। मान लो कि अ > क तो

$$त+अय+कर = त+अ(य+र)-(अ-क)र = श-ह$$

जहाँ श = त+अ(य+र), ह = (अ−क) र

इस लिये $(त+अय+कर)^{-प-व}$

$$= श^{-प-व}\left\{१+(प+व)\frac{ह}{श}+\frac{(प+व)(प+व+१)}{\lfloor २}\frac{ह^२}{श^२}+\cdots\right\}$$

यह श्रेढ़ी सान्त होगी।

अब ऊपर का द्विगुण चल २१५ वे प्रक्रम से एक चलानयन के रूप में आ सकता है अर्थात् $\iint \frac{य^{प-१}र^{व-१} तायतार}{(त+अय+कर)^{प+व}}$

$$= \iint\left[\frac{य^{प-१}र^{व-१}}{श^{प+व}}+\frac{(प+व)(अ-क)य^{प-१}र^{व}}{श^{प+व+१}}\right.$$

$$\left.+\frac{(प+व)(प+व+१)(अ-क)^२य^{प-१}र^{व+१}}{\lfloor २\; श^{प+व+२}}+\quad\right] तायतार$$

$$= \int_0^{ज} \left\{ \frac{गा(प)गा(व)}{गा(प+व)} \frac{ट^{प+व-१}}{(त+अट)^{प+व}} + \frac{गा(प)गा(व+१)}{गा(प+व+१)} (प+व)(अ-क) \frac{ट^{प+व}}{(त+अट)^{प+व+१}} \right.$$

$$\left. + \frac{गा(प)गा(व+२)}{गा(प+व+२)} \frac{(प+व)(प+व+१)}{\lfloor २} \frac{(अ-क)^२ ट^{प+व+१}}{(त+अट)^{प+व+२}} + \quad \right\} ताट$$

$$= गा(प) \int_0^{ज} \frac{ट^{प+व-१}}{(त+अट)^{प+व}} \left\{ \frac{गा(व)}{गा(प+व)} + \frac{(प+व)\, गा(व+१)}{गा(प+व+१)} \frac{(अ-क)ट}{(त+अट)} \right.$$

$$\left. + \frac{(प+व)(प+व+१)गा(व+२)(अ-क)^२ ट^२}{गा(प+व+२) \quad १ \cdot २(त+अट)^२} + \quad \right\} ताट$$

$$= \frac{गा(प)गा(व)}{गा(प+व)} \int_0^{ज} \frac{ट^{प+व-१}}{त+अट^{प+व}} \left\{ १ + \frac{व(अ-क)ट}{त+अट} + \frac{व(व+१)}{\lfloor २} \frac{(अ-क)^२ ट^२}{(त+अट^२)} + \cdots \right\} ताट$$

$$= \frac{गा(प)गाव}{गा(प+व)} \int_0^{ज} \frac{ट^{प+व-१}}{(त+अट)^{प+व}} \left\{ १ - \frac{(अ-क)ट}{त+अट} \right\}^{-व} ताट$$

$$\frac{गा(प)गाव}{गा(प+व)} \int_0^{ज} \frac{ट^{प+व-१} ताट}{(त+अट)^{प}(त+कट)^{व}}$$

इस तरह से अनेक सिद्धान्त वना सकते हो।

२१८। $\int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२}$ कोज्या२रयताय इस का मान जानना है जहाँ र और य परस्पर स्वतन्त्र है। मान लो कि उद्दिष्ट सान्तचल = स है तो १९४ प्रक्रम के (१) समीकरण से

$$\frac{तास}{तार} = -२ \int_0^{\infty} यइ^{-अ^२य^२} ज्या२रयताय$$

$$परन्तु \int यइ^{-अ^२य^२} ज्या२रयताय$$

$$= -\frac{इ^{-अ^२य^२} ज्या२रय}{२अ^२} + \frac{२र}{२अ^२} \int इ^{-अ^२य^२} कोज्या२रयताय$$

(खण्ड चलानयन से)

$$इस लिये \int_0^{\infty} यइ^{-अ^२य^२} ज्या२रयताय = \frac{२र}{२अ^२} \int_0^{\infty} इ^{-अ^२य^२} कोज्या२रय$$

$$= \frac{२रस}{२अ^२} \text{ इस लिये } \frac{तास}{तार} = -\frac{२रस}{अ^२}$$

स का भाग दे देने से

$$\frac{\frac{\text{ताम}}{\text{स}}}{\text{तार}} = \frac{\text{ताला(स)}}{\text{तार}} = -\frac{२\text{र}}{\text{अ}^२} \therefore \text{लास} = -\frac{\text{र}^२}{\text{अ}^२} + \text{स्थि}$$

इस लिये $\text{स} = \text{आ}\ \text{इ}^{-\frac{\text{र}^२}{\text{अ}^२}}$

जहाँ आ कोई र के वश से स्थिराङ्क है।

मान लो कि र = ० तो $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२}\text{ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२\text{अ}}$ (२१२ वें प्रक्रम से)

इस लिये $\text{आ} = \frac{\sqrt{\pi}}{२\text{अ}}$, और

$$\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२}\ \text{कोज्या}२\text{रयताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{२\text{अ}}\ \text{इ}^{-\frac{\text{र}^२}{\text{अ}^२}}$$

यद्यपि १९४ प्रक्रम में लिख आये हैं कि यदि कोई सीमा अनन्त के तुल्य न हो तब १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण सत्य होगा परन्तु इस स्थान में अनन्त सीमा होने पर भी ठीक होगा क्योंकि दूसरा खण्ड यहाँ पर $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२}\text{इ}_१\text{ताय}$ शून्य ही होगा यदि $\text{इ}_१ = ०$ हो तो क्योंकि ४०वे प्रक्रम की युक्ति से मान लो कि श्रेढी मे $\text{इ}_१$ का सब से बड़ा मान यदि $\text{इ}_२$ हो तो $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२}\text{इ}_१\ \text{ताय}$ यह $\text{इ}_२ \int_0^\infty \text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२}\text{ताय}$ इस से अर्थात् $\frac{\sqrt{\pi}}{२\text{अ}}\text{इ}_२$ इस से छोटा होगा।

परन्तु कल्पना जैसा किया है उस के धर्म से $\text{इ}_२ = ०$ होगा इस लिये दूसरे खण्ड का नाश हो जाने से १९४ प्रक्रम का (१) समीकरण यहाँ ठीक ही हुआ।

२११। ९ $\int_0^\infty \text{इ}^{-\text{जय}}\ \frac{\text{ज्यारय}}{\text{य}}\text{ताय}$ इस का मान जानना है जहाँ ज स्थिराङ्क और र, य परस्पर स्वतन्त्र हैं। यहाँ मान का मान स मान लो तो १९४ प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताम}}{\text{तार}} = \int_0^\infty \text{इ}^{-\text{जय}}\text{कोज्यारयताय}$$

परन्तु $\int \text{इ}^{-\text{जय}}\text{कोज्यारयताय}$

$$= \text{इ}^{-\text{जय}}\frac{\text{रज्यारय} - \text{जकोज्यारय}}{\text{ज}^२ + \text{र}^२}\ \text{खण्ड चलानयन से}$$

इस लिये $\int_0^\infty$ इ$^{-जय}$ कोज्यारयताय $= \frac{ज}{ज^2+र^2}$ ... ... (१)

इस तरह से $\frac{तास}{तार} = \frac{ज}{ज^2+र^2}$

इस लिये $स = स्प^{-1}\frac{र}{ज}$ .. . . (२)

यहां पर स्थिराङ्क की अपेक्षा नहीं है क्योंकि यदि र = ० तो सभी शून्य हो जायगा। यहां ज के सब धन मान में स का मान ठीक होगा इस लिये यदि ज = ०

तो $स = स्प^{-1}\frac{र}{ज} = \frac{\pi}{2} = \int_0^\infty \frac{ज्याजय}{य}$ ताय

यदि ज ऋणात्मक हो तो स का मान—$\frac{\pi}{2}$ होगा।

इस पर से $\int_0^\infty \frac{ज्या कय कोज्या अय}{य}$ ताय इसका मान जान सकते है क्योंकि सरलत्रिकोणमिति से यह

$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ज्या (क+अ)य}{य}$ ताय $+ \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{ज्या (क—अ)य}{य}$ ताय

इस के तुल्य हुआ और (२) समीकरण में ज = ० मानने से दोनों खण्डों का मान $\frac{\pi}{4}$ इस लिये।

$\int_0^\infty \frac{ज्याकय कोज्या अय}{य}$ ताय $= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ परन्तु यदि अ > क तो

ऊपर की युक्ति से $\int_0^\infty \frac{ज्या कय कोज्या अय}{य}$ ताय = ० यह होगा।

२२०। $स = \int_0^\infty इ^{-\left(य^2+\frac{अ^2}{य^2}\right)}$ ताय इस का मान जानना है।

यहां $\frac{तास}{ताअ} = —२अ\int_0^\infty इ^{-\left(य^2+\frac{अ^2}{य^2}\right)} \frac{ताय}{य^2}$ इस में यदि $य = \frac{अ}{ल}$

तो $य^2 + \frac{अ^2}{य^2} = \frac{अ^2}{ल^2} + ल^2$, $\frac{ताय}{य^2} = —\frac{अ\ ताल}{ल^2} \times \frac{ल^2}{अ} = -$ ताल

इस लिये $\frac{तास}{ताअ} = -२\ अ\int_0^\infty इ^{-\left(य^2+\frac{अ^2}{य^2}\right)} \frac{ताय}{य^2}$

$$= २\ अ\int_0^\infty इ^{-\left(ल^2+\frac{अ^2}{ल^2}\right)} ताल$$

$$= -२ अ \int_{०}^{\infty} इ^{-\left(ल^२ + \frac{अ^२}{ल^२}\right)} ताल = -२ अ स$$

इस लिये $\quad ताल स = -२ ता अ$

$\therefore \quad लास = -२ अ + स्थि$

इस लिये $\quad स = आ\, इ^{-२अ}$

ऊपर के स मान में यदि अ = ०, $स = \int_{०}^{\infty} इ^{-य^२} ताय = \frac{\sqrt{\pi}}{२}$ (२१२वे प्रक्रम से)

इस लिये $आ = \frac{\sqrt{\pi}}{२}$ और $स = \frac{\sqrt{\pi}}{२} इ^{-२अ} = \int_{०}^{\infty} इ^{-\left(य^२ + \frac{अ^२}{य^२}\right)} ताय$

२२१। $\int_{०}^{१} य^म (लाय)^न ताय = स$, इस का मान जानना है।

यहां यदि $य = इ^{-ल}$ तो

$$स = \int_{०}^{१} य^म (लाय)^न ताय = (-१)^न \int_{०}^{\infty} इ^{-(म+१)ल} ल^न ताल$$

$$= \frac{(-१)^न}{(म+१)^{न+१}} \int_{०}^{\infty} इ^{-(म+१)ल} \{ल(म+१)\}^न (म+१) ताल$$

$$= \frac{(-१)^न}{(म+१)^{न+१}} \int_{०}^{\infty} इ^{-ल'} ल'^न ताल' \text{। (यदि } (म+१) ल = ल' \text{)}$$

$$= \frac{(-१)^न गा (न+१)}{(म+१)^{न+१}}$$

यदि लाय के स्थान में $-ला\left(\frac{१}{य}\right) = (-१)\, ला \frac{१}{य}$ रखलें तो

$$\int_{०}^{१} य^म (लाय)^न ताय = \int_{०}^{१} य^म (-१)^न \left(ला \frac{१}{य}\right)^न ताय$$

$$= (-१)^न \int_{०}^{१} य^म \left(ला \frac{१}{य}\right)^न ताय = \frac{\{(-१)^न\}^२}{(म+१)^{न+१}} गा (न+१) = \frac{गा (न+१)}{(म+१)^{न+१}}$$

२२२। $\int_{०}^{१} \frac{लाय\, ताय}{१-य} = \int_{०}^{१} लाय\, ताय\, (१ + य + य^२ + \dots)$

$$= -\left(१ + \frac{१}{२^२} + \frac{१}{३^२} + \dots\right) \text{। (ऊपर के उदाहरण से)}$$

$$= -\frac{\pi^२}{६} \text{। (चलनकलन के २० वें प्रक्रम का (९) उदाहरण दे)}$$

इस तरह से अनेक उदाहरण कर सकते हो।

२२३। कल्पना करो कि

$$स = \int_{अ}^{क} फ (य,ग) \, ताय$$

तो $$स \, ताग = \int_{अ}^{क} फ(य,ग) \, ताय \, ताग$$

इस लिये

$$\int_{अ_1}^{क_1} स \, ताग = \int_{अ_1}^{क_1} \int_{अ}^{क} फ(य,ग) \, ताय \, ताग$$

$$= \int_{अ}^{क} \int_{अ_1}^{क_1} फ(य,ग) \, ताग \, ताय$$ । ६३वें प्रक्रम से

इस पर से भी अनेक सान्तचलो के मान बड़े लाघव से सिद्ध हो जाते हैं।

२२४। जानते हैं कि $\int_{0}^{\infty} इ^{-जय} \, ताय = \frac{१}{ज}$ । १९० प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो

इस लिये ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से यदि ज = ग, क = ∞, अ = ० तो

$$\int_{अ_1}^{क_1} स \, ताग = \int_{अ_1}^{क_1} \frac{ताज}{ज} = ला \frac{क_1}{अ_1} = \int_{0}^{\infty} \int_{अ_1}^{क_1} फ(य,ग) ताग ताय$$

परन्तु $$\int फ(य,ग) \, ताग = \int फ(य,ज) ताज = \int इ^{-जय} ताज$$

$$= -\frac{इ^{-जय}}{य}$$, इस लिये

$$\int_{अ_1}^{क_1} इ^{-जय} ताज = \frac{इ^{-अ_1 य} - इ^{-क_1 य}}{य}$$ इस लिये

$$\int_{0}^{\infty} \int_{अ_1}^{क_1} फ(य,ज) \, ताज \, ताय = \int_{0}^{\infty} \frac{इ^{-अ_1 य} - इ^{-क_1 य}}{य} \, ताय = ला \frac{क_1}{अ_1}$$

२२५। खण्डचलानयन से जानते हैं कि

$$\int_{0}^{\infty} इ^{-गय} \, कोज्याअ_1 य \, ताय = \frac{ग}{ग^2 + अ_1^2}$$

दोनों पक्षो का ग के वश चलानयन करने से और ग की सीमा, अ, क मानने से।

$$\int_0^\infty \frac{इ^{-अय} - इ^{-कय}}{य} कोज्याअ_१य \; ताय = \frac{१}{२} ला \frac{क^२ + अ_१^२}{अ^२ + अ_१^२}$$

२२६। यदि $आ = \int_0^\infty \frac{ज्याअ_१य}{य} ताय$ और $का = \int_0^\infty \frac{कोज्याअ_१य}{१ + य^२} ताय$

आ में यदि $अ_१य = र$

तो $आ = \int_0^\infty \frac{ज्यार}{र} तार$। इस लिये $अ_१$ से आ का कुछ भी सम्बन्ध नहीं है और २१९ वे प्रक्रम की युक्ति से $आ = \frac{\pi}{२}$

$$अब \quad का = \int_0^\infty \frac{कोज्याअ_१य}{१ + य^२} ताय$$

$$इस \; लिये \; \frac{ताका}{ताअ_१} = \int_0^\infty - \frac{य \; ज्या \; अ_१य}{१ + य^२} ताय$$

$$और \int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ = \int_0^\infty \frac{ज्या \; अ_१य}{य(१ । य^२)} ताय$$

$$इस \; लिये \int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ - \int \frac{ताका}{ताअ_१} = \int_0^\infty \frac{(१ + य^२) ज्याअ_१य}{य(१ + य^२)} ताय = आ$$

समशोधन करने से

$$\int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ - \frac{ताका}{ताग_१} - आ = ० \qquad (१)$$

(१) को $इ^{-अ_१} ताअ_१$ से गुणकर $अ_१$ के वश से चलानयन करने से $इ^{-अ_१} \left(\int_0^{अ_१} का \; ताअ_१ + का - आ \right) = स्थिराङ्क$

इसलिये $अ_१$ का चाहे जो मान हो (१) का चल कोई नियत संख्या के तुल्य होगा इस लिये यदि $स_१$ अनन्त के तुल्य हो तो पिछले समीकरण मे स्थिराङ्क ज़ून्य के तुल्य होगा क्योंकि उसका वायाँ पक्ष शून्य के तुल्य होता है इस लिये $अ_१$ के अनन्त मान मे

$$इ^{-अ_१}\left(\int_0^{अ_१} का\ ताअ_१ + का - आ\right) = ० = \int_0^{अ_१} का\ ताअ_१ + का - आ, \quad \cdots (२)$$

इस लिये (१) और (२) के अन्तर से

$$\frac{ताका}{ताअ_१} = -का$$

इस लिये $का = आ_१\ इ^{-अ_१}$ जहाँ $आ_१$ कोई स्थिराङ्क है

और $\int का\ ताअ_१ = \int आ_१\ इ^{-अ_१} ताअ_१ = -आ_१ इ^{-अ_१}$

इस लिये $\int_0^{अ_१} का\ ताअ_१ = आ_१ - आ_१ इ^{-अ_१}$

(२) में इन का उत्थापन देने से

$$\int_0^{अ_१} काताअ_१ + का - आ = आ_१ - आ_१ इ^{-अ_१} + आ_१ इ^{-अ_१} - आ = आ_१ - आ = ०$$

$\therefore$ $अ_१ = आ$ इस लिये $का = आ\ इ^{-अ_१}$ .. .. (३)

यदि $अ_१$ को अत्यल्प मानें अर्थात् $अ_१ = ०$ तो

$$का = \int_0^{\infty} \frac{कोज्याअ_१ य}{१ + य^२} ताय = \int_0^{\infty} \frac{ताय}{१ + य^२} = \frac{\pi}{२} = आ$$

इस लिये (३) से $का = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१}$

यदि $अ_१$ ऋण हो तो (३) से $का = \frac{\pi}{२} इ^{अ_१}$ ऐसा होगा और २१९ वें प्रक्रम की युक्ति से $आ = -\frac{\pi}{२}$

२२७। २२६ प्रक्रम से सिद्ध हुआ है कि

$\int_0^{\infty} \frac{कोज्याअ_१ यताय}{१ + य^२} = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१}$ इसका $अ_१$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$\int_0^{\infty} \frac{यज्याअ_१ य\ ताय}{१ + य^२} = \frac{\pi}{२} इ^{-अ_१}$ और चलानयन कर मान $अ_१$ के ०, ग के मान के भीतर ले आवे तो

$$\int_0^{\infty} \frac{ज्यागय}{य(१ + य^२)} ताय = \frac{\pi}{२}\left(१ - इ^{-अ_१}\right)$$

२२८। खण्डचलानयन से सिद्ध है कि

$$\int इ^{-अय} ज्याअ_१य \text{ ताय} = -इ^{-अय} \frac{अज्याअ_१य + अ_१कोज्याअ_१य}{अ^२ + अ_१^२}$$

और $$\int इ^{-अय} कोज्याअ_१य \text{ ताय} = इ^{-अय} \frac{अ_१ज्याअ_१य - अकोज्याअ_१य}{अ^२ + अ_१^२}$$

इन पर से $$\int_0^\infty इ^{-अय} ज्या\,अ_१य \text{ ताय} = \frac{अ_१}{अ^२ + अ_१^२}$$

और $$\int_0^\infty इ^{-अय} कोज्या\,अ_१य \text{ ताय} = \frac{अ}{अ^२ + अ_१^२}$$ । यदि अ धनात्मक हो।

इन मे यदि अ = ० तो

$$\int_0^\infty ज्याअ_१य \text{ ताय} = \frac{अ_१}{अ_१^२} = \frac{१}{अ_१}$$

और $$\int_0^\infty कोज्याअ_१य \text{ ताय} = ०$$

परन्तु $$\int ज्याअ_१य \text{ ताय} = -\frac{कोज्याअ_१य}{अ_१}$$

और $$\int कोज्याअ_१य \text{ ताय} = \frac{ज्याअ_१य}{अ_१}$$

इसलिये

$$\int_0^\infty ज्याअ_१य = -कोज्या\ (\infty) + \frac{१}{अ_१} = \frac{१}{अ_१}$$

$$\therefore \quad कोज्या\ (\infty) = ०$$

और $$\int_0^\infty कोज्याअ_१य \text{ ताय} = ज्या\ (\infty) + ० = ०$$

$$\therefore \quad ज्या\ (\infty) = ०$$

इन पर से यह सिद्ध होता है कि यदि कोण का मान अनन्त हो तो उस की ज्या और कोटिज्या दोनो शून्य के समान होती है यह अत्यन्त चमत्कार है। इस पर गणितज्ञों ने वहुत ही विचार किया है जिसका वर्णन इस चलराशिकलन की पुस्तक में विद्यार्थियों के लिये दुर्बोध कारक है। मेरी समझ में जिस अनन्त कोण के मान में ज्या शून्य होती है उसी अनन्त कोण के मान में कोटिज्या

शून्य के तुल्य नहीं होती है किन्तु दोनों अनन्त कोणों के मानों का अन्तर अवश्य $२म\pi \pm \frac{\pi}{२}$ इस के तुल्य होगा जहाँ म कोई अभिन्न संख्या है।

२२९। फल का विस्तर रूप बना कर भी कहीं कहीं सान्तचल का मान निकल आता है। जैसा कि २२२ प्रक्रम में दिखलाया है उसी चाल के कुछ और उदाहरण दिखलाते है।

यदि $ला \left\{ १ - अ\, इ^{\,य\sqrt{-१}} \right\}$ और $ला \left\{ १ + अइ^{-य\sqrt{-१}} \right\}$

इन दोनों का विस्तृत मान ले आकर जोड़ डालो तो

$$ला\,(१ - २\,अकोज्याय + अ^२)$$

$$= -२\left(अकोज्याय + \frac{अ^२}{२} कोज्या२य + \frac{अ^३}{३} कोज्या३य + \cdots\right)$$

यहाँ यदि $अ < १$ तो श्रेढी का मान सान्त होगा

इस लिये $\int ला\,(१ - २\,अकोज्याय + अ^२)\,ताय$

$$= -२\left(अज्याय + \frac{अ^२}{४} ज्या२य + \frac{अ^३}{९} ज्या३य + \cdots\cdots\right)$$

और $\int_०^{\pi} ला\,(१ - २अकोज्याय + अ^२)\,ताय = ०$।

यदि $अ > १$ तो $ला\,(१ - २अकोज्याय + अ^२)$

$$= लाअ^२ + ला\left(१ - \frac{२}{अ} कोज्याय + \frac{१}{अ^२}\right)$$

इस लिये अब ऊपर युक्ति से $\frac{१}{अ} < १$ इस लिये दूसरे खण्ड का मान शून्य निकलेगा और पहले का $\pi\, लाअ^२ = २\,\pi\, लाअ$ यह जो कि अभीष्ट मान होगा।

यदि $अ = १$ तो $\int ला\,(१ - २अकोज्याय + अ^२)\,ताय$

$$= \int ला\,\{२(१ - अकोज्याय)\}\,ताय = \int ला\,ज्या^२\frac{य}{२}\,ताय + ला\,४\int ताय$$

$$= \int २\,लाज्या\frac{य}{२}\,ताय + २\,ला\,२\int ताय$$

$$= ४\int लाज्याय'\,ताय' + २ला२\int ताय \quad यदि\ य' = \frac{य}{२}$$

$$= ४\int लाज्याय'\,ताय' + २\,य\,ला\,२$$

इसलिये $\int_0^{\pi}$ ला (१-२अकोज्याय + $अ^2$) ताय = ४ $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ लाज्यायं तायं + २πला२

२πला $\frac{\pi}{2}$ + २πला२ = ०, ५७ प्रक्रम के (३) उदाहरण से ।

तीनों स्वरूप को यदि एक ही समीकरण से दिखलाया चाहो तो पहले को
ला($अ^2$ − २अगकोज्याय + $ग^2$) ताय

= ला$अ^2$ + ला(१ − $\frac{२ग}{अ}$ कोज्याय + $\frac{ग^2}{अ^2}$) ताय ऐसे लिखो यदि अ > ग

और यदि ग > अ तो ला$ग^2$ + ला(१ − $\frac{२अ}{ग}$ कोज्याय + $\frac{अ^2}{ग^2}$) ताय ऐसे लिखो

तब $\int_0^{\pi}$ ला($अ^2$ − २अगकोज्याय + $ग^2$) ताय = २ π लाज

जहाँ दोनो अ और ग मे से जो अधिक है उसका द्योतक ज है ।

२३०। खण्डचलानयन से $\int$ ला(१−२ अकोज्याय + $अ^2$) ताय

= य ला(१−२अकोज्याय + $अ^2$) − २अ $\int \frac{\text{यज्याय ताय}}{१ - २अकोज्याय + अ^2}$

इस लिये यदि अ < १ तो

$$\int_0^{\pi} \frac{\text{ज्याय ताय}}{१-२अकोज्याय+अ^2} = \frac{\pi}{२अ} ला(१+अ)^2 = \frac{\pi}{अ} ला (१+अ)$$

और यदि अ > १ तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से

$$\text{इस का मान} = \frac{\pi}{अ} ला(१+अ) — \frac{\pi}{अ} ला (अ) = \frac{\pi}{अ} ला(१ + \frac{१}{अ})$$

२३१ । $\int_0^{\pi}$ कोज्याअ, य ला (१−२अकोज्याय + $अ^2$) ताय इस का मान

२२९ प्रक्रम के ऐसा यदि श्रेढी मे लाकर चलानयन करो (जहां सरल-त्रिकोणमिति से दो कोटिज्याओं के घात को दो कोटिज्या के योग में स्वरूप बना लेना) तो ०, π सीमा के भीतर सब चलो का मान उड़ जायगा एक खण्ड केवल $\int_0^{\pi} \frac{अ^{अ_1}}{अ_1}$ ताय यह रह जायगा यदि

अ∠ १ और यदि अ ७ १ तो उसी प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{अ^{-अ_1}}{अ_1}$ यह रह जायगा। इसलिये

$$\int_0^\pi \text{कोज्या}अ_1य \text{ ला } (१-२अ\text{कोज्या}य+अ^२) \text{ ताय}$$

$$= -\frac{\pi अ^{अ_1}}{अ_1}, \text{ वा} - \frac{\pi अ^{-अ_1}}{अ_1} \text{ यदि अ} \angle १ \text{ वा अ} ७ १।$$

२३२। खण्डचलानयन से ऊपर के फल का मान ले आवो तो २३० प्रक्रम की युक्ति से $\int_0^\pi \frac{\text{ज्याय ज्या}अ_1य \text{ ताय}}{१-२अ\text{कोज्या}य+अ^२} = \frac{\pi}{२}अ^{अ_1-१}$ वा $\frac{\pi}{२} अ^{-(अ_1+१)}$ यदि अ∠१ वा अ ७ १।

२३३। चलनकलन के ३१४ वें प्रक्रम के अन्त मे जो समीकरण उत्पन्न हुआ है उसे २अ से गुण कर १ मे जोड़ देने से

$$\frac{१-अ^२}{१-२\,अ\text{कोज्या}य+अ^२} = १+२अ\text{कोज्या}य+२अ^२\text{कोज्या}२य$$
$$+२अ^३\text{कोज्या}३य+$$

इस मे यदि अ∠१ तो इस पर से भी वहुत सान्तचलो का ज्ञान हो सकता है जैसे यदि $अ_1$ अभिन्न हो तो

$$\int_0^\pi \frac{\text{कोज्या}अ_1य \text{ ताय}}{१-२अ\text{कोज्या}य+अ^२} = \frac{\pi अ^{अ_1}}{१-अ^२}$$

क्योकि श्रेढियों के सीमा के भीतर प्रत्येक पद के सान्तचल नष्ट हो जाँयगे केवल $\frac{२अ^{अ_1}}{१-अ^२}\int \text{कोज्या}^२अ_1य \text{ ताय}$ यह रह जायगा जिस का मान सीमा के भीतर $\frac{\pi अ^{अ_1}}{१-अ^२}$ यह होगा।

२३४। $\int_0^\infty \frac{१}{१+य^२} \frac{\text{ताय}}{१-२अ\text{कोज्या}गय+अ^२}$ इस में भी यदि श्रेढी

में $\frac{१}{१-२अकोज्यागय+अ^२}$ इस का मान ले आवो तो

$$\frac{१}{१-अ^२}\left[\frac{१}{१+य^२}+\frac{२अकोज्यागय}{१+य^२}+\frac{२अ^२कोज्या२गय}{२+य^२}+\cdots\right]$$ ऐसा होगा।

इस लिये सीमा के भीतर प्रत्येक पद सम्बन्धि चलों का मान २२६ प्रक्रम के (३) समीकरण से ले आकर योग करने से अभीष्ट सान्तचल का मान

$$\frac{\pi}{२}\;\frac{१}{१-अ^२}\cdot\frac{१+अइ^{-ग}}{१--अइ^{-ग}}$$ यह होगा।

२३५। इसी तरह $\int_0^{\infty}ला(१-२अकोज्यागय+अ^२)\frac{ताय}{१+य^२}$

$= \pi ला(१-अइ^{-ग})$ २२६ और २२९ प्रक्रम की युक्ति से।

२३६। चलनकलन के ३१४वे प्रक्रम मे उपान्तिम समीकरण जो उत्पन्न हुआ है उस मे य=र तुल्य मान पीछे से य के स्थान मे गय का उत्थापन दे देने से

$$\frac{ज्यागय}{१-२अकोज्यागय+य^२} = ज्यागय+अज्या२गय+अ^२ज्या३गय+\cdot$$

जहाँ अ < १। इस श्रेढी और २२७ प्रक्रम से

$$\int_0^{\infty}\frac{यज्यागयताय}{१-२अकोज्यागय+य^२}=\frac{\pi}{२(इ^ग-अ)}$$

यदि ग के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो २३५ प्रक्रम से भी यह सिद्ध होता है।

२३७। यदि स=कोज्याय$+\sqrt{-१}$ज्याय तो फ(अ+स) यह यदि ऐसा हो कि इसमें यदि टेलर का सिद्धान्त लगाया जाय तो व्यभिचार न हो

तो टेलर के सिद्धान्त से फ(अ+स) + फ(अ+स$^{-१}$)

$$= २\left\{फ(अ)+फ'(अ)कोज्याय+\frac{फ''(अ)}{\lfloor२}कोज्या२य+\cdots\right\}$$

और $\frac{१-ग^२}{१-२गकोज्याय+ग^२}$

$= १+२गकोज्याय+२ग^२कोज्या२य+२ग^३कोज्या३य+\cdots$

इस लिये $\int_{0}^{\pi} \frac{\text{फ}(\text{अ}+\text{स}) + \text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-1})}{1 - 2\text{ग}\text{कोज्या}\text{य} + \text{ग}^2}$ ताय

$$= \frac{2\pi}{1-\text{ग}^2}\left\{\text{फ}(\text{अ}) + \text{ग}\text{फ}'(\text{अ}) + \frac{\text{ग}^2}{\underline{|2}}\text{फ}''(\text{अ}) + \cdots\right\} = \frac{2\pi}{1-\text{ग}^2}\text{फ}(\text{अ}+\text{ग})$$

जहाँ $\text{ग} < 1$

इसी तरह दोनों फलों का अन्तर करने से

$$\int_{0}^{\pi} \frac{\text{फ}(\text{अ}+\text{स}) - \text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-1})}{1 - 2\text{ग}\text{कोज्या}\text{य} + \text{ग}^2} \text{ ताय}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{-1}}{\text{ग}}\left\{\text{फ}(\text{अ}+\text{ग}) - \text{फ}(\text{अ})\right\}$$

और $\int_{0}^{\pi} \frac{1 - \text{ग}\text{कोज्या}\text{य}}{1 - 2\text{ग}\text{कोज्या}\text{य} + \text{अ}^2}\left\{\text{फ}(\text{अ}+\text{स}) + \text{फ}(\text{अ}+\text{स}^{-1})\right\}$ ताय

$$= \left\{\text{फ}(\text{अ}+\text{ग}) + \text{फ}(\text{अ})\right\}\pi$$

२३८। इस तरह असम्भाव्य संख्या का भी उत्थापन देने से बहुत सान्तचलों का मान आ जाता है। जैसे

$\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{अ}^2\text{य}^2}$ $\text{ताय} = \frac{\sqrt{\text{ग}}}{2\text{अ}}$ यह जो २१२ प्रक्रम से सिद्ध है इस में

यदि अ के स्थान में $\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}$ ग इसका उत्थापन दें तो

$$\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{ग}^2\text{य}^2\sqrt{-1}} \text{ ताय} = \int_{0}^{\infty} \{\text{कोज्या}\text{ग}^2\text{य}^2 - \sqrt{-1}\,\text{ज्या}\text{ग}^2\text{य}^2\} \text{ ताय}$$

$$= \int_{0}^{\infty} \text{कोज्या}\text{ग}^2\text{य}^2\text{ताय} - \sqrt{-1}\int_{0}^{\infty} \text{ज्या}\text{ग}^2\text{य}^2\text{ताय} = \frac{1}{\text{ग}}\cdot\frac{1}{1+\sqrt{-1}}\sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1-\sqrt{-1}}{2\text{ग}}\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

यहाँ पर सम्भाव्य असम्भाव्य को अलग अलग समान करने से

$$\int_{0}^{\infty} \text{कोज्या}\text{ग}^2\text{य}^2 \text{ ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\text{ग}\sqrt{2}}$$

और $\int_{0}^{\infty} \text{ज्या}\text{ग}^2\text{य}^2\text{ताय} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\text{ग}\sqrt{2}}$

इसी मे यदि $ग^2य^2$ के स्थान में र रख ले तो $ताय = \frac{तार}{२ग^2य} = \frac{तार}{२ग\sqrt{र}}$

इस लिये

$$\int_0^\infty \frac{कोज्यार तार}{\sqrt{र}} = \int_0^\infty \frac{ज्यार\ तार}{\sqrt{र}} = \sqrt{\frac{\pi}{२}}$$

इस तरह से हजारहो सान्तचल बुद्धिमानों के बुद्धिवल से निकले हुए हैं और निकलते जाते हैं कहाँ तक लिख कर दिखलावे बुद्धिमानो के लिये इतना ही बहुत है। इस पुस्तक के लिखने से मेरा यही तात्पर्य है कि चलराशि सम्बन्धि प्रायः सब विषयो से थोड़ा बहुत विद्यार्थियो का परिचय हो जाय।

२३९। $\int \frac{ताप}{\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}} = दै_१(ग,प)$। $\int\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}ताप$ $= दै_२(ग,प)$ और

$\int \frac{ताप}{(१+अज्या^2प)\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}} = दै_३(ग,अ,प)$ ऐसा मान लो जहाँ $ग < १$ तो यदि

$दै_१(ग,प) + दै_१(ग,प_१) = दै_१(ग,इ_१)$ जहाँ $इ_१$ एक स्थिराङ्क है तो

$कोज्याप\, कोज्याप_१ - ज्याप\, ज्याप_१\sqrt{(१-ग^2ज्या^2इ_१)} = कोज्याइ_१$ ऐसा होगा। इस को सिद्ध करने के लिये मान लो कि प और $प_१$ ये दोनो नये चलराशि ट के फल हैं तो दिये हुए समीकरण का नये चलराशि के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}}\frac{ताप}{ताट} + \frac{१}{\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प_१)}}\cdot\frac{ताप_१}{ताट} = ० \cdots \quad (१)$$

कल्पना करो कि ट ऐसा है जिस से $\frac{ताप}{ताट} = \sqrt{(१-ग^2ज्या^2प)}$

तो (१) समीकरण से $\frac{ताप_१}{ताट} = -\sqrt{(१-ग^2ज्या^2प_१)}$

दोनो का वर्ग कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$\frac{ता^2प}{ताट^2} = -ग^2ज्याप\,कोज्याप$, $\frac{ता^2प_१}{ताट^2} = -ग^2ज्याप_१कोज्याप_१$

इनके योगान्तर से

$\frac{ता^2(प\pm प_१)}{ताट^2} = -\frac{ग^2}{२}(ज्या२प \pm ज्या२प_१$

यदि $प + प_1 =$ फि, $प - प_1 =$ फी तो

$$\frac{ता^2 फि}{ताट^2} = - ग^2 ज्याफिकोज्याफी, \quad \frac{ता^2 फी}{ताट^2} = - ग^2 ज्याफीकोज्याफि$$

और $$\frac{ताफि}{ताट}\frac{ताफी}{ताट} = \left(\frac{ताप}{ताट}\right)^2 - \left[\frac{ताप}{ताट}\right]^2 = - ग^2 ज्याफिज्याफी$$

इस लिये $$\frac{\frac{ता^2 फि}{ताट^2}}{\frac{ताफि}{ताट}\frac{ताफी}{ताट}} = कोस्पफी, \quad \frac{\frac{ता^2 फी}{ताट^2}}{\frac{ताफि}{ताट}\frac{ताफी}{ताट}} = कोस्पफि$$

इस लिये

$$\frac{ता}{ताट}\left(ला \frac{ताफि}{ताट}\right) = \frac{ता}{ताट} लाज्याफी, \quad \frac{ता}{ताट}\left(ला \frac{ताफी}{ताट}\right) = \frac{ता}{ताट} लाज्याफि$$

इस लिये $$ला \frac{ताफि}{ताट} = लाज्याफी + स्थिराङ्क$$

इस लिये $$\frac{ताफि}{ताट} = आ\ ज्याफी$$
और इसी तरह $$\frac{ताफी}{ताट} = का \cdot ज्याफि$$ .... (२)

जहाँ आ और का स्थिराङ्क है।

इस कारण से $$आज्याफी \frac{ताफी}{ताट} = काज्याफि \frac{ताफि}{ताट}$$

चलानयन से, आकोज्याफी = काकोज्याफी + स्थिराङ्क .... (३)

और प्रथम मूल समीकरण से स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि $प_1 = 0$ तो

$$दै_1 (ग, प) = दै_1 (ग, इ_1)$$

इस लिये तब $प = इ_1$ और फि = फी $= इ_1$

(३) से (आ − का) कोज्या$इ_1$ = स्थि

इस लिये आकोज्या$(प - प_1)$ = काकोज्या $(प + प_1)$ + (आ − का) कोज्या$इ_1$

और (आ − का) कोज्यापकोज्या$प_1$ + (आ + का) ज्याप ज्या$प_1$

= (आ − का) कोज्या$इ_1$ ... ... (४)

(२) में $\frac{ताफि}{ताट} = \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 प)} - \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 प_1)}$ इस का

और $\frac{ताफी}{ताट} = \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 प)} + \sqrt{(१ - ग^2 ज्या^2 प_1)}$ इस का

उत्थापन देने से और $प_1 = 0$ मानने से

$$\sqrt{(१-ग^२ज्या^२इ_१)}-१ = आज्याइ_१$$

और $\sqrt{(१-ग^२ज्या^२इ_१)}+१ = काज्याइ_१$

$$\frac{२\sqrt{(१-ग^२ज्या^२इ_१)}}{ज्याइ_१} = आ+का, । -\frac{२}{ज्याइ_१} = आ-का$$

इसका उत्थापन (४) मे देने से

$$कोज्यापकोज्याप_१ - ज्यापज्याप_१\sqrt{(१-ग^२ज्या^२इ_१)}$$
$$= कोज्याइ_१$$ यह सिद्ध हुआ

२४० । २३९ प्रक्रम मे जो सिद्धान्त उत्पन्न हुआ है उस मे यदि समशोधन कर वर्ग कर डालो तो

$$(कोज्यापकोज्याप_१-कोज्याइ_१)^२ = (१-ग^२ज्या^२इ_१)ज्या^२पज्या^२प_१$$

इस लिये

$$कोज्या^२पकोज्या^२प_१-२कोज्याइ_१कोज्यापकोज्याप_१+कोज्या^२इ_१$$
$$=ज्या^२पज्या^२प_१-ग^२ज्या^२इ_१ज्या^२पज्या^२प_१$$ और $ज्या^२प+कोज्या^२प=१$

इस लिये

$$ज्या^२प-ज्या^२पज्या^२प_१+कोज्या^२प+कोज्या^२पकोज्या^२प_१$$
$$-२कोज्याइ_१कोज्यापकोज्याप_१+कोज्या^२इ_१$$
$$=ज्या^२पकोज्या^२प_१+कोज्या^२पकोज्या^२प_१+कोज्या^२प$$
$$-२कोज्याइ_१कोज्यापकोज्याप_१+कोज्या^२इ_१$$
$$=कोज्या^२प+कोज्या^२प_१+कोज्या^२इ_१-२कोज्याइ_१कोज्यापकोज्याप_१$$
$$=१-ग^२ज्या^२इ_१ज्या^२पज्या^२प_१$$

$कोज्या^२प_१कोज्या^२इ_१$ जोड़ कर पक्षान्तरानयन करने से

$$(कोज्याप-कोज्याप_१कोज्याइ_१)^२$$
$$=१-कोज्या^२प_१-कोज्या^२इ_१+कोज्या^२प_१कोज्या^२इ_१$$
$$-ग^२ज्या^२इ_१ज्या^२पज्या^२प_१$$
$$=ज्या^२प_१ज्या^२इ_१(१-ग^२ज्या^२प)$$

इस लिये $कोज्याप=कोज्याप_१कोज्याइ_१+ज्याप_१ज्याइ_१\sqrt{(१-ग^२ज्या^२प)}$

यहाँ पर धनात्मक मूल लिया है क्योंकि जब $प=०$ तो यहाँ $प_१=इ_१$

२४१। $दै_१(ग,प)$ इस का रूप ग,प के बदलने से इसी चाल का हो जाता है केवल स्थिराङ्क गुणक अधिक हो जाता है जैसे यदि

$स्पप = \dfrac{ज्या२प_१}{ग+कोज्या२प_१}$ तो $प_१$ के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{१}{\text{कोज्या}^{२}\text{प}}\;\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}_{१}}=\frac{२(१+\text{गकोज्या}२\text{प}_{१})}{(\text{ग}+\text{कोज्या}२\text{प}_{१})^{२}}$$

इस लिये $\frac{\text{ताप}}{\text{ताप}_{१}}=\frac{२(१+\text{गकोज्या}२\text{प}_{१})}{१+२\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}+\text{ग}^{२}}$

और $१-\text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{प}=१-\frac{\text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}२\text{प}_{१}}{१+२\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}+\text{ग}^{२}}$

$$=\frac{१+२\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}+\text{ग}^{२}\text{कोज्या}^{२}२\text{प}_{१}}{१+२\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}+\text{ग}^{२}}$$

इस लिये $\int\frac{\text{ताप}}{\sqrt{(१-\text{ग}^{२}\text{ज्या}^{२}\text{प})}}$

$$=\int\frac{२(१+\text{गकोज्या}२\text{प}_{१})}{१+२\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}+\text{ग}^{२}}\cdot\frac{\sqrt{(१+२\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}+\text{ग}^{२})}}{१+\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}}\,\text{ताप}_{१}$$

$$=२\int\frac{\text{ताप}_{१}}{\sqrt{(१+२\text{गकोज्या}२\text{प}_{१}+\text{ग}^{२})}}=२\int\frac{\text{ताप}_{१}}{\sqrt{(१+२\text{ग}-४\text{गज्या}^{२}\text{प}_{१}+\text{ग}^{२})}}$$

$$=\frac{२}{१+\text{ग}}\int\frac{\text{ताप}_{१}}{\sqrt{\left\{१-\frac{४\text{ग}}{(१+\text{ग})^{२}}\text{ज्या}^{२}\text{प}_{१}\right\}}}$$

यहाँ पर कोई स्थिराङ्क जोड़ने की आवश्यकता नहीं है क्योंकि यदि $\text{प}=०$ तो $\text{प}_{१}=०$ होता है।

अब ऊपर के चल में यदि $\text{ग}_{१}^{२}=\frac{४\text{ग}}{(१+\text{ग})^{२}}$ तो

$$\text{दै}_{१}(\text{ग},\text{प})=\frac{२}{१+\text{ग}}\text{दै}_{१}(\text{ग}_{१},\text{प}_{१})$$

पहले जो $\text{स्पप}=\frac{\text{ज्या}२\text{प}_{१}}{\text{ग}+\text{कोज्या}२\text{प}_{१}}$ ऐसा माना है इस पर से सिद्ध कर सकते हो कि $\text{ग ज्याप}=\text{ज्या}(२\text{प}_{१}-\text{प})$

और जब $\text{ग}_{१}^{२}=\frac{४\text{ग}}{(१+\text{ग})^{२}}\quad\cdot\quad\frac{\text{ग}_{१}^{२}}{\text{ग}^{२}}=\frac{४}{\text{ग}(१+\text{ग}^{२})}$

परन्तु $\text{ग}<१$ इस लिये $४>\text{ग}(१+\text{ग})^{२}$ और $\text{ग}_{१}^{२}>\text{ग}^{२}\;\therefore\;\text{ग}_{१}>\text{ग}$

इस लिये ग से $\text{ग}_{१}$ बड़ा ठहरा।

इस मे यदि $\text{प}_{१}=\frac{\pi}{२}$ तो $\text{प}=\pi$ इस लिये

$$\text{दै}_{१}(\text{ग},\pi)=\frac{२}{१+\text{ग}}\text{दै}_{१}\left(\text{ग}_{१},\frac{\pi}{२}\right)=२\,\text{दै}_{१}\left(\text{ग},\frac{\pi}{२}\right)\cdots$$

$दै_1$ (ग,प) इस मे ग को मध्यस्थ, और प को अग्रांश कहते हैं और $दै_1$ (ग,प) $= 0$ यदि प $= 0$ और यदि प $= \frac{\pi}{2}$ तो पूर्णचल का मान $=$ $दै_1$ (ग,$\frac{\pi}{2}$) यह है। इस लिये $\frac{\pi}{2}$ को पूर्ण अग्रांश कहते हैं।

यदि ७७ वे प्रक्रम के साथ तुलना करो तो जान पड़ेगा कि $दै_2$ (ग,प) यह लघुव्यासाग्र से चाप की गणना करें तो दीर्घवृत्त के चाप को प्रकाश करता है और आगे के प्रक्रमो से जान पड़ेगा कि $दै_1$ (ग, प), $दै_2$ (ग,प) और $दै_3$ (अ, ग, प,) इन तीनों में परस्पर सम्बन्ध है इस लिये इन तीनों को क्रम से प्रथम, द्वितीय और तृतीय दैर्घवृत्तीय चल कहते हैं।

यद्यपि इन तीनों के ठीक ठीक मान नही निकलते तथापि इन के अव्यक्त मानो के सम्बन्ध से अनेक सिद्धान्त उत्पन्न होते हैं। इन के सिद्धान्तों पर बुद्धिमानो ने अलग एक स्वतन्त्र दैर्घवृत्तीयचल के नाम से पुस्तक ही वना डाली है। अभी सन् १८७३ ई० में ब्रिअट (Briot) और बौकेट (Bouquet) ने इसी विषय के पुस्तक का एक वड़ा भारी प्रथम खण्ड प्रकाश किया है।

तीसरे दैर्घवृत्तीयचल में जो अ, एक और थिराङ्क है उसे परिमिति कहते हैं और सर्वत्र ग सर्वदा १ से कम माना गया है।

२४२। इस प्रक्रम में एक सिद्धान्त दिखलाते हैं जो प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से उत्पन्न होता है।

२३९ प्रक्रम मे सिद्ध हुआ है कि यदि $दै_1$ (ग प) $+$ $दै_1$ (ग,$प_1$) $=$ दै (ग, $इ_1$) तो

$$कोज्याप कोज्याप_1 - ज्याप ज्याप_1 \sqrt{(1 - ग^2 ज्या^2 इ_1)} = कोज्या इ_1$$

अव दिखलाते हैं कि

यदि $कोज्याप कोज्याप_1 - ज्याप ज्याप_1 \sqrt{(1 - ग^2 ज्या^2 इ_1)} = कोज्या इ_1$

तो $दै_2$ (ग,प) $+$ $दै_2$ (ग,$प_1$) $-$ $दै_2$ (ग,$इ_1$)

$= ग^2 ज्याप\ ज्याप_1\ ज्याइ_1$ ऐसा होगा।

यहाँ दिये हुए समीकरण के धर्म से स्पष्ट है कि $प_1$ यह प का कोई फल होगा

इस लिये मानो कि, $दै_2$ (ग,प) $+$ $दै_2$(ग,$प_1$) $-$ $दै_2$(ग,$इ_1$) $=$ फ(प)

इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$फ'(प) = \sqrt{(1 - ग^2 ज्या^2 प)} + \sqrt{(1 - ग^2 ज्या^2 प_1)}\ \frac{ताप_1}{ताप}$$

$$= \frac{\text{कोज्याप} - \text{कोज्याप}_१\text{कोज्याइ}_१}{\text{ज्याप}_१\text{ज्याइ}_१}$$

$$+ \frac{\text{कोज्याप}_१ - \text{कोज्यापकोज्याइ}_१}{\text{ज्यापज्याइ}_१} \frac{\text{ताप}_१}{\text{ताप}} \quad (\text{२४० प्रक्रम से})$$

$$= \frac{\text{ता}}{\text{ताप}} \{ \text{ज्या}^२\text{प} + \text{ज्या}^२\text{प}_१ + २\,\text{कोज्यापकोज्याप}_१\text{कोज्याइ}_१ \}$$

$$\times \frac{१}{२\text{ज्यापज्याप}_१\text{ज्याइ}_१}$$

परन्तु $\text{ज्या}^२\text{प} + \text{ज्या}^२\text{प}_१ + २\text{कोज्यापकोज्याप}_१\text{कोज्याइ}_१$

$= १ + \text{कोज्या}^२\text{इ}_१ + \text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{पज्या}^२\text{प}_१\text{ज्या}^२\text{इ}_१$ (२४० ही प्रक्रम से)

इसलिये $\quad \text{फ}'(\text{प}) = \text{ग}^२\text{ज्याइ}_१ \frac{\text{ता (ज्यापज्याप}_१)}{\text{ताप}}$

इस लिये चलानयन से

$\text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^२\text{ज्याइ}_१\,\text{ज्यापज्याप}_१$

स्थिराङ्क जोड़ने की कुछ आवश्यकता नही है क्योंकि जब $\text{प} = ०$ तो $\text{फ}(\text{प}) = ०$ इस लिये

$\text{दै}_२(\text{ग},\text{प}) + \text{दै}_२(\text{ग},\text{प}_१) - \text{दै}(\text{ग},\text{इ}_१) = \text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^२\text{ज्यापज्याप}_१\text{ज्याइ}_१$

इस में यदि $\text{इ}_१ = \frac{\pi}{२}$ तो $\text{फ}(\text{प}) = \text{ग}^२\text{ज्यापज्याप}_१$,

और दिये हुए समीकरण का रूप

$\text{कोज्यापकोज्याप}_१ - \text{ज्यापज्याप}_१ \sqrt{(१ - \text{ग}^२\text{ज्या}^२\text{इ}_१)}$

$= \text{कोज्यापकोज्याप}_१ - \text{ज्यापज्याप}_१ \sqrt{(१ - \text{ग}^२)} = \text{कोज्याइ}_१ = ०$

यह ठीक फ्यागननी (Fagnani) के सिद्धान्त के समान फल को दिखलाता है क्योंकि ८५ प्रक्रम के (१) उदाहरण के अन्त से जो

$\text{इ}^२\text{य}^२\text{य}'^२ - \text{अ}^२(\text{य}^२ + \text{य}'^२) + \text{अ}^४ = ०$ यह समीकरण उत्पन्न हुआ है इस मे

य, य' का जो क्रम से $\frac{\text{अकोज्याप}}{\sqrt{(१ - \text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प})}}$, $\frac{\text{अकोज्याप}'}{\sqrt{(१ - \text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प}')}}$

मान मान लो तो

$$\text{इ}^२\text{कोज्या}^२\text{पकोज्या}^२\text{प}' - \text{कोज्या}^२\text{प}(१ - \text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प}') - \text{कोज्या}^२\text{प}'(१ - \text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प})$$
$$+ (१ - \text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प})(१ - \text{इ}^२\text{ज्या}^२\text{प}') = ०,$$

अर्थात् $इ^४ ज्या^२प ज्या^२प_१ + इ^२(१ - ज्या^२प - ज्या^२प_१ - ज्या^२प ज्या^२प_१) + ज्या^२प + ज्या^२प_१ = ०$ अर्थात्

$$इ^२(इ^२ - १) ज्या^२प ज्या^२प_१ + (इ^२ - १)(१ - ज्या^२प - ज्या^२प_१) = ०$$

$(इ^२ - १)$ का भाग दे देने से

$$इ^२ ज्या^२प ज्या^२प_१ + १ - ज्या^२प - ज्या^२प_१ = ०$$

इस पर से रूपान्तर करने से

$$कोज्याप कोज्याप_१ = ज्याप ज्याप_१ \sqrt{१ - इ^२}$$

अथवा, $$ज्या^२प = \frac{कोज्या^२प_१}{१ - इ^२ ज्या^२प_१}$$

और $$ज्या^२प_१ = \frac{कोज्या^२प}{१ - इ^२ ज्या^२प}$$

इस प्रकार से प्रथम और द्वितीय दैर्घवृत्तीयचल के सम्बन्ध से सैकड़ो सिद्धान्त वन जाते है।

२४३। $$दै_३(अ, ग, प) = \int \frac{ताप}{(१ + अज्या^२प)\sqrt{(१ - ग^२ज्या^२प)}}$$

$$= \frac{दै_१(ग,प)}{१ + अज्या^२प} - \int दै_१(ग,प)\, ता\left(\frac{१}{१ + अज्या^२प}\right)$$

इस प्रकार से खण्डचलानयन की रीति से जो $दै_३$ (अ, ग, प) का स्वरूप सिद्ध होता है इससे जान पड़ता है कि $दै_१$ (ग, प) और $दै_२$ (अग, प) मे भी परस्पर सम्बन्ध है।

लेजेण्ड्र (Legendre) ने पहले दो दैर्घवृत्तीय चलो के मान जानने के लिये एक सारणी बनाई है और उसमे स्वल्पान्तर से तीसरे का मान जानने के लिये भी विधि लिखा है। सारणी वनाने का मूल प्रकार ३७ प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण है।

२४४। यदि फ(य) किसी खेत मे एक तरफ के डॉड़े का मान हो तो य के स्थान में अ, अ + च, अ + २च, अ + ३च, · अ + (न - १) च इनका उत्थापन देने से उस खेत के भीतर उसी तरफ के फ(अ), फ(अ + च), फ(अ + २च), इत्यादि न डॉड़ो के प्रमाण होंगे इस लिये, इन डॉड़ो का मध्यम मान जिसे उर्दू में औसत बोलते हैं।

साधारण रीति से वा लीलावती में लिखे हुए भास्कराचार्य के "गणयित्वा विस्तारं बहुषु स्थानेषु तद्युतिर्भाज्या। स्थानकमित्या सममिति" इस प्रकार से।

$$\frac{\text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}(\text{अ} + \text{च}) + \text{फ}(\text{अ} + २\text{च}) + \cdots + \text{फ}\{\text{अ} + (\text{न} - १)\text{च}\}}{\text{न}}$$

कल्पना करो कि क — अ = नच

इस लिये डाड़ों का मध्यम मान

$$\frac{\text{च}[\text{फ}(\text{अ}) + \text{फ}(\text{अ} + \text{च}) + \text{फ}(\text{अ} + २\text{च}) + \cdots + \text{फ}\{\text{अ} + (\text{न} - १)\text{च}\}]}{\text{क} - \text{अ}}$$

कल्पना करो कि क − अ स्थिर संख्या के भीतर अनन्त स्थानों के डाड़ों का मध्यम मान जानना है तो न का प्रमाण अनन्त और च का मान शून्य हो जायगा ऐसी दशा में २ वा ४० वे प्रक्रम से डाड़ों का यथार्थ मध्यम मान $\int_{\text{अ}}^{\text{क}} \frac{\text{फ}(\text{य})\text{ताय}}{\text{क} - \text{अ}}$ यह होगा क्योंकि औसत में जितने ही स्थानों को बढ़ाते जाते हैं उतना ही औसत सूक्ष्म होता चला जाता है।

इस लिये य के अ, क के भीतर के मानों में यदि फ(य) का मध्यम मान निकालना हो तो $\int \frac{\text{फ}(\text{य})\text{ताय}}{\text{क} - \text{अ}}$ इस का अ, क सीमा के भीतर सान्तचल ले आवो।

जैसे किसी ने प्रश्न किया कि जिस वृत्त का व्यासार्द्ध ग है उसके परिधि पर एक स्थिर विन्दु मान कर वहाँ से वृत्तान्तर्गत प्रत्येक विन्दुओं की दूरी जो होंगी उनका मध्यम मान क्या होगा।

यहाँ यदि वृत्त के फल का न तुल्य विभाग कर डालें जहाँ न = ∞ तो स्पष्ट है कि हर एक विभाग विन्दु रूप होंगे इसलिये प्रति विभागों की दूरी स्थिर विन्दु से क्रम से $\text{श्रु}_१, \text{श्रु}_२, \text{श्रु}_३, \cdot\ \text{श्रु}_\text{न}$ ये हों तो इन का मध्यम मान $\frac{१}{\text{न}}(\text{श्रु}_१ + \text{श्रु}_२ + \quad + \text{श्रु}_\text{न})$ यह होगा।

इसमें अंश हर को श्रु△प△श्रु से गुण देने से

$$\frac{\{\text{श्रु}_१ + \text{श्रु}_२ + \cdots + \text{श्रु}_\text{न}\}\text{श्रु प श्रु}}{\text{नश्रु}\triangle\text{प}\triangle\text{श्रु}}$$

यहाँ १२५ वें प्रक्रम से श्रु△प△श्रु यह क्षेत्रफल के अत्यल्प विभाग का मान होगा यदि, △प,△श्रु ताप, ताश्रु अर्थात् शून्य के तुल्य हो जायँ।

परन्तु ऐसी दशा मे न श्रु△प△श्रु यह वृत्त का फल हो जायगा इस लिये

$$\text{दूरियो का मध्यम मान} = \frac{\{ \text{श्रु}_1 + \text{श्रु}_2 + \cdot + \text{श्रु}_n \} \text{ श्रुताप ताश्रु}}{\pi \text{ग}^2}$$

$$\iint \frac{\text{श्रु}^2 \text{ताश्रुताप}}{\text{ग}^2}$$ (द्विगुण चलानयन की रीति से उचित सीमाओ के भीतर जो मान-होगा)

स्थिर विन्दु से एक व्यास नियत खीच कर उस से और श्रुति से उत्पन्न कोण को प कहो तो यहाँ द्विगुण चलानयन की रीति से सीमाओ को लेने से

$$\text{मध्यम मान} = \frac{1}{\pi \text{ग}^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\text{गकोज्याप}} \text{श्रु}^2 \text{ताश्रु ताप}$$

$$= \frac{1}{\pi \text{ग}^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{8 \text{ ग}^3 \text{कोज्या}^3 \text{प ताप}}{3}$$

$$= \frac{8 \text{ ग}^3}{3\pi \text{ग}^2} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^3 \text{प ताप}$$

$$\text{परन्तु} \int \text{कोज्या}^3 \text{पताप} = \int (1 - \text{ज्या}^2 \text{प}) \text{ कोज्यापताप}$$

$$= \text{ज्याप} - \frac{\text{ज्या}^3 \text{प}}{3}$$

$$\text{इस लिये} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या}^3 \text{पताप} = (1 - \tfrac{1}{3}) 2 = \tfrac{4}{3}$$

$$\text{इस लिये मध्यम मान} = \frac{8 \text{ ग}^3}{3\pi \text{ग}^2} \times \frac{4}{3} = \frac{32 \text{ग}}{9 \pi}$$

इस प्रकार सैकड़ो उदाहरण के उत्तर सहज मे निकलते हैं।

२४५। लागा − (१ + य) का मान जानने के लिये सारणी।

नीचे दी हुई सारणी को हमने प्रोफेसर डिमार्गन के चलनकलन, और चलराशिकलन से लिया है। प्रोफेसर डिमार्गन ने इसको दैर्घवृत्तीय और यूलर के चल सम्बन्धि पुस्तक और चलराशिकलन के अभ्यासार्थ पुस्तक (जो क्रम से प्यारिस में सन् १८२६, और सन् १८१७ मे फरासीसी मे छपी है) से लिया है (Fraitè des Fonctions Filiptiques et des Intègrales Eulèriennes, Paris, 1826 Also Ezercices de Calcul Intègral, Paris 1817)

य	ला१०गा(१ + य)	Δ(—)	Δ^2+()	Δ^3(−)	९ स्थानोंतक Δ^3 जानने के लिये अङ्क
००	००० ००० ००० ०००	२५० ३२४ ५५९	७१३ ३४३	१०३९	८४१ ०४५ ०८४
.०१	९९७ ५२८ ७३० ६५९	२४३ २३७ ५८७	७०३ ०७०	१०१४	८८४ २८८ २२९
०२	९९५ १२७ ८७१ ९८९	२३६ २५२ १२९	६९३ ०६५	९८५	३२७ ५४१ ७६२
.०३	९९२ ७९६ ४२० ८८९	२२९ ३६५ ५२८	६८३ ३२३	९६१	७६४ ८०५ २२८
०४	९९० ५३३ ४०० ४०९	२२२ ५७५ २२०	६७३ ८३०	९३५	४०९ ७३२ ८८४
.०५	९८८ ३३७ ८५८ ७९०	२११ ८७८ ७३८	६६४ ५८०	९११	१८० २२८ ६३३
.०६	९८६ २०८ ८६८ ५५६	२०९ २७३ ७०२	६५५ ५६२	८८७	८६० २८६ ३११
०७	९८४ १४५ ५२५ ६३५	२०२ ७५७ ८१८	६४६ ७७०	८६६	५३१ ९५१ २१६
.०८	९८२ १४६ ९४८ ५३४	१९६ ३२८ ८७४	६३८ १९७	८४८	३२८ ९६३ ०१८
०९	९८० २१२ २७७ ५४०	१८९ ९८४ ७३१	६२९ ८२९	८२४	२४९ ६५४ २९७
.१०	९७८ ३४० ६७३ ९३२	१८३ ७२३ ३३०	६२१ ६६७	८०६	४१९ ९५४ २१७
११	९७६ ५३१ ३१९ ४०९	१७७ ५४२ ६७९	६१३ ६९९	७८७	४३० ९८५ २२०
१२	९७४ ७८३ ४१५ ०९२	१७१ ४४० ८१३	६०५ ९११	७६८	६३४ ९९८ ५३२
१३	९७३ ०२६ १८१ १६५	१६५ ४१५ ९९६	५९८ ३२२	७४९	९७३ ४१९ ८६५
१४	९७१ ४६८ ८५६ ०८६	१५९ ४६६ ३०१	५९० ९०१	७३२	०१६ ६४४ ०८८
१५	९६९ ९०० ६९६ ०१२	१५३ ५९० ०५६	५८३ ६५२	७१७	२५१ ७८८ ३३१
१६	९६८ ३९० ९७४ २१९	१४७ ७८५ ५५६	५७६ ५६७	७००	८७४ ३३९ ९८४
.१७	९६६ ९३८ ९८० ५३९	१४२ ०५१ १८३	५६९ ६४२	६८४	४९० ८७३ ५११
.१८	९६५ ५४४ ०२० ८२८	१३६ ३८५ ३६२	५६२ ८७०	६६६	०५५ २१० ९७६
.१९	९६४ २०५ ४१६ ४५७	१३० ७८६ ५७०	५५६ २४९	६५२	४२८ ९७५ ५२०
.२०	९६२ ९२२ ५०३ ८१४	१२५ २५३ ३३२	५४९ ७७५	६४२	७७७ २१० ००६
.२१	९६१ ६९४ ६३३ ८३९	११९ ७८४ २१७	५४३ ४३९	६२७	५१४ ००६ ८६२
.२२	९६० ५२१ १७१ ५६५	११४ ३७७ ८४१	५३७ २४०	६१३	२०९ ६७५ २४०
.२३	९५९ ४०१ ४९५ ६८७	१०९ ०३२ ८५९	५३१ १७२	६००	८७६ ५२३ १९९
२४	९५८ ३३४ ९९८ १४४	१०३ ७४७ ९७५	५२५ २३२	५८६	६५३ २२७ १७६
.२५	९५७ ३२१ ०८३ ७१६	९८ ५२१ ९१४	५१९ ४१७	५७५	५२२ १०५ ८६३

य	ला₁₀गा(१ + य)	Δ (∓)	Δ²(+)	Δ³(−)	९ स्थानों तक Δ³ जानने के लिये अङ्क
२६	९५६ ३५९ १६९ ६४०	९३ ३५३ ४६३	५१३ ७२३	५६३	१११ ७७८ ३३३
२७	९५५ ४४८ ६८५ २३४	८८ २४१ ४२७	५०८ १४६	५५४	९८८ ९५५ २३३
२८	९५४ ५८९ ०७१ ५५३	८३ १८४ ६५६	५०२ ६८०	५३९	९८६ ६५२ ४२९
२९	९५३ ७७९ ७८१ ०२९	७८ १८२ ०२९	४९७ ३२८	५३१	८६८ ५३५ ०३८
३०	९५३ ०२० २७७ १५०	७३ २३२ ४५७	४९२ ०८१	५१९	९८३ ७२४ १२९
३१	९५२ ३१० ०३४ १४१	६८ ३३४ ८८३	४८६ ९३७	५०८	९६४ ५६२ ३९८
३२	९५१ ६४८ ५३६ ६५५	६३ ४८८ २८३	४८१ ८९७	५०१	७७५ ७३२ १४९
३३	९५१ ०३५ २७९ ४८१	५८ ६११ ६५६	४७६ ९५१	४८७	०८३ ८४४ ३०४
३४	९५० ४६९ ७६७ २५४	५३ ९४४ ०३३	४७२ १०२	४८०	६८९ ५४५ ३४९
३५	९४९ ९५१ ५१४ १९१	४९ २४३ ४७७	४६७ ३४९	४७२	०६० ८४६ ५४०
३६	९४९ ४८० ०४३ ८११	४४ ५९२ ०६५	४६२ ६८४	४६२	२९९ ८९६ ५४४
३७	९४९ ०५४ ८८८ ६२२	३९ ९८५ ९०४	४५८ १०६	४५४	२०१ ०९७ ९४५
३८	९४८ ६७५ ५९० २२३	३५ ४२५ १३१	४५३ ६१५	४४७	३२२ २०९ ०८७
३९	९४८ ३४१ ६९८ ३६३	३० ९०८ ८९९	४४९ २०५	४३६	६५२ ५२२ ०१८
४०	९४८ ०५२ ७७१ ४११	२६ ४३६ ३८८	४४४ ८७८	४२९	६८७ ५४३ ४३९
४१	९४७ ८०८ ३७५ ७८९	२२ ००६ ७२६	४४० ६३०	४२१	२८७ ८८६ ५४४
४२	९४७ ६०८ ०८५ ८२३	१७ ६१९ ३४३	४३६ ४५७	४१४	०४० ९१८ ८६७
४३	९४७ ४५१ ४८३ ५४२	१३ २७३ २७२	४३२ ३६०	४०७	४४३ ४२१ ००९
४४	९४७ ३३८ १५८ ४७४	८ ९६७ ८४४	४२८ ३३६	४००	८५८ ४७२ ५३२
४५	९४७ २६७ ७०७ ४५२	४ ७०२ ३३८	४२४ ३८२	३९२	००० ८८९ ५७५
४६	९४७ २३९ ७३४ ४३०	— ४७६ ०५२	४२० ४९८	३८५	३४३ २०१ २८८
४७	९४७ २५३ ८५० ३०२	+३७११ ६९८	४१६ ६८२	३७८	८८४ ६५४ ४२१
४८	९४७ ३०९ ६७२ ७२६	७ ८६१ ५८०	४१२ ९३२	३७४	००० ८८० ६६६
४९	९४७ ४०६ ८२५ ९५८	११ ९७४ २४४	४०९ २४४	३६५	५४३ ३१४ ८२९
५०	९४७ ५४४ ९४० ६८३	१६ ०५० ३२४	४०५ ६२०	३५९	९७८ ६६६ ४५३

य	ला$_{१०}$गा(१+य)	Δ(+)	Δ^2+	()Δ^3 (−)	९ स्थानों तक Δ^3 जानने के लिये अङ्क
.५१	९४७ ७२३ ६५३ ८६२	२० ०९० ४३९	४०२ ०५७	३५३	२४९ १०० ९८७
.५२	९४७ ९४२ ६०८ ५७५	२४ ०९५ १९३	३९८ ५५४	३४८	७५६ ४४४ ५११
.५३	९४८ २०१ ४५३ ८६५	२८ ०६५ १७५	३९५ १०९	३४२	२०९ ९९८ ७७६
.५४	९४८ ४९९ ८४४ ६४२	३२ ००० ९६१	३९१ ७२०	३३७	४६४ २५१ २२१
.५५	९४८ ८३७ ४४१ ४४७	३५ ९०३ १११	३८८ ३८६	३३१	७२८ ९५९ ६७४
.५६	९४९ २१३ ९१० ४१०	३९ ७७२ १७३	३८५ १०८	३०७	३३६ १३१ २२९
.५७	९४९ ६२८ ९२३ ०७८	४३ ६०८ ६८३	३८१ ८८१	३१९	००७ ७८७ ६५७
.५८	९५० ०८२ १५६ २८९	४७ ४१३ १६५	३७८ ७०५	३१३	४४५ ११३ २०९
.५९	९५० ५७३ २९२ ०५८	५१ १८६ १२६	३७५ ५८३	३११	०७८ ९८५ ७६५
.६०	९५१ १०२ ०१७ ४५०	५४ ९२८ ०६८	३७२ ५०७	३०४	३५४ ३२२ ११०
.६१	९५१ ६६८ ०२४ ४६७	५८ ६३९ ४७८	३६९ ४८१	३०२	९८१ ६८७ ८७४
.६२	९५२ २७१ ००९ ९३८	६२ ३२० ८३०	३६६ ५०१	२९६	५४६ ३१४ ३२०
.६३	९५२ ९१० ६७५ ४०२	६५ ९७२ ५९३	३६३ ५६७	२९१	१०९ १६१ ७५८
.६४	९५३ ५८६ ७२७ ०१२	६९ ५९५ २२१	३६० ६७८	२८७	६६५ ४५३ ४३२
.६५	९५४ २९८ ८७५ ४२८	७३ १८९ १५८	३५७ ८३३	२८३	२९२ ३७८ २९७
.६६	९५५ ०४६ ८३५ ७१२	७६ ७५४ ८४०	३५५ ०३१	२७९	६७८ ५६७ ३५४
.६७	९५५ ८३० ३२७ २३८	८० २९२ ६९३	३५२ २७१	२७४	३३३ १३० ३९९
.६८	९५६ ६४९ ०७३ ५९६	८३ ८०३ १३२	३४९ ५५३	२६९	१९९ ८६८ ७५८
.६९	९५७ ५०२ ८०२ ४९८	८७ २८६ ५६९	३४६ २७३	२६६	५४६ १५५ ३०४
.७०	९५८ ३९१ २४५ ६९२	९० ७४३ ३९६	३४४ २३४	२६१	०२० १०८ ०९७
.७१	९५९ ३१४ १३८ ८७२	९४ १७४ ००७	३४१ ६३५	२६१	६४० ७५६ ५५६
.७२	९६० २७१ २२१ ५९२	९७ ५७८ ७०४	३३९ ०७०	२५२	६१४ ५०२ ३११
.७३	९६१ २६२ २३७ २०६	१०० ९५८ ०९९	३३६ ५४५	२५०	०१८ ००७ ८७८
.७४	९६२ २८६ ९३२ ७४१	१०४ ३१२ ३२०	३३४ ०५८	२४२	४५० ६३४ ६३४
.७५	९६३ ३४५ ०५८ ८७४	१०७ ६४१ ८०३	३३१ ६०२	२४५	२३३ १३१ १०१

य	ला$_{१०}$गा(१+य)	△(+)	△²[+]	△³[−]	९ स्थानोतक△³ जानने के लिये अङ्क
७६	९६४ ४३६ ३६९ ८१०	११० ९४६ ९०१	३२९ १८२	२४१	९९० ८८९ ७८७
७७	९६५ ५६० ६२३ २६९	११४ २२७ ९५६	३२६ ७९६	२३७	५७६ ४७३ ४४५
७८	९६६ ७१७ ५८० ३२२	११७ ४८५ ३०६	३२४ ४४३	२३२	३४२ १४० १११
७९	९६७ ९०७ ००५ ४१२	१२० ७१९ २८०	३२२ १२४	२३०	००८ ०८८ ९७८
८०	९६९ १२८ ६६६ २४१	१२३ ९३० २०१	३१९ ८३६	२२६	८५७ ५७५ ३६४
८१	९७० ३८२ ३३३ ७११	१२७ ११८ ३८६	३१७ ५८०	२२४	३४३ ३२२ २१२
८२	९७१ ६६७ ७८१ ८६४	१३० २८४ १४६	३१५ ३५४	२२१	०१९ ००९ ९७०
८३	९७२ २८४ ७८७ ८१६	१३३ ४२७ ७८४	३१३ १५८	२१७	८८६ ६९४ ७५६
८४	९७४ ३३३ १३१ ६९९	१३६ ५४९ ५९८	३१० ९९२	२१४	५५४ ४३३ ४३१
८५	९७५ ७१२ ५९६ ५९९	१३९ ६४९ ८८१	३०८ ८५६	२१४	०२२ ११९ ११८
८६	९७७ १२२ ९६८ ४९९	१४२ ७२८ ९२०	३०६ ७४७	२१०	९९९ ७८९ ८६५
८७	९७८ ५६४ ०३६ २२५	१४५ ७८६ ९९५	३०४ ६६७	२०९	५७६ ५५६ ३६३
८८	९८० ०३५ ५९१ ३८८	१४८ ८२४ ३८४	३०२ ६१२	२०५	३३४ २३३ १२१
८९	९८१ ५३७ ४२८ ३३३	१५१ ८४१ ३५५	३०० ५८५	२०३	९२० ००१ ७२६
९०	९८३ ०६९ ३४४ ०८६	१५४ ८३८ १७३	२९८ ५८५	२०१	७९७ ९६८ ५९६
९१	९८४ ६३१ १३८ ३००	१५७ ८१५ १०१	२९६ ६०८	१९५	७५५ ६४५ ४५३
९२	९८६ २२२ ६१३ २११	१६० ७७२ ३९१	२९४ ६५९	१९४	३३४ १४१ २२२
९३	९८७ ८४३ ५७३ ५८६	१६३ ७१० २९६	२९२ ७३३	१८९	४८१ १०८ २७१
९४	९८९ ४९३ ८२६ ६७६	१६६ ६२९ ०६१	२९० ८३२	१८७	९८९ ८६८ ७८१
९५	९९१ १७३ १८२ १७२	१६९ ५२८ ९२६	२८८ ९५७	१८७	५७७ ५५४ ५४५
९६	९९२ ८८१ ४५२ १५६	१७२ ४१० १३१	२८७ १०३	१८४	४३४ ३३३ २२२
९७	९९४ ६१८ ४५१ ०६३	१७५ २७२ ९०६	२८५ २७३	१८२	२०३ ९२१ ८११
९८	९९६ १८३ ९९५ ६३२	१७८ ११७ ४८१	२८३ ४६४	१७७	२७१ ६१६ ०६९
९९	९९८ ३७७ १०४ ८६८	१८० ९४४ ०७९	२८१ ६७९	१७७	६९४ ९५६ ६६५
१ ००	००० ००० ००० ०००	१८३ ७५२ ९२०	२७९ ९१६	१७५	.

इस सारणी मे (१) ऊर्ध्वाधर कोष्ट में '०१ वृद्धि से य के मान १'०० तक लिखे हैं। दूसरे मे उनके वश से लागा (१ + य) का मान १० आधार में १२ दशमलव स्थानो तक लिखा है गा(१ + य) का मान य के ०,१ के भीतर रूप से अल्प होता है इस लिये इस कोष्ट मे लघुरिक्थ के मान मे पूर्णाङ्क को छोड़ दिया है पूर्णाङ्क सर्वत्र अपने मन से—१ वा इस मे १० जोड़ कर ९ समझ लेना चाहिये। प्रायः ९ पूर्णाङ्क ही ग्रहण करना उत्तम है जैसा कि त्रिकोणमिति फलों के लघुरिक्थ मे किया जाता है।

तीसरे कोष्ट मे एक दशमलव स्थान वर्द्धित संख्याओ के लघुरिक्थो के अन्तर के अन्तिम अङ्क हैं। जैसे य = '२२ के सामने इस में जो संख्या— ११४ ३७७ ८४१ है इससे समझना चाहिये कि लागा (१'२२१)—लागा(१ २२०)

= — ००० ११४ ३७७ ८४१।

चौथे और पाँचवें कोष्ट में जहाँ तीन दशमलव स्थान से अधिक स्थान य में हो वहाँ का लागा(१ + य) सूक्ष्म ले आने के लिये दूसरा और तीसरा अन्तर लिखा है (चलनकलन का ८५—८६ प्रक्रम देखो) इसमें भी आदि के दशमलव जो कि ० है छोड़ दिये गये हैं। सर्वत्र बाईं ओर इतने शून्य रख दशमलव का चिह्न रखो जिस मे १२ दशमलव स्थान हों। छठवें कोष्ट मे तीसरे दशमलव स्थान के १ से लेकर ९ तक के मान मे लघुरिक्थ जानने के लिये क्रम से तीसरे अन्तर का अन्तिम अंक हैं। जो तीसरे अन्तर के अन्तिम स्थानीय अङ्क के स्थान में उत्थापन देने से सबों का तीसरा अन्तर बनाते हैं परन्तु यदि तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क का मान उसके किसी अङ्क से न्यून हो तो उपान्तिम अङ्क में एक न्यून कर तब उसके आगे इसके उस अङ्क को रख कर तीसरा अन्तर बनाना जैसा कि '४६८, और '४६९ मे है जैसे लागा(१ ४६०), लागा(१'४६१), लागा (१ ४६२) · · लागा(१'४६९) इन का मान जानना हो तो ४६ के सामने का अङ्क लेने से

३,४,३,२,०,१,२,८,८ ये हुए इन का उत्थापन तीसरे अन्तर (—३८५) के

$\triangle^3$ के लिये अङ्क	$\triangle^3$	$\triangle^2$	$\triangle$	लागा(१ + य)				य
०	−३८५	४२०४९८	−४७६०५२	९४७	२३९	७३४	४३०	४६०
३	३८३	४२०११३	−५५'१५४	९४७	२३९	२५८	३७८	४६१
४	३८४	४१९७३०	+ ३६४५,१९	९४७	२३९	२०२	८२४	४६२
३	३८३	४१९३४६	७८४२८९	९४७	२३९	५६७	३८३	४६३
२	३८२	४१८९६३	१२०३६३५	९४७	२४०	३५१	६७२	४६४
०	३८०	४१८५८१	१६२२५९८	९४७	२४१	५५५	३०७	४६५
१	३८१	४१८२०१	२०४११७९	९४७	२४३	१७७	९०५	४६६
२	३८२	४१७८२०	२४५९३८०	९४७	२४५	२१९	०८४	·४६७
८	३७८	४१७४३८	२८७७२००	९४७	२४७	६७८	४६४	·४६८
८	३७८	४१७०६०	३२९४६३८	९४७	२५०	५५५	६६४	४६९
		४१६६८२	३७११६९८	९४७	२५३	५५०	३०२	४७०

अन्तिम अङ्क के स्थान मे देने से और अन्त के दो अङ्कों ८, ८ के तीसरे अन्तर के अन्तिम अङ्क, ५ से वड़ा होने के कारण तीसरे अन्तर के उपान्तिम अङ्क ८ मे एक कम कर देने से ४६१, ४६२, · ४६९ का तीसरा अन्तर वना फिर इनका संस्कार वीजगणित की रीति से धन ऋण के वश ·४६० के दूसरे अन्तर मे करने से नवो का दूसरा अन्तर वन गया फिर इनका संस्कार ·४६० के प्रथम अन्तर में करने से सभों का प्रथम अन्तर वन गया और अन्त मे य के ·४६० मान मे जो लागा(१ + य) है इसमे प्रथम अन्तर का संस्कार करने से सभो का लघुरिक्थ वन गया है। इन सभो का क्रम पूर्वक न्यास ऊपर के चक्र में लिख दिया है। इस पर से सव अन्तरो को लेकर चलनकलन के ८५-८६ प्रक्रम से यदि गा(१ + य) के न्यूनतम मान का (जो कि २११ प्रक्रम से य के ·४६१६ · मान मे सिद्ध होता है) सूक्ष्म लघुरिक्थ ले आवो तो ९ ९४७२३९१७४३९३४० इतना आता है।

२४६। $\int$ इ$^{-य}$ य$^{न-१}$ ताय इस यूलर के दूसरे चल मे यदि वड़ी सीमा ∞ के तुल्य न हो किन्तु अ के तुल्य हो तो खण्डचलानयन से

$$\int_0^{अ} इ^{-य} य^{न-१} ताय$$

$$= \frac{अ^न इ^{-अ}}{न}\left\{१+\frac{अ}{न+१}+\frac{अ^२}{(न+१)(न+२)}+\frac{अ^३}{(न+१)(न+२)(न+३)}+ \cdot\right\}$$

वा, $\int_{अ}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय$

$$= अ^{न-१} इ^{-अ}\left\{१+\frac{न-१}{अ}+\frac{(न-१)(न-२)}{अ^२}+\frac{(न-१)(न-२)(न-३)}{अ^३}+ \cdot\right\}$$

यदि अ < १ और न बड़ी भारी संख्या हो तो पहली श्रेढी का और यदि न < १ से और अ बड़ा हो तो दूसरी श्रेढ़ी का आसन्न मान जान सकते हो। १ से न के छोटे होने में दूसरी श्रेढी के सम पद ऋण और विषम पद सब धन होंगे।

अब $\int_0^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय = \int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय + \int_0^{य} इ^{-य} य^{न-१} = गा(न)$

इस लिये $\int_0^{य} इ^{-य} य^{न-१} ताय = गा(न) - \int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय$

$$= गा(न) - इ^{-य} य^{न-१} या \cdots \qquad (१)$$

यदि $\int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न-१} ताय = इ^{-य} य^{न-१}$ या ऊपर की दूसरी श्रेढी के मान पर से मान लो तो इसका तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$इ^{-य} य^{न-१} = -(न-१)\, इ^{-य} य^{न-२} या + इ^{-य} य^{न-१} या - इ^{-य} य^{न-१} य\acute{ा}$$

$इ^{-य} य^{न-१}$ का भाग दे देने से और पक्षान्तरानयन से

$$य\acute{या} = \{य-(न-१)\} या - य \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \qquad (२)$$

समझो कि $य\acute{या} = (य-अ_१) या - य + क_१ या^२$ यह एक (३) समीकरण है।

इसमें यदि $या^२$ का भाग दे दो और $\frac{१}{या} = १ + \frac{ग_१ या_१}{य}$

$$-य ग_१ \frac{य\acute{या}_१ - या_१}{य^२} = (य - अ_१)\left(१ + ग_१ \frac{या_१}{य}\right) - य\left(१ + ग_१\frac{या_१}{य}\right)^२ + क_१$$

वा $य\acute{या}_१ = (य + अ_१ + १) या_१ - \frac{क_१ - अ_१}{ग_१} य + ग_१ या_१^२$

कल्पना करो कि $ग_1 = क_1 - अ_1$, $क_2 = ग_1$, $अ_2 = -(अ_1 + १)$ तो

$य या'_1 = (य - अ_2) या_1 - य + क_2 या_1^2$ यह ठीक पिछले ही समीकरण के ऐसा उत्पन्न हुआ, इसमें फिर $\frac{१}{या_1} = १ + \frac{ग_2 \, या_2}{य}$ ऐसा मान पूर्ववत् क्रिया करे और $ग_2 = क_2 - अ_2$, $क_3 = ग_2$, $अ_3 = -(अ_2 + १)$ तो फिर।

$य या'_2 = (य - अ_3)\, या_2 - य + क_3\, या_2^2$ ऐसा समीकरण बनेगा। यों वार वार क्रिया करने से

$$या = \frac{१}{१ + ग_1 य^{-१} या_1} = \frac{१}{१ + ग_1 य^{-१} \frac{१}{१ + ग_2 य^{-१} या_2}} = \frac{१}{१ + \frac{ग_1 य^{-१}}{१ + ग_2 य^{-१} या_2}}$$

$$= \frac{१}{१ + \frac{ग_1 य^{-१}}{१ + \frac{ग_2 य^{-१}}{१ + ग_3 य^{-१} या_3}}} = \frac{१}{१ + \frac{ग_1 य^{-१}}{१ + \frac{ग_2 य^{-१}}{१ + \frac{ग_3 य^{-१}}{१ + ग_4 य^{-१} या_4}}}}$$

इस रीति से या का मान एक वितत भिन्न रूप मे आता है जिसका मान जगह बचाने के लिये लाघव से।

$या = \frac{१}{१+} \, \frac{ग_1 य^{-१}}{१+} \, \frac{ग_2 य^{-१}}{१+} \, \frac{ग_3 य^{-१}}{१ + इत्या}$ .. ऐसा लिखते हैं

अब (३) मे यदि $अ_1 = न - १ = न_1$ और $क_1 = ०$ तो यह ठीक (२) समीकरण हो जायगा इस लिये अब जो $ग_1$, $ग_2$, इत्यादि पर से या का विततभिन्न के रूप मे मान आवेगा इसका उत्थापन (१) मे देने से $\int_0^य इ^{-य} य^{न-१}$ इस का मान आ जायगा। यदि अ, क, ग को $अ_1$, $क_1$, $ग_1$ इत्यादि के मान जानने के लिये साँचा मानो तो

$ग_1 = क_1 - अ_1$, $क_2 = ग_1$, $अ_2 = -(अ_1 + १)$ इन पर से

	१	२	३	४	५	६	७	८	इत्या
अ	$न_1$	$-(न_1 + १)$	$न_1$	$-(न_1 + १)$	$न_1$	$-(न_1 + १)$	$न_1$	$-(न_1 + १)$	इत्या.
क	०	$-न_1$	१	$१ - न_1$	२	$२ - न_1$	३	$३ - न_1$	इत्या.
ग	$-न_1$	१	$१ - न_1$	२	$२ - न_1$	३	$३ - न_1$	४	इत्या.

फिर ग के मान पर से

$$\int_{य}^{\infty} इ^{-य} य^{न_१} ताय = इ^{-य} य^{न_१} \cfrac{१}{१ - \cfrac{न_१ य^{-१}}{१ + \cfrac{य^{-१}}{१ + इत्या०}}}$$

$$= इ^{-य} य^{न_१} \frac{१}{१-} \frac{न_१ य^{-१}}{१+} \frac{य^{-१}}{१+} \frac{(१-न_१) य^{-१}}{१ + इत्या०}$$

इस में यदि य = अ और अ एक वड़ी संख्या हो तो वहुत जल्द आसन्नमान सूक्ष्म आ जायगा फिर $\int_{अ}^{\infty} इ^{-य} य^{न_१} ताय$ इसके मान से (१) समीकरण से $\int_{०}^{अ} इ^{-य} य^{न_१} ताय$ इसका भी आसन्नमान आ जायगा।

अव इतना ही कह कर इस अध्याय को समाप्त करते हैं कि इस सान्तचलानयन से अनेक चमत्कार प्रकार उत्पन्न होते हैं इसी लिये गणितज्ञ लोग आज तक कुछ न कुछ विचार करते ही चले जाते हैं। इसमे प्रवेश होने के लिये जितना हमने दिखलाया है उतना ही वहुत है।

अभ्यास के लिये प्रश्न ।

सिद्ध करो कि

१। $\int_{०}^{\frac{\pi}{४}} \frac{ज्यापताप}{कोज्याप} = \sqrt{२} - १$

२। $\int_{०}^{अ} \frac{ताय}{\sqrt{य} + \sqrt{(अ + य)}} = \frac{४}{३} अ^{\frac{१}{२}} \sqrt{(\sqrt{२} - १)}$

३। $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ताय}{अ + २कय + गय^{२}} = \frac{\pi}{\sqrt{(अग - क^{२})}}$ यदि अग 7 क^{२}

४। $\int_{०}^{१} य^{३} (१ - य)^{\frac{५}{२}} ताय = \frac{२^{५}}{३ \; ७ \; ११ \; १३}$

५। $\int_{०}^{१} य^{४} (१ - य)^{\frac{१}{४}} ताय = \frac{२^{१३}}{५ \; ७ \; ९ \cdot १३ \cdot १७}$

६। $\int_{०}^{\frac{\pi}{२}} ज्या^{२ \; -१} य कोज्या^{२न-१} यताय = \frac{\lfloor म - १}{न(न + १) \cdot \; (न+म+१)}$

७। $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{(\text{अ}+\text{कय}^{२})^{१+\frac{\text{न}}{२}}} = \frac{२\,४\,६\cdots(२\text{न}-१)}{३\,५\,७\cdots\text{न}}\frac{१}{\sqrt{(\text{अक}^{१+\text{न}})}}$

८। $\int_{0}^{१} \left\{\text{ला}\frac{१}{\text{य}}\right\}^{\text{न}}\text{ताय} = \underline{|\text{न}}$

९। $\int_{0}^{\text{अ}} \frac{\text{ताय}}{(\text{अ}^{\text{न}}-\text{य}^{\text{न}})^{\frac{१}{\text{न}}}} = \frac{\pi}{\text{न ज्या}\frac{\pi}{\text{न}}}$

१०। $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{(\text{य}^{२}+\text{अ}^{२})(\text{य}^{२}+\text{क}^{२})} = \frac{\pi}{२\text{अक}(\text{अ}+\text{क})}$

११। $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{१-\text{य}^{४}} = \frac{\pi}{४}$

१२। $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \text{स्प}^{\text{न}}\text{य ताय} = \frac{\pi}{२\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$ यदि $\text{न} < १$

१३। $\int_{0}^{१} \frac{\text{य}^{\text{म}}+\text{य}^{-\text{म}}}{\text{य}^{\text{न}}+\text{य}^{-\text{न}}}\frac{\text{ताय}}{\text{य}} = \frac{\pi}{२\text{नकोज्या}\frac{\text{म}\pi}{२\text{न}}}$ यदि $\text{न} > \text{म}$

१४। $\int_{0}^{\infty} \frac{(\text{इ}^{\text{अय}}+\text{इ}^{-\text{अय}})(\text{इ}^{\text{कय}}+\text{इ}^{-\text{कय}})}{\text{इ}^{\pi\text{य}}+\text{इ}^{-\pi\text{य}}}\text{ताय} = \frac{\text{कोज्या}\frac{\text{अ}}{२}\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}}{\text{कोज्याअ}+\text{कोज्याक}}$

यदि $\text{अ}+\text{क} < \pi$

१५। $\int_{0}^{\infty} \frac{(\text{इ}^{\text{अय}}+\text{इ}^{-\text{अय}})(\text{इ}^{\text{कय}}+\text{इ}^{-\text{कय}})}{\text{इ}^{\pi\text{य}}+\text{इ}^{-\pi\text{य}}}\text{ताय} = \frac{\text{ज्याक}}{\text{कोज्याअ}+\text{कोज्याक}}$

यदि $\text{अ}+\text{क} < \pi$

१६। $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{इ}^{\text{कय}}+\text{इ}^{-\text{कय}}}{\text{इ}^{\pi\text{य}}+\text{इ}^{-\pi\text{य}}}\text{कोज्याअय ताय} = \frac{(\text{इ}^{\frac{\text{अ}}{२}}+\text{इ}^{-\frac{\text{अ}}{२}})\text{कोज्या}\frac{\text{क}}{२}}{\text{इ}^{\text{अ}}+२\text{कोज्याक}+\text{इ}^{-\text{अ}}}$

यदि $\text{क} < \pi$

१७। $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{इ}^{\text{कय}}-\text{इ}^{-\text{कय}}}{\text{इ}^{\pi\text{य}}-\text{इ}^{-\pi\text{य}}}\text{कोज्याअयताय} = \frac{\text{ज्याक}}{\text{इ}^{\text{अ}}+२\text{कोज्याक}+\text{इ}^{-\text{अ}}}$

यदि $\text{क} < \pi$

१८। $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{इ}^{\text{कय}}+\text{इ}^{-\text{कय}}}{\text{इ}^{\pi\text{य}}-\text{इ}^{-\pi\text{य}}}\text{ज्याअयताय} = \frac{१}{२}\frac{\text{इ}^{\text{अ}}-\text{इ}^{-\text{अ}}}{\text{इ}^{\text{अ}}+२\text{कोज्याक}+\text{इ}^{-\text{अ}}}$

१९। $\int_{0}^{१} \frac{य^{अ} - य^{-अ}}{१ - य}\, ताय = \pi\, कोस्प\, अ\pi - \frac{१}{अ}$, यदि $अ < १$

२०। $\int_{0}^{\pi} \frac{ला(१ + ज्याअ\, कोज्याय)}{कोज्याय}$ इसका मान क्या होगा

उ० $\pi अ$ (अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

२१। $\int_{0}^{\infty} \frac{इ^{-अय} कोज्यामय}{य}\, ताय$ इसका मान बताओ उ० $स्प^{-१}\left(\frac{म}{अ}\right)$

२२। $\int_{0}^{\infty} \frac{ला(१ + अ^{२}य^{२})}{१ + क^{२}य^{२}}\, ताय$ इसका क्या मान होगा।

उ० $\frac{\pi}{क}\, ला\left(\frac{अ + क}{क}\right)$

(अ के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालो)

२३। $\int_{0}^{\infty} \frac{इ^{अय} + इ^{-अय}}{इ^{\pi य} - इ^{-\pi य}}\, य\, ताय = \frac{१}{४}\, छे^{२}\, \frac{अ}{२}$

सिद्ध करो कि

२४। $\int_{0}^{१} \frac{य^{अ-१} + य^{-अ}}{१ + य}\, \frac{ताय}{य} = ला\left(स्प\frac{अ\pi}{२}\right)$

२५। $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} ला(१ + कोज्याअ\, कोज्याय)\, \frac{ताय}{कोज्याय} = \frac{१}{२}\left(\frac{\pi^{२}}{४} - अ^{२}\right)$

२६। $\int_{0}^{\infty} \frac{य^{अ}\, लाय\, ताय}{१ + य^{२}} = \frac{\pi^{२}}{४}\, \frac{ज्या\frac{अ\pi}{२}}{कोज्या^{२}\frac{अ\pi}{२}}$

२७। $\int_{0}^{\infty} \frac{(य^{२} + अ)\, /\, इ}{य^{४} + क^{२}य^{२} + क^{४}}\, ताय = \frac{\pi}{२}\, \frac{अ^{२} + क}{क^{३}}$

२८। $\int_{0}^{१} नय^{२न-१} इ^{य^{न}}\, ताय = १$

२९। $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} २कोज्या\,(अस्पय)\, ताय = \pi इ^{-अ}$

३०। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\frac{\pi}{२}} \frac{छे^{२}य\, ताय}{(अ^{२} + क^{२}स्प^{२}य)} = \frac{\pi}{२}\left[\frac{१}{अ^{२}} - \frac{१}{अक}\right]$

३१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \sqrt{(\text{स्पय})}\ \text{ताय}$

$$= \frac{\pi}{२} + \text{ला}\{\sqrt{२} - १\}, \text{ मान लो कि स्पय} = \text{य}^२$$

३२। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \sqrt{(\text{कोस्पय})}\ \text{ताय} = \frac{१}{\sqrt{२}}\left[\frac{\pi}{२} + \text{ला}\{\sqrt{२} + १\}\right]$

३३। सिद्ध करो कि कय $\text{इ}^{-\text{अ}^२\text{य}^२}\int_0^{\text{य}} \text{इ}^{\text{अ}^२\text{य}^२}\ \text{ताय} = \frac{\text{क}}{२\text{अ}^२}$, यदि य = ∞

३४। यदि $\text{फ}(\text{य}, \frac{१}{\text{य}}) = \text{फ}(\frac{१}{\text{य}}, \text{य})$ तो सिद्ध करो कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(\text{य}, \frac{१}{\text{य}})} = २\int_१^{\infty} \frac{\text{ताय}}{\text{यफ}(\text{य}, \frac{१}{\text{य}})}$$

३५। सिद्ध करो कि $\int_0^{२\pi} \text{इ}^{\text{कोज्याय}}\text{कोज्याय}(\text{ज्याताय})\text{य} = २\pi$

(डेमाइवर के सिद्धान्त से कोज्याय, कोज्या२य, इत्यादि के रूप में इसके मान तुल्य एक श्रेढी बना कर चलानयन करो)

३६। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \text{ज्या}^{\text{न}}\text{पताप} = \frac{\sqrt{\pi}}{२}\ \frac{\text{गा}(\frac{\text{न}+१}{२})}{\text{गा}(\frac{\text{न}+२}{२})}$

३७। सिद्ध करो कि $\text{गा}(\frac{\text{न}}{२})\text{गा}(\frac{\text{न}+१}{२}) = \frac{\sqrt{\pi}}{२^{\text{न}-१}}\text{गा}(\text{न})$

३८। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{\text{ज्या}^{२\text{म}-१}\text{पकोज्या}^{२\text{न}-१}\text{पताप}}{(\text{अज्या}^२\text{प} + \text{ककोज्या}^२\text{प})^{\text{म}+\text{न}}} = \frac{\text{गा}(\text{म})\text{गा}(\text{न})}{२\text{अ}^{\text{म}}\text{क}^{\text{न}}\text{गा}(\text{म}+\text{न})}$

३९। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अय}}\text{कोज्याकय}\,\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय}$

$$= \frac{\text{गा}(\text{म})}{(\text{अ}^२ + \text{क}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}}\text{कोज्याम}\left\{\text{स्प}^{-१}\frac{\text{क}}{\text{अ}}\right\}$$

और $\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अय}}\text{ज्याकय}\ \text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{म})}{(\text{अ}^२ + \text{क}^२)^{\frac{\text{म}}{२}}}\text{ज्याम}\left\{\text{स्प}^{-१}\frac{\text{क}}{\text{अ}}\right\}$

$\int_0^{\infty} \text{इ}^{-\text{अ}'\text{य}}\text{य}^{\text{म}-१}\text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{म})}{\text{अ}'^{\text{म}}}$,

इसमें $\text{अ}' = \text{अ} - \text{क}\sqrt{-१}$ मान सम्भाव्य, असम्भाव्य को बराबर करो)

४०। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ज्याय}}{\text{य}} = \int_{0}^{\infty} \frac{\text{ज्या}^2\text{य}}{\text{य}^2}$

४१। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty}$ कोज्याकय $\text{य}^{\text{न}-१}$ताय $= \frac{\text{गा(न)}}{\text{क}^{\text{न}}}$ कोज्या $\frac{\text{न}\pi}{२}$

$\int_{0}^{\infty}$ ज्याकय $\text{य}^{\text{न}-१}$ताय $= \frac{\text{गा(न)}}{\text{क}^{\text{न}}}$ ज्या $\frac{\text{न}\pi}{२}$

४२। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{कोज्याकलताल}}{\text{ल}^{\text{न}}}$

$= \frac{१}{\text{गा(न)}} \int_{0}^{\infty} \frac{\text{य}^{\text{न}}\text{ताय}}{\text{क}^2 + \text{य}^2} = \frac{\text{क}^{\text{न}-१}}{\text{गा(न)}} \frac{\pi}{२\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$

$\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ज्याकलताल}}{\text{ल}^{\text{न}}} = \frac{\text{क}^{\text{न}-१}}{\text{गा(न)}} \frac{\pi}{२\text{ज्या}\frac{\text{न}\pi}{२}}$

४३। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \text{इ}^{-\text{र}^2} \text{र}^{-२}\text{तार} = -\sqrt{\pi}$

४४। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} (\text{इ}^{-\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}} - \text{इ}^{-\frac{\text{क}^2}{\text{य}^2}})\text{ताय} = (\text{क}-\text{अ})\sqrt{\pi}$

४५। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ला}(१-२\text{नकोज्याकय}+\text{न}^2)\text{ताय}}{\text{य}} = ०$

यदि न < १

४६। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty}$ ला $\frac{१+२\text{नकोज्याअय}+\text{न}^2}{१+२\text{नकोज्याकय}+\text{न}^2} \frac{\text{ताय}}{\text{य}}$ यह क्रम से

२ ला(१ + न)ला $\frac{\text{क}}{\text{अ}}$, २ला$(१+\frac{१}{\text{न}})$ ला $\frac{\text{क}}{\text{अ}}$ इस के तुल्य होगा

यदि न < १, न > १

(फ़ुलानी का सिद्धान्त देखो)

४७। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \frac{\text{ताय}}{१+\text{य}^2}$ ला$(\text{य}+\frac{१}{\text{य}}) = \pi$ ला(२)

(य = स्पष ऐसा मान कर आगे क्रिया करो)

४८। सिद्ध करो कि $\int_{0}^{\infty} \left[\frac{\text{इ}^{-\text{अय}}-\text{इ}^{-\text{कय}}}{\text{य}}\right]^2 \text{ताय} = \text{ला} \frac{(२\text{अ})^{२\text{अ}}(२\text{क})^{२\text{क}}}{(\text{अ}+\text{क})^{२(\text{अ}+\text{क})}}$

४९। सिद्ध करो कि $\int_0^१ \frac{य^म - य^न}{लाय} \frac{ताय}{य} = ला \frac{म}{न}$

(लाय = र मान दूसरा रूप बना कर फ्रुलानी का सिद्धान्त लगावो) वा द्विगुण चलानयन $\int_न^म \int_0^१ य^{अ-१} ताय \ ताअ$ इसका करो)

५०। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{४}} \{ \sqrt{(स्पष)} + \sqrt{(कोस्पष)} \} ताष = \frac{\pi}{२\sqrt{२}}$

५१। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{२}} \frac{स्प^न प}{अकोज्या^२ प + कज्या^२ ब}$

$$= \frac{\pi}{२ कोज्या \frac{१}{२} न\pi} \frac{१}{अ^{\frac{१-न}{२}} क^{\frac{१+न}{२}}}$$

यदि $न < १$

५२। सिद्ध करो कि $ला \int \left\{ \frac{इ^य + १}{इ^य - १} \right\} ताय = \frac{\pi^२}{४}$,

($इ^य$ का अंश हर मे भाग देकर लघुरिक्थ की श्रेढी से क्रिया करो)

५३। सिद्ध करो कि $\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{य} \ लाय}{(१+य)^२} ताय = \pi$

५४। सिद्ध करो कि $\int_0^१ \frac{य^{द-१} (१-य)^{म-१}}{(क+गय)^{द-म}} ताय$

$$= \frac{गा(द) गा(म)}{गा(द+म)} \frac{१}{क^म (क+ग)^द}$$

५५। सिद्ध करो कि $\int_0^{\pi} \frac{ज्या^{न-१} ष \ ताष}{(अ_१ + क_१ कोज्याष)^न}$

$$= \frac{\{गा(\frac{न}{२})\}^२}{गा(न)} \frac{२^{न-१}}{(अ_१^२ - क_१^२)^{\frac{न}{२}}}$$

५६। सिद्ध करो कि $न \int_0^१ \frac{य^{म-१} ताय}{(१-य^न)^{\frac{म}{न}}} = \frac{\pi}{ज्या \frac{म\pi}{न}}$

५७। सिद्ध करो कि

$$(१-ग)^{\frac{म}{न}} \int_0^१ \frac{य^{\frac{म}{न}-१} ताय}{(१+गय)(१-य)^{\frac{म}{न}}} = न \int_0^१ \frac{य^{म-१} ताय}{(१-य^न)^{\frac{म}{न}}}$$

५८। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{\text{ज्या अय ज्या}^2 \text{गय}}{\text{य}}$ ताय इस का मान अ, और π के वश से ० वा $\pm \frac{\pi}{4}$ अथवा $\pm \frac{\pi}{2}$ होगा।

५९। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{इ}^{-(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2})\text{क}} \text{ताय} = \sqrt{\frac{1}{\text{क}}}\, \frac{\sqrt{\pi}}{2} \text{इ}^{-2\text{अक}}$

६०। सिद्ध करो कि

$$\int_0^\infty \text{इ}^{-(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2})\text{कोज्याप}} \text{कोज्या} \left\{ \left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right) \text{ज्याप} \right\} \text{ताय}$$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \text{इ}^{-2\text{अकोज्याप}} \text{कोज्या} \left\{ 2\text{अज्याप} + \frac{\text{प}}{2} \right\}$$

और $\int_0^\infty \text{इ}^{-(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2})\text{कोज्याप}} \text{ज्या} \left\{ \left(\text{य}^2+\frac{\text{अ}^2}{\text{य}^2}\right) \text{ज्याप} \right\} \text{ताय}$

$$= \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, \text{इ}^{-2\text{अकोज्याप}} \text{ज्या} \left(2\text{अज्याप} + \frac{\text{प}}{2} \right)$$

(५९वें प्रश्न में क के स्थान में कोज्याप + ज्याप $\sqrt{-1}$ का उत्थापन दे कर सम्भाव्य और असम्भाव्य को अलग अलग बराबर करो)

६१। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \frac{(1-\text{य}^2)\ \text{कोज्या गय ताय}}{1+\text{य}^2} = \pi\, \text{इ}^{-\text{ग}}$

६२। सिद्ध करो कि $1 - \frac{\text{य}^2}{2^2} + \frac{\text{य}^4}{2^2 \cdot 4^2} - \frac{\text{य}^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{कोज्या} (\text{यज्यार})\ \text{तार}$$

६३। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{ज्यायज्या}^{-1} (\text{ज्याय ज्यार})\ \text{ताय तार} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

६४। सिद्ध करो कि $\int_0^\infty \text{कोज्या} (\text{कय}^{\frac{1}{\text{न}}})\ \text{ताय} = \frac{\text{गा}(\text{न}+1)\ \text{कोज्या} \left(\frac{\text{न}\pi}{2}\right)}{\text{क}^{\text{न}}}$

६५। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{\text{लाय ताय}}{1+\text{य}} = -\frac{\pi^2}{12}$

६६। सिद्ध करो कि $\int_0^1 \frac{\text{ताय}\ (\text{लाय})^{2\text{न}-1}}{1-\text{य}}$

$$= -\lfloor\underline{२न-१} \left[१ + \frac{१}{२^{२न}} + \frac{१}{३^{२न}} + \cdots \right.$$

६७। सिद्ध करो कि $\int_0^{\frac{अ}{२}} \frac{ताय}{\sqrt{(२अय-य^२)}\sqrt{(अ^२-य^२)}}$

$= \frac{२}{३अ}$ दै$_१$(ग, $\frac{\pi}{२}$), जहाँ ग $= \frac{१}{३}$

{ ३४ प्रक्रम का (३) और ३७ प्रक्रम का (४) उदाहरण देखो }

६८। जिस वक्र का अक्षीय समीकरण श्रु = गज्याप कोज्याप यह है उसमें प = ० और प = $\frac{\pi}{२}$ के बीच मे श्रुति का मध्यम मान निकालो। उ० $\frac{ग}{\pi}$

६९। सिद्ध करो कि

$$\int_{अ}^{\infty} इ^{-य^२} ताय = \frac{इ^{-अ^२}}{२अ} \frac{१}{१+} \frac{क}{१+} \frac{२क}{१+} \frac{३क}{१+} + \frac{४क}{१+\cdots} \text{ जहाँ } क = \frac{१}{२अ^२}$$

७०। सिद्ध करो

$$इ^{य} \int_{य}^{\infty} इ^{-य} लायताय = लाय + \frac{य^{-१}}{१+} \frac{य^{-१}}{१+} \frac{२य^{-१}}{१+} \frac{२य^{-१}}{१+} \frac{३य^{-१}}{१+} \frac{३य^{-१}}{१+} \cdots$$

७१। पचीस अंगुल आधार पर जो वर्गाकार एक रूमाल थी उसके बीच मे एक किनारे से दूसरे किनारे तक एक लड़के ने एक टेढ़ी लाल रोशनाई से धारी कर दी। धारी के प्रतिबिन्दु से सामने के भुज पर लम्ब डाला तो लम्ब का मान $६\sqrt{य}$ ठहरा तो लम्बो के मध्यम मान तुल्य लम्ब से य का क्या मान होगा। एक कोने से लम्ब मूल का अन्तर य है। उ० य = ११$\frac{१}{९}$ अंगुल

इति नवमाध्याय ।



अथ दशमाध्याय।

मिश्रित प्रकीर्णक।

२४७। ६३ वे प्रक्रम के अन्त मे सिद्ध हो चुका है कि यदि सीमा स्थिराङ्क हो तो $\int_{अ}^{क}\int_{ग}$ फ(य,र) तारताय = $\int_{ग}^{घ}\int_{अ}^{क}$ फ(य,र) तायतार

परन्तु यदि इन सीमाओं में से कोई दो चल हो जैसा कि ६४ वे प्रक्रम मे दिखलाया है तब कैसे क्रम को बदल कर चलानयन करना इसके लिये एक उदाहरण दिखलाते हैं।

$\int_{0}^{अ}\int_{0}^{\sqrt{(अ^2-य^2)}}$ फ (य,र) तार ताय इसमे क्रम को बदलने की इच्छा है। अर्थात् जहाँ पहले र के वश से चलानयन किया गया है वहाँ पहले य के वश से किया चाहते हैं।

यहाँ यदि विचारो तो र की सीमा ० और $\sqrt{(अ^2-य^2)}$ है इसलिये कह सकते हो कि जिस वृत्त का केन्द्र मूल स्थान और व्यासार्द्ध अ है उसके परिधि-चतुर्थांश के प्रतिविन्दु तक र के मान मे पहले चल निकाला गया है फिर र अक्ष और वृत्त के योग विन्दु से लेकर य के अ तुल्य मान मे चल का मान लाया गया है। इसलिये यदि ल = फ(य,र) यह एक घनपृष्ठ का समीकरण कल्पना करे तो ऊपर का द्विगुण चल १७४ वे प्रक्रम से एक घनक्षेत्र के उस खण्ड के घनफल के समान है जो इस वृत्त पाद के प्रतिविन्दु से लम्ब खड़ा करने से लम्बाग्रो के भीतर है। इसलिये यदि अब क्रम बदलना चाहें तो वृत्तपाद के भीतर पहले य की सीमा ० और $\sqrt{(अ^2-र^2)}$ होगी फिर र की सीमा ० और अ होगी इसलिये।

$\int_{0}^{अ}\int_{0}^{\sqrt{(अ^2-य^2)}}$ फ(य,र) तारताय = $\int_{0}^{अ}\int_{0}^{\sqrt{(अ^2-र^2)}}$ फ (य,र) तायतार

ऐसा होगा।

क्रम बदलने से क्या अभिप्राय है इसके समझने के लिये केवल ऊपर उदाहरण दिखलाया गया है इसके लिये कोई विधि नहीं है उदाहरण के वश बुद्धिमानों को चाहिये कि क्रम बदलने मे सीमाओ का ज्ञान करें।

२४८। ऊपर के विषय का एक और उदाहरण दिखलाते है।

$\int_{\circ}^{अ} \int_{\circ}^{य} \int_{\circ}^{र}$ फ(य,र,ल) ताल तार ताय इसमें क्रम को वदलना है।

यहाँ सीमाओं के देखने से बोध होता है कि एक सूची के सीमाओं के भीतर चलानयन किया गया है जिसके सीमाओं के धरातल का क्रम से ल = ०, ल = र, र = य, य = अ, ये समीकरण हैं।

इसलिये क्रम वद्लने से

$$\int_{\circ}^{अ} \int_{र}^{अ} \int_{\circ}^{र} \text{फ(य,र,ल)तालतायतार}$$

$$\int_{\circ}^{अ} \int_{\circ}^{र} \int_{र}^{अ} \text{फ(य,र,ल)तायतालतार}$$

$$\int_{\circ}^{अ} \int_{ल}^{अ} \int_{र}^{अ} \text{फ(य,र,ल) तायतारताल}$$

$$\int_{\circ}^{अ} \int_{\circ}^{य} \int_{ल}^{य} \text{फ(य,र,ल) तारतालताय}$$

$$\int_{\circ}^{अ} \int_{ल}^{अ} \int_{ल}^{य} \text{फ(य,र,ल) तारतायताल}$$

ये पॉच भेद होगे। इन पाँचो से वही चल आवेगा जो कि दिये हुए फल का चल होगा। यदि फ(य,र,ल) के स्थान में १ रख लो तो छओ पर से $\frac{अ^३}{६}$ यही मान प्रतीति के योग्य आ जायगा।

२४९। $\int\int$ शातारताय इसको व और श के रूप में वद्ल देना है जहाँ शा, य और र का फल है और

फ$_१$ (य,र,व,श) = ०, फ$_२$(य,र,व,श) = ०, . . . (१)

यहॉ पर इतना समझ लेना चाहिये कि $\int\int$ शातारताय इसमे र के ज्ञात सीमाओ के भीतर चलानयन किया गया है जो सीमाये कि य के फल हैं और य की सीमायें भी ज्ञात हैं और यह भी जानते हैं कि स्थिर हैं।

(१) इसके दोनों समीकरणो पर से व की उन्मिति जान उनके साम्य से स्पष्ट है कि र = फा(य,श) (२) ऐसा होगा।

इस पर से तार = फा'(य,श) ताश जहॉ फा(य,श) य को स्थिर मान श के वश से फा'(य,श) का तात्कालिक सम्बन्ध है।

र, और तार का यह जो मान आया है उसका उत्थापन $\int$ शातार में देने से $\int$ $शा_1$ फा (य,श) ताश ऐसा होगा जहाँ $शा_1$ यह शा के मान में र का उत्थापन देने से शा का रूपान्तर है। इसलिये पहले द्विगुणचलानयन का रूप $\int\int$ $शा_1$ फा(य,श)ताशताय ऐसा होगा जहाँ र के ज्ञात सीमाओं पर से श की भी उचित सीमा (२) समीकरण से विदित हो जायँगी।

आगे अब समझो कि उदाहरण के रूप के वश से जैसा कि २४७–४८ प्रक्रमों में दिखा आये हैं $\int\int$ $शा_1$ फा (य,श) ताश ताय इसमें उचित सीमाओं के भीतर क्रम को बदल कर $\int\int$ $शा_1$ फा (य,श) ताय ताश इसका मान जान लिया अब चाहते हैं कि य और ताय को उड़ा दें और उसके स्थान में व और ताव आ जायँ।

(१) के समीकरणो पर से र की दो उन्मिति जान कर उनके साम्य से य का मान ले आवो तो स्पष्ट है कि य = फि(श,व) · · (३) होगा फिर इस पर से ताय = फि' (श,व) ताव, जहाँ फि(श,व) व के वश से फि(श,व) का तात्कालिक सम्बन्ध है।

द्विगुणचल का जो $\int\int$ $शा_1$ फा(य,श) तायताश यह रूपान्तर है इसमे य, और ताय के मान का उत्थापन देने से

$\int\int$ शा' फा(य,श) फि'(श,व) ताव ताश जहाँ $शा_1$ के मान में य के मान का उत्थापन देने से शा' आया है और फा(य,श) के मान में य के स्थान मे फि(श,व) का उत्थापन दे देना है।

यहाँ य की जानी हुई सीमाओं पर से (३) समीकरण के बल से श के रूप में व की सीमा विदित हो जायगी।

(१) से और चलनकलन के

$$\frac{ताफ_1}{तार}\,\frac{तार}{ताश}+\frac{ताफ_1}{ताव}\,\frac{ताव}{ताश}+\frac{ताफ_1}{ताश}=0,$$

$$\frac{ताफ_2}{तार}\,\frac{तार}{ताश}+\frac{ताफ_2}{ताव}\,\frac{ताव}{ताश}+\frac{ताफ_2}{ताश}=0,$$

$$\frac{ताव}{ताश}\text{ की उन्मिति से }\frac{\frac{ताफ_1}{तार}\,\frac{तार}{ताश}+\frac{ताफ_1}{ताश}}{\frac{ताफ_1}{ताव}}=\frac{\frac{ताफ_2}{तार}\,\frac{तार}{ताश}+\frac{ताफ_2}{ताश}}{\frac{ताफ_2}{ताव}}$$

इस लिये $\frac{\text{तार}}{\text{ताश}} = \text{फ}'(\text{य},\text{श}) = \dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}$

तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर र और व के स्थान में उनका मान जो य और श के रूप में आया है रख देना चाहिये।

इसी तरह (१) से

$$\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\,\frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}} = 0,$$

$$\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}\,\frac{\text{तार}}{\text{ताव}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} = 0,$$

इस पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}$ की उन्मिति जान कर

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}} = \dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}} = \text{फि}'(\text{श},\text{व})$$

इस लिये फां (य,श) फिं (श,व)

$$= \dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}}$$

इन सबका उत्थापन देने से।

$$\iint \text{शातारताय} = \iint \text{शा}\,\dfrac{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{तार}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताय}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताय}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{तार}}}\,\text{तावताश} \quad (४)$$

यहाँ भी तात्कालिक सम्बन्ध लेने के अनन्तर य और र के मान का उत्थापन दे देना चाहिये जो कि व और श के रूप मे आये हैं और शा के मान मे भी य, र के इन्हीं मानो का उत्थापन दे दो।

यदि (१) समीकरण का रूप

$\text{फ}_1(\text{य},\text{र},\text{व},\text{श}) = \text{य} - \text{फी}_1(\text{व},\text{श}) = 0, \text{र} - \text{फी}_2(\text{व},\text{श}) = 0, = \text{फ}_2(\text{य},\text{र},\text{व},\text{श}) \cdots (५)$

ऐसा हो तो

$\frac{ताफ_1}{ताय} = १, \frac{ताफ_1}{तार} = ०, \frac{ताफ_2}{ताय} = ०, \frac{ताफ_2}{तार} = १,$

इस का उत्थापन (४) में देने से

$$\int\int शा\, तारताय = \int\int शा \left(\frac{ताफी_1}{ताव} \frac{ताफी_2}{ताश} - \frac{ताफी_1}{ताश} \frac{ताफी_2}{ताव} \right) तावताश$$

यहाँ (५) वे से य, और र के मान व और श के रूप में जो निकलेंगे उनका उत्थापन शा में दे देना चाहिये ।

यदि (५) वें से य, और र के रूप में फी$_1$(व,श) और फी$_2$(व,श) का मान जानकर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो तो ऊपर का समीकरण नीचे लिखे समीकरण के समान होगा ।

$$\int\int शा\, तारताय = \int\int शा \left(\frac{ताय}{ताव} \frac{तार}{ताश} - \frac{ताय}{ताश} \frac{तार}{ताव} \right) ताशताव \cdots (६)$$

यदि (१) समीकरण का रूप नीचे लिखे के ऐसा हो

$$व - फु_1(य,र) = ०, \quad श - फु_2(य,र) = ० \quad \cdot\ \cdot \quad \cdot\ \cdot\ \cdot \quad (७)$$

तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\int\int शा\, तारताय \int\int \frac{शा\, ताव\, ताश}{\frac{ताफु_1}{ताय}\frac{ताफु_2}{तार} - \frac{ताफु_2}{ताय}\frac{ताफु_1}{तार}} = \int\int \frac{शा\, ताव\, ताश}{\frac{ताव}{ताय}\frac{ताश}{तार} - \frac{ताव}{तार}\frac{ताश}{ताय}} (८)$$

नये चलों के यदि सीमा प्रसिद्ध हो जायँ तो (४), (६), और (८) वें से नये चल राशि के वश से द्विगुण चल का मान सहज मे सिद्ध हो जायगा परन्तु $\int$ शा$_1$ फी (य,श) ताश ताय पर से क्रम वदलने में जहाँ कठिनता आ पड़ेगी वहाँ पर ये सब वेकाम पड़ जायँगे ।

२५०। ऊपर के प्रक्रम की व्याप्ति दिखलाने के लिये कुछ उदाहरण दिखलाते हैं ।

(१) $\int_0^{ग} \int_0^{ग-य}$ शा तार ताय इसको व,श के वश से वदल देने की इच्छा है जहाँ य + र = व, र = वश ।

ऊपर के प्रक्रम में जैसा लिखा है वैसी सब क्रिया करने से

$र = \frac{शय}{१-श}$ और $\frac{तार}{ताश} = \frac{य}{(१-श)^2}$ ।

जब र = ० तब श = ० और जब र = ग − य तब श = $\frac{ग - य}{ग}$ इस लिये पहले र को बदलने से

$$\int_{0}^{ग}\int_{0}^{\frac{ग-य}{ग}} शा_{१}\, य(१ - श)^{-२}\, ताश\; ताय$$ ऐसा हुआ।

इस द्विगुणचल का २४७ प्रक्रम के ऐसा यदि स्वरूप विचारो तो ग व्यासार्द्ध से जो वृत्त बनेगा उसके एक व्यास रेखा को य अक्ष मान और उसके एक अग्र से भुज गणना करें तो श का मान, उस कोण की कोटिज्या होगी जो वृत्त के कोट्यग्र पर केन्द्र से गई रेखा और य अक्ष से उत्पन्न होता है। इसलिये एक वृत्तपाद के भीतर श का मान ० और १ के भीतर होगा और य की सीमा ० और ग (१ − श) के भीतर होगी इसलिये यदि ऊपर के द्विगुण चल में क्रम को बदले तो

$$\int_{0}^{१}\int_{0}^{ग(१-श)} शा_{२}\, य(१ - श)^{-२}\, ताय\; ताश$$ ऐसा होगा।

अब इसमें दिये हुए समीकरण से

य = ब(१−श) और $\frac{ताय}{ताब}$ = १ − श और जब य = ० तब ब = ० और जब य = ग(१ − श) तब ब = ग इसलिये ऊपर के द्विगुण चल का रूप

$$\int_{0}^{१}\int_{0}^{ग}\int शां\; ब\; ताब\; ताश$$ ऐसा हुआ।

(२) ∫∫ श तार ताय इसको श्रु, और प के साथ बदल देना है जहाँ य = श्रुकोज्याप, र = श्रुज्याप।

यहाँ मान लो कि श = प और ब = श्रु है तो २४९ प्रक्रम के (६) वे समीकरण से

$$\frac{ताय}{ताप}\frac{तार}{ताश} - \frac{ताय}{ताश}\frac{तार}{ताप} = श्रुकोज्या^{२}प + श्रुज्या^{२}प = श्रु$$

इसलिये ऊपर के द्विगुण चल का रूप ∫∫ शां श्रुताश्रुताप ऐसा हुआ। इसे यदि विचारो तो १७८ वे प्रक्रम मे जो घनफल जानने के लिये अक्षीय समीकरण पर से प्रकार लिखा है उसी के समान है। सीमाओ का विचार अवश्य यहाँ पर कर लेना चाहिये जिसमे य और र के वश से जो अवयव आये हो वेही अवयव ब और श के वश से भी आ जायँ।

इसी में यदि श = फ(अय + कर) तो ऊपर की युक्ति से बदलने पर द्विगुण चल का रूप

$$\int\int फ \{ ज श्रु कोज्या(प - अ_1) \} श्रु ताश्रुताप$$ ऐसा होगा,

जहाँ ज कोज्याअ$_1$ = अ और जज्याअ$_1$ = क। इसमें यदि प − अ$_1$ = प' तो द्विगुण चल का रूप

$$\int\int फ(ज श्रु कोज्या प')श्रुताश्रु ताप'$$, फिर इसमे मान लो कि

श्रुकोज्याप' = य' और श्रुज्याप' = र' तो इसका रूपान्तर

$$\int\int फ(ज य') तार' ताय'$$ ऐसा होगा।

(एक एक को स्थिर मान कर तात्कालिक सम्बन्ध निकालो जैसा कि २४९ वें प्रक्रम में कहा है)

स्वर चिह्न को उड़ा देने से

$$\int\int फ (अय + कर)तार ताय = \int\int फ(जय)तार ताय$$

जहाँ $ज^2 = \surd(अ^2 + क^2)$ और वायें पक्ष की सीमाओं पर से उदाहरण के स्वरूप से दहने पक्ष मे सीमाओं का ज्ञान प्रायः हो सकता है।

(३) १५२ वें प्रक्रम से किसी घनक्षेत्र का पृष्ठफल सिद्ध है कि द्विगुण चल के रूप में $\int\int\surd \{ १ + \left(\frac{ताल}{ताय}\right)^2 + \left(\frac{ताल}{तार}\right)^2 \}$ तार ताय ऐसा होगा इसे ताप, ताप$_1$ के वश से वदलना है जहाँ

ल = श्रुकोज्याप, य = श्रुज्यापकोज्याप$_1$, र = श्रुज्यापज्याप$_1$

पृष्ठ के समीकरण से ल, य और र के रूप मे आजायगा इसलिये ल के स्थान में य, र का फल रख देने से स्पष्ट है कि प, प$_1$ का कोई फल श्रु होगा इसलिये पहले तार ताय बदलने के लिये २४९ वे प्रक्रम की युक्ति से पहले प$_1$ को फिर प को स्थिर मान लेने से

$$\frac{ताय}{ताप} = \frac{ताश्रु}{ताप} ज्यापकोज्याप_1 + श्रुकोज्यापकोज्याप_1$$

$$\frac{ताय}{ताप_1} = \frac{ताश्रु}{ताप_1} ज्यापकोज्याप_1 - श्रुज्याप ज्याप_1$$

$$\frac{तार}{ताप} = \frac{ताश्रु}{ताप} ज्याप ज्याप_1 + श्रुकोज्याप ज्याप_1$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताप}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}\text{ज्याप ज्याप}_1 + \text{श्रुज्यापकोज्याप}_1$$

इस लिये $\frac{\text{ताय}}{\text{ताय}}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}_1} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}} = \text{श्रुज्याप}\left(\text{श्रु कोज्याप} + \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\text{ज्याप}\right)$

इसलिये तार ताय को हटा कर उसके स्थान मे

$$\text{श्रुज्याप}\left(\text{श्रु कोज्याप} + \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\text{ज्याप}\right) \text{ इसे रख दो ।}$$

अब $\sqrt{\left\{1 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2\right\}}$ इसके बदलने के लिये एक एक को स्थिर मानने से चलनकलन के ६६ वे प्रक्रम से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}} + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}_1} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\frac{\text{ताय}}{\text{ताप}_1} + \frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}_1}$$

और $\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\text{कोज्याप} - \text{श्रुज्याप}$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताप}_1} = \frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}\text{कोज्याप}$$

अब इन पर से $\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$ का मान ले आवो तो एक भिन्न होगा जिसका अंश

$$= \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}_1} - \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}$$

$$= \left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\text{कोज्याप} - \text{श्रु ज्याप}\right]\left[\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}\text{ज्याप ज्याप}_1 + \text{श्रुज्याप कोज्याप}_1\right] - \frac{\text{ताल}}{\text{ताप}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}$$

$$= -\text{श्रुज्याप}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1} + \text{श्रुज्यापकोज्यापकोज्याप}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प कोज्याप}_1$$

और हर $= \frac{\text{ताय}}{\text{ताय}}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}_1} - \frac{\text{ताय}}{\text{ताप}_1}\frac{\text{तार}}{\text{ताप}}$ जिसका मान अभी ऊपर ले आये हैं । इस तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} = \frac{\text{श्रुज्यापकोज्यापकोज्याप}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}} - \text{श्रुज्याप}_1\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1} - \text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{पकोज्याप}_1}{\text{श्रुज्याप}\left(\text{श्रुकोज्याप} + \text{ज्याप}\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)}$$

इसी तरह से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}=\frac{\text{श्रुकोज्याप}_1\,\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}_1}+\text{श्रज्याप कोज्याप ज्याष}_1\,\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}-\text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{षज्याप}}{\text{श्रुज्याप}\left(\text{श्रुकोज्याप}+\text{ज्याप}\,\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)}$$

इसलिये $\text{१}+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}\right)^2+\left(\frac{\text{ताल}}{\text{तार}}\right)^2$

$$=\frac{\text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प}+\text{श्रु}^2\left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताष}_1}\right)^2+\text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{ष}\left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2}{\text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{ष}\left(\text{श्रुकोज्याप}+\text{ज्याष}\,\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2}$$

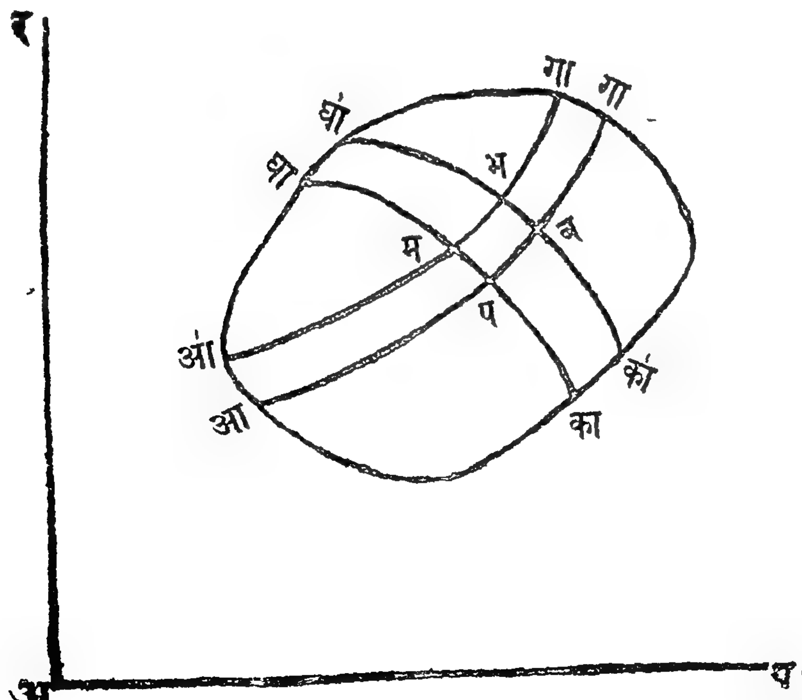
इस लिये बदले हुए द्विगुणचल का रूप

$$\int\!\!\int\sqrt{\left\{\text{श्रु}^2\text{ज्या}^2\text{प}+\left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{तार}_1}\right)^2+\text{ज्या}^2\text{ष}\left(\frac{\text{ताश्रु}}{\text{ताप}}\right)^2\right\}}\ \text{श्रुताष ताप}_1$$

ऐसा हुआ।

यही १५५ वें प्रक्रम में भी लिख आये हैं।

२५१। इस प्रकार से द्विगुणचल का जो परिवर्त्तन किया है उसे क्षेत्ररीति से भी दिखा सकते हैं।



कल्पना करो कि $\int\!\int$ ग्रा तार ताय यह एक द्विगुण चल है जिसका मान आकागाघा सीमा के भीतर जितने य, और र हैं उन सबके वश से निकाला गया

है। मानो कि $य = फ_1 (व,श)$, $र = फ_2 (व,श)$. (१) जहाँ व और श नये चल हैं।

(१) से कल्पना करो कि

$$व = फा_1(य,र), \qquad श = फा_2(य,र) \quad \cdots \quad (२)$$

अब इसके पहले समीकरण मे यदि व के स्थान मे कोई स्थिराङ्क रख दे तो कह सकते हैं कि यह एक कोई वक्र का समीकरण होगा इसलिये नये नये स्थिराङ्को के रखने से इस समीकरण से एक वक्रो की श्रेढी उत्पन्न होगी। मान लो कि व के स्थान मे एक स्थिराङ्क को रख देने से आ प व गा वक्र का समीकरण उत्पन्न हुआ। आ प व गा यह ऐसा वक्र हुआ जिसके प्रतिविन्दु पर $फा_1(य,र)$ यह एक स्थिराङ्क के तुल्य होगा। इसी प्रकार से समझो कि व के स्थान मे व + △ व के रख देने से दूसरा आं म भ गां वक्र हुआ। इसी तरह से (१) मे दूसरे समीकरण से समझो कि श से एक वक्र का प म घा और श के स्थान मे श + △श के रख देने से दूसरा कां व भ घां वक्र हुआ। अब मानो कि प विन्दु का भु = य. और कोटि र है जिनके वश से व भ म विन्दुओ के भुज कोटि को जानना है।

वक्र के समीकरण से स्पष्ट है कि श के स्थान मे श + △ श के रख देने से व विन्दु के भुज कोटि होगे। इसलिये यदि △ श का मान वहुत ही छोटा माने तो व के भुज कोटि के मान (१) से क्रम से $य + \frac{ताय}{ताश} △ श$, और $र + \frac{तार}{ताश} △ श$ होंगे।

इसी तरह व के स्थान मे व + △ व के रख देने से म के भुज कोटि के मान (१) से और △ श को वहुत ही छोटा मानने से $य + \frac{ताय}{ताव}△व$ और $र + \frac{तार}{ताव}△व$ होंगे, व के स्थान मे व + △ व और श के स्थान मे श + △श को रख देने से भ के भुज कोटि क्रम से $य + \frac{ताय}{ताव} △ व + \frac{ताय}{ताश}△श$ और $र + \frac{तार}{ताव}△व + \frac{तार}{ताश} △ श$ के होंगे, । इन चारो विन्दुओ के भुज कोटि के मानो से स्पष्ट होता है कि ये चारो विन्दु एक समानान्तर चतुर्भुज के कोनो पर क्रम से स्थित हैं जो चतुर्भुज अत्यन्त छोटी दशा मे वक्र चापीय चतुर्भुज हो जायगा और उसका फल यदि कोणीय भुज कोटि के वश से ले आवो तो

$$\pm\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}-\frac{\text{ताय}}{\text{ताश}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}\right)\triangle\text{ श }\triangle\text{ व यह होगा।}$$

इस लिये $\int\int$ शा तार ताय इसके स्थान में

$\pm\int\int$ शा$\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताव}}\frac{\text{तार}}{\text{ताश}}-\frac{\text{ताय}}{\text{ताश}}\frac{\text{तार}}{\text{ताव}}\right)$ ताश ताव ऐसा रख सकते हैं जैसा कि २४९ वें प्रक्रम के (६) वें समीकरण में है।

इसमें उदाहरण के स्वरूप के वश से जहाँ पर कि सीमाओं को जानते हैं धन ऋण का संशय निकल जायगा।

यहाँ पर पहले व को स्थिर मान श के वश से जो उचित सीमाओं के भीतर चलानयन किया जायगा वह ऊपर दिखाये हुए अनेक चतुर्भुजों के योग के वश से होगा जिनसे एक आआंगागा धारी वन जायगी फिर उचित सीमाओ के भीतर व के वश से जो चलानयन किया जायगा वह सव धारियों के योग के वश से अर्थात् आकागाघा सीमाओं के वश से होगा। इस प्रकार से आकागाघा सीमाओं पर जो अनेक लम्ब खड़े किये जायँगे उनके भीतर जो घनक्षेत्र का अवयव होगा उसका घनफल आ जायगा यदि ऊपर के द्विगुणचल मे शा = ल मान लें।

२५२। इसी तरह से $\int\int\int$ शा ताल तार ताय इस त्रिगुणचल को तीन नये चल के वश से वदलना हो जहाँ नये चलों का पुराने से सम्बन्ध

य = फ$_1$(व, श, ह), र = फ$_2$ (व, श, ह), ल = फ$_3$ (व, श, ह) . . . . . (१)

इस तरह का होय तो पहले ल के स्थान में ह को रखने के लिये समझ रखो कि जव ताल का साधन करते हैं उस समय य और र को स्थिर मान लेते हैं इस लिये (१) के पहले दो समीकरणों से व की उन्मिति से श का मान य,र और ह के फल रूप में आवेगा फिर विलोम उत्थापन से व का मान भी य,र और ह के कोई फल के रूप में आवेगा। इसलिये ल मे इनका उत्थापन देने से ल का मान भी य,र और ह का कोई फल होगा। इसलिये इस फल में य और र को स्थिर मान जो ताल का मान आवेगा उसका स्वरूप ताह के वश से सिद्ध हो जायगा इसलिये ताल के स्थान में ताह को रख सकते हैं। अथवा (१) से चलनकलन के ६७ वे प्रक्रम से।

$$\frac{\text{ताय}}{\text{ताह}}=0=\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}}+\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\,\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}}+\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{तार}}{\text{ताह}} = 0 = \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}\,\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताह}}$$

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}}\,\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}} + \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताह}}$$

यहाँ $\frac{\text{ताव}}{\text{ताह}}$ और $\frac{\text{ताश}}{\text{ताह}}$ के उन्मितियों पर से

$$\frac{\text{ताल}}{\text{ताह}} = \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}$$

$$\text{जहां ना} = \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताह}}\left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\right)$$
$$+ \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताह}}\left(\frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}}\right)$$
$$+ \frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताह}}\left(\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_3}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}\right)$$

इस लिये ऊपर के त्रिगुण चल का रूप

$$\iiint \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}\,\text{ताह तार ताय ऐसा होगा।}$$

जहां शा_1 ल के स्थान मे ल का मान जो य, र और ह के फल रूप मे आया है उस का उत्थापन दे देने से शा का मान है। और ल के सीमाओ पर से ह सीमायें भी मालूम हो जायंगी।

अब ऊपर के त्रिगुणचल मे मान लो कि दो वार क्रम बदलने से

$$\iiint \text{शा}_1 \frac{\text{ना}}{\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}}\,\text{तार ताय ताह इस का मान}$$

जान लिया तो २४९ वे प्रक्रम की युक्ति से ऊपर (१) के प्रथम दो समीकरणो से तार ताय के स्थान में

$$\left(\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताव}}\,\frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}} - \frac{\text{ताफ}_2}{\text{ताश}}\,\frac{\text{ताफ}_1}{\text{ताश}}\right)\text{ ताव ताश इस को रख सकते हैं।}$$

इस लिये त्रिगुण चल का रूप बदलने से

$$\iiint \text{शा ताव ताश ताह होगा।}$$

जहां य,र और ल के मान जो व,श और ह के फल रूप में आवेंगे उनका शा में उत्थापन देने से शां है।

२५३। इस प्रक्रम में ऊपर के प्रक्रमों का विशेष बोध होने के लिये दो उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) $\int\int\int \cdots$ फ(अ$_१$य$_१$ + अ$_२$य$_२$ + $\cdots$ + अ$_न$य$_न$)ताय$_न$ताय$_{न-१}$ $\cdots$ ताय$_१$

इस अनेक गुणचल को एक गुणचल में बदलना है जहां चलों के प्रतिमानों के वश से (जो कि य$_१^२$ + य$_२^२$ + य$_३^२$ + $\cdots$ + य$_न^२ \angle$ १ इस नियम से आवेंगे) चलानयन किया गया है।

यहां २५० वें प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा बार बार क्रिया करने से अन्त में अनेक गुणचल का रूप

$\int\int\int \cdots$ फ(जय$_१$ $\cdots$) ताय$_न$ ताय$_{न-१}$ $\cdot$ ताय$_१$ ऐसा होगा।

जहां ज = $\sqrt{}$(अ$_१^२$ + अ$_२^२$ + अ$_३^२$ + $\cdots$ + अ$_न^२$)

यहां पर यह जो परिवर्त्तन किया गया है वह सब चलराशियों का वर्गयोग १ से अधिक नहीं है इस नियम को न तोड़ेगा अर्थात् इस में भी सब की वही सीमा रहेंगी जो कि पहले में थी।

इस लिये य$_१$ को छोड़ और चलराशियों के वश से चलानयन करने में और य$_२^२$ + य$_३^२$ + $\cdots$ + य$_न^२ \angle$ १—य$_१^२$ मान लेने से २१४ वें प्रक्रम में यदि द, म, न, इत्यादि को १, प, ब, भ इत्यादि को २ और अ, क, ख इत्यादि को $\sqrt{}$(१ – य$_१^२$) मान लें तो चलराशियों के सब धन मान मे मान

$$\frac{\{ गा(\frac{१}{२}) \}^{न-१}}{२^{न-१} गा(\frac{न-१}{२}+१)} (१-य_१^२)^{\frac{न-१}{२}}$$ यह होगा।

परन्तु यदि जैसे चलराशियों के मान सब धन लिये गये वैसे ही ऋण लिये जाते तो सब मान ऊपर के मान का २$^{न-१}$ गुणित होता। इस लिये सब मान = $\dfrac{\pi^{\frac{न-१}{२}}(१-य_१^२)^{\frac{न-१}{२}}}{गा(\frac{न-१}{२}+१)}$ इस लिये ऊपर के अनेक गुणचल का मान साधारण चल के रूप में य$_१$ के – १ और + १ मान के भीतर

$$\frac{\pi^{\frac{न-१}{२}}}{गा(\frac{न-१}{२}+१)} \int_{-१}^{१} फ(जय_१)(१-य_१^२)^{\frac{न-१}{२}} ताय_१$$ यह होगा।

(२) $\int\int\int \cdots \frac{\text{फ}(\text{अ}_1\text{य}_1 + \text{अ}_2\text{य}_2 + \cdots + \text{अ}_\text{न}\text{य}_\text{न})}{\sqrt{(1 - \text{य}_1^2 - \text{य}_2^2 - \cdots - \text{य}_\text{न}^2)}} \text{ताय}_\text{न}\text{ताय}_{\text{न}-1} \cdots \text{ताय}_1$

इसको साधारण चल के रूप मे ले आना है। जहाँ $\text{य}_1^2 + \text{य}_2^2 + \cdots + \text{य}_\text{न}^2 < 1$

यहाँ भी २५० वे प्रक्रम के (२) उदाहरण के ऐसा वार वार क्रिया करने से

$\int\int\int \cdots \frac{\text{फ}(\text{जय}_1)}{\sqrt{(1 - \text{य}_1^2 - \text{य}_2^2 - \cdots - \text{य}_\text{न}^2)}} \text{ताय}_\text{न}\text{ताय}_{\text{न}-1} \cdots \text{ताय}_1$ ऐसा होगा।

अब यहाँ य_1 को छोड़ और चलराशियो के वश से चलानयन करने से और $\text{य}_2^2 + \text{य}_3^2 + \cdots + \text{य}_\text{न}^2 < 1 - \text{य}_1^2$ इस नियम से चलराशियो के सब धन मान में २१६ वे प्रक्रम से (जैसा कि द, म, न इत्यादि का मान ऊपर (१) उदाहरण में माना है वैसा ही यहाँ भी मान लेने से)

$$\frac{1}{2^{\text{न}-1}} \frac{\{\text{गा}(\frac{1}{2})\}^{\text{न}-1}}{\text{गा}(\frac{\text{न}-1}{2})} \int_0^{1-\text{य}_1^2} (1 - \text{य}_1^2 - \text{च})^{-\frac{1}{2}} \text{च}^{\frac{\text{न}-1}{2}-1} \text{ताय}$$

$$= \frac{1}{2^{\text{न}-1}} \frac{\{\text{गा}(\frac{1}{2})\}^{\text{न}-1}}{\text{गा}(\frac{\text{न}-1}{2})} \frac{\text{गा}(\frac{1}{2})\text{गा}(\frac{\text{न}-1}{2})}{\text{गा}(\frac{\text{न}}{2})} (1 - \text{य}_1^2)^{\frac{\text{न}}{2}-1} \text{ (२१२ वे प्रक्रम से)}$$

$$= \frac{1}{2^{\text{न}-1}} \frac{\{\text{गा}(\frac{1}{2})\}^{\text{न}}}{\text{गा}(\frac{\text{न}}{2})} (1 - \text{य}_1^2)^{\frac{\text{न}}{2}-1}$$

परन्तु यदि चलराशियो के मान ऋण भी लिये जायँ तो स्पष्ट है कि ऊपर का मान $2^{\text{न}-1}$ गुणित होगा।

इसलिये ऊपर के अनेक गुण चल का मान य_1 के -1 और $+1$ मान के भीतर साधारण चल के रूप मे

$\frac{\pi^{\frac{\text{न}}{2}}}{\text{गा}(\frac{\text{न}}{2})} \int_{-1}^{+1} \text{फ}(\text{जय}_1) \, (1 - \text{य}_1^2)^{\frac{\text{न}}{2}-1} \text{ताय}_1$ ऐसा होगा।

२५४। बहुत से त्रिकोणमिति फलो के रूप चलराशिकलन के बल से श्रेढी मे ला सकते हैं। जैसे यह चाहना है कि

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{आ}_1\text{ज्याय} + \text{आ}_2\text{ज्या}2\text{य} + \text{आ}_3\text{ज्या}3\text{य} + \cdots + \text{आ}_\text{म}\text{ज्यामय} \qquad (1)$$

यह समीकरण य के स्थान मे प, २प, ३प, · मप तक उत्थापन देने तक ठीक रहे जहां $\text{प} = \frac{\pi}{\text{न}+1}$ और आ_1, आ_2 · $\text{आ}_\text{म}$ स्थिराङ्क हैं। तो यहां सब स्थिराङ्कों के मान जानने के लिये नीचे लिखे हुए म समीकरण उत्पन्न होगे

$$\text{फ}(\text{य}) = \text{आ}_1\text{ज्याप} + \text{आ}_2\text{ज्या}2\text{प} + \text{आ}_3\text{ज्या}3\text{प} + \cdots + \text{आ}_\text{म}\text{ज्यामप}।$$

$$फ(२ष) = आ_1 ज्या २ष + आ_2 ज्या ४ष + आ_3 ज्या ६ष + \quad + आ_म ज्या २मष ।$$

$$\vdots$$

$$फ(मष) = आ_1 ज्या मष + आ_2 ज्या २मष + आ_3 ज्या मष + \cdots + आ_म ज्या ममष ।$$

इन मे पहले को ज्यासष, दूसरे को ज्या२सष, · अन्त को ज्यामसष से गुण कर जोड़ देने से दहने पक्ष में $आ_न$ का गुणक

$$ज्यासष\ ज्यानष + ज्या२सष\ ज्या२नष + \cdots + ज्यामसष\ ज्यामनष$$

यह होगा। इस गुणक का दूना त्रिकोणमिति से

$$कोज्या\ (स-न)ष + कोज्या२(स-न)ष + \cdots + कोज्याम\ (स-न)ष$$
$$-\{ कोज्या\ (स+न)ष + कोज्या२\ (स+न)ष + \cdots + कोज्याम(स+न)ष \}$$

यह होगा

इसने ऊपर के श्रेढी का योग त्रिकोणमिति से

$$\frac{ज्या(२म+१)\frac{(स-न)}{२}ष - ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}{२\ ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}$$

$$= \frac{ज्या\left\{(स-न)\pi - \frac{(स-न)ष}{२}\right\} - ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}{२\ ज्या\frac{(स-न)ष}{२}}$$ यह होगा और इसी मे न के

स्थान में −न का उत्थापन दे देने से नीचे के श्रेढ़ी का योग

$$\frac{ज्या\left\{(स+न)\pi - \frac{(स-न)ष}{२}\right\} - ज्या\frac{(स+न)ष}{२}}{२\ ज्या\frac{(स+न)ष}{२}}$$

यहाँ स्पष्ट है कि यदि स − न यह विषम संख्या होगी तो ऊपर के श्रेढी का योग शून्य होगा और यदि स − न यह सम संख्या होगी तो योग − १ होगा। इसी तरह स + न के विषम संख्या होने से दूसरी का योग शून्य और सम होने से − १ के तुल्य होगा। इस पर से यह एक सिद्धान्त उत्पन्न होता है कि यदि विषम, और सम के वश से जाति का विचार करे तो कह सकते हैं कि यदि न की जाति स से भिन्न हो तो दोनो योग शून्य और एक हो तो —१ होंगे। परन्तु संख्याओं के सिद्धान्त से यदि स—न विषम तो स + न भी विषम होगा और यदि स—न सम तो स + न भी सम होगा इसलिये यदि न, स के समान न हो अर्थात् स से भिन्न हो तो $आ_न$ का गुणक शून्य होगा।

यदि न = स तो $आ_न$ का गुणक

$$\text{ज्या}^2 \text{सप} + \text{ज्या}^2 २\text{सप} + \cdots + \text{ज्या}^2 \text{मसप}$$

$$= \frac{\text{म}}{२} - \frac{१}{२} \{ \text{कोज्या}२\text{सप} + \text{कोज्या}४\text{सप} + \cdots + \text{कोज्या}२\text{मसप} \}$$

यह होगा जहाँ ऊपर की युक्ति से कोटिज्याओं का योग — १ के बराबर होगा। इसलिये ऐसी दशा मे $\text{आ}_\text{न}$ का गुणक $\frac{\text{म}+१}{२}$ यह होगा।

इसलिये

$$\text{आ}_\text{न} = \frac{२}{\text{म}+१} \{ \text{ज्यासप फ(प)} + \text{ज्या}२\text{सप फ(}२\text{प)} + \cdots + \text{ज्यामसप फ(मप)} \}$$

जहाँ स के स्थान मे १, २, ⋯ म का उत्थापन देने से $\text{आ}_१$, $\text{आ}_२$ ⋯ $\text{आ}_\text{म}$ इत्यादि स्थिराङ्कों के मान व्यक्त हो जायँगे।

ऊपर अ के मान मे यदि म को अनन्त माने तो श्रेढी के द्वारा जो ४० वे प्रक्रम मे चल का स्वरूप दिखलाया है उससे

$\text{आ}_\text{न} = \frac{२}{\pi}\int_0^\pi \text{ज्यानशफ(श)ताश}$ ऐसा होगा और ० और π के भीतर अनन्त तुल्यान्तर य के मानो में

$\text{फ(य)} = \text{आ}_१ \text{ज्याय} + \text{आ}_२ \text{ज्या}२\text{य} + \text{आ}_३ \text{ज्या}३\text{य} + \cdots$ इत्यादि यह समीकरण ठीक होगा।

लाघव से ऊपर के समीकरण को

$\text{फ(य)} = \frac{२}{\pi} \text{यौ}\,{}_१^\infty\, \text{ज्यानय} \int_0^\pi \text{ज्यानशफ(श)ताश}$ ऐसा लिखते हैं यहाँ

$\text{यौ}\,{}_१^\infty$ यह दिखलाता है कि न के स्थान में क्रम से १, २, ⋯ ∞ का उत्थापन देने से जितने मान होंगे उनका योग कर दिया गया है। इस सिद्धान्त को ल्यागरेञ्ज (Lagrange) ने निकाला है। इसके विषय पर प्वाइशान (Poisson) का विशेष दिखलाते हैं।

२५५। २३३ वे प्रक्रम से विदित है कि

$$\frac{१-\text{च}^2}{१-२\,\text{च}\;\text{कोज्या}\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}+\text{च}^2} = १ + २\text{चकोज्या}\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}$$

$$+ २\text{च}^2\text{कोज्या}\frac{२\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}} + २\text{च}^3\text{कोज्या}\frac{३\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}} + \cdots \quad (१)$$

जहाँ च, १ से न्यून है इसलिये श्रेढी का मान सान्त होगा।

(१) के दोनो पक्षों को फ(श) ताश से गुण कर श के वश से चलानयन करो—द, द सीमाओं के भीतर और च को शून्य के समान मान लो तो बायें

पक्ष का अंश शून्य होगा इसलिये यदि इसका हर शून्य न हो तो श्रेढी द्वारा चलानयन की जो विधि है उससे स्पष्ट है कि, बायें पक्ष के चल का मान शून्य होगा परन्तु यदि य का मान—द, और द के भीतर हो तो चलानयन के बीच मे हर में च कोज्या $\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}$ जो यह भाग है उसका मान १ के बराबर होगा इसलिये ऐसी स्थिति मे हर का मान $(१-\text{च})^2$ यह होगा तब यह नही कह सकते कि बायें पक्ष का चल शून्य होगा। ऐसी दशा में इसका मान जानने के लिये कल्पना करो कि श — य = ल और च = १ — इ_1

$$\text{तो} \int \frac{(१-\text{च}^2)\text{फ}(\text{श})\text{ताश}}{१-२\text{चकोज्या}\frac{\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}+\text{च}^2} = \int \frac{\text{इ}_1(१+\text{च})\text{फ}(\text{य}+\text{ल})\text{ताल}}{\text{इ}_1^2+४\text{चज्या}^2\frac{\pi\text{ल}}{२\text{द}}}$$

इसमें निश्चय है कि श—य इसका मान धन वा ऋण जब बहुत ही छोटा होगा उसी समय के मान का तो विचार ही कर रहे हैं इसलिये ज्या चाप का भेद न मानने से और फ(य + ल) = फ(य) कल्पना करने से

$$\int \frac{\text{इ}_1(१+\text{च})\text{फ}(\text{य}+\text{ल})\text{ताल}}{\text{इ}_1^2+४\text{चज्या}^2\frac{\pi\text{ल}}{२\text{द}}} = \text{इ}_1(१+\text{च})\text{फ}(\text{य})\int \frac{\text{ताल}}{\text{इ}_1^2+\frac{\text{च}\pi^2\text{ल}^2}{\text{द}^2}}$$

$$= २\,\text{इ}_1\text{फ}(\text{य})\int \frac{\text{ताल}}{\text{इ}_1^2+\frac{\pi^2\text{ल}^2}{\text{द}^2}} = \frac{२\text{दफ}(\text{य})}{\pi}\text{स्प}^{-1}\frac{\pi\text{ल}}{\text{इ}_1\text{द}}$$

इसमें मानो कि ल की सीमा अ_1, और — क_1 है तो मान

$$\frac{२\text{दफ}(\text{य})}{\pi}\left\{\text{स्प}^{-1}\frac{\pi\text{अ}_1}{\text{इ}_1\text{द}}+\text{स्प}^{-1}\frac{\pi\text{क}_1}{\text{इ}_1\text{द}}\right\} \text{ ऐसा होगा।}$$

इसमें इ_1 को शून्य मान लेने से

२ दफ(य) ऐसा होगा। इसलिये यदि य,—द और द के भीतर हो तो फ(य)

$$= \frac{१}{२\text{द}}\int_{-\text{द}}^{\text{द}} \text{फ}(\text{श})\text{ताश} + \frac{१}{\text{द}}\text{यौ}_१^{\infty}\int_{-\text{द}}^{\text{द}} \text{फ}(\text{श})\,\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi(\text{श}-\text{य})}{\text{द}}\text{ताश} \cdots \cdots (२)$$

यदि य = द वा—द तो बाये पक्ष के चल का मान जब श, द और—द के बहुत ही पास होगा श — य = ल $\frac{२\text{दफ}(\text{य})}{\pi}$ स्प$^{-1}$ $\frac{\pi\text{ल}}{\text{इ}_1\text{द}}$ इन दोनो समीकरणों से क्रम से द { फ(द) + फ(− द) } यह होगा क्योकि जब य = द और श = द तब श — य = ल यह समीकरण दिखलाता है कि ल का मान केवल — क_1 से ० तक

पहुँचेगा और जब श = — द और य = — द तब ल का मान केवल ० से अ, तक होगा । इसलिये ऐसे समय मे (२) का बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ { फ(द) + फ(—द) } यह होगा ।

इस प्रकार से द,— द के बीच वा द,— द के तुल्य य के मान में दहने पक्ष का मान निश्चित हो जाता है ।

२५६। २५५ वें प्रक्रम की युक्ति से यदि ० और द के बीच श के मान में सान्तचलानयन करो तो

$$फ(य) = \frac{१}{२द}\int_{०}^{द} फ(श)ताश + \frac{१}{द} यौ\,{}_{१}^{\infty} \int_{०}^{द} फ(श) कोज्या \frac{न\pi(श-य)}{द} ताश \cdots (१)$$

यह समीकरण ० और द के बीच कोई य के मान में सत्य होगा परन्तु यदि य = ० तो ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (०) और जब य = द तो बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ(द) होगा ।

इसी तरह

$$० = \frac{१}{२}\int_{०}^{द} फ(श)ताश + \frac{१}{द} यौ\,{}_{१}^{\infty} \int_{०}^{द} फ(श) कोज्या \frac{न\pi(श+य)}{द} ताश, \cdots (२)$$

यह ० और द के बीच चाहे जो य का मान मानो समीकरण सत्य होगा । परन्तु जब य = ० तो बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (०) के तुल्य और जब य = द तो बायाँ पक्ष $\frac{१}{२}$ फ (द) के तुल्य होगा ।

(१) और (२) को जोड़ देने से

$$फ(य) = य \frac{१}{द}\int_{०}^{द} फ(श) ताश + \frac{२}{द} यौ\,{}_{१}^{\infty} कोज्या \frac{न\pi य}{द} \int_{०}^{द} कोज्या \frac{न\pi श}{द} फ(श) ताश \cdots (३)$$

यह य का मान चाहे ० और द के तुल्य हो वा इनके बीच मे हो सर्वत्र सत्य रहेगा ।

(१) और (२) के अन्तर से

$$फ(य) = \frac{२}{द} यौ\,{}_{१}^{\infty} ज्या \frac{न\pi य}{द} \int_{०}^{द} ज्या \frac{न\pi श}{द} फ(श) ताश \quad \cdot\ \cdot \quad (४)$$

यह य का मान यदि ० और द के बीच मे हो तब सत्य होगा और जब य = ० और य = द तो बायाँ पक्ष अवश्य शून्य के समान होगा । यदि देखो तो (४) समीकरण ठीक ठीक ल्याग्राञ्ज के सिद्धान्त से मिल जाता है ।

थोड़ा सा परिवर्त्तन कर देने से (३) से (४) और (४) से (३) समीकरण उत्पन्न हो जाता है।

जैसे यदि (३) में फ(य) के स्थान में यदि ज्या $\frac{\pi य}{द}$ फ(य) रख दो तो

$$ज्या \frac{\pi य}{द} फ(य) = \frac{१}{द}\int_{0}^{द} ज्या \frac{\pi श}{द} फ(श) ताश$$

$$+ \frac{२}{द} यौ_{१}^{\infty} कोज्या \frac{न\pi य}{द} \int_{0}^{द} कोज्या \frac{न\pi श}{द} ज्या \frac{\pi श}{द} फ(श) ताश$$

इसमें कोज्या $\frac{न\pi श}{द}$ ज्या $\frac{\pi श}{द}$ के स्थान में इसका जो दूसरा

$\frac{१}{२}$ ज्या $\frac{(न+१)\pi श}{द}$ — $\frac{१}{२}$ ज्या $\frac{(न-१)\pi श}{द}$ यह रूपान्तर है इसे रख देने से ज्या $\frac{\pi य}{द}$ फ(य)

$$= \frac{१}{द} यौ_{१}^{\infty} \left\{ कोज्या \frac{(न-१)\pi य}{द} - कोज्या \frac{(न+१)\pi य}{द} \right\} \int_{0}^{द} ज्या \frac{न\pi श}{द} फ(य) ताश$$

ऐसा होजायगा। इसमें { } इसके अन्तर्गत दोनो खण्डों का त्रिकोणमिति से २ज्या $\frac{न\pi य}{द}$ ज्या $\frac{\pi य}{द}$ ऐसा रूपान्तर कर दोनो पक्षों में ज्या $\frac{\pi य}{द}$ का भाग दे देने से (४) उत्पन्न हो जायगा। और ऊपर जो क्रिया दिखलाया है उसके विपरीत से (४) से (३) यह उत्पन्न हो जायगा।

२५७। इन ऊपर दिखलाये हुए समीकरण रूपी सिद्धान्तों की व्याप्ति दिखलाने के लिये इस प्रक्रम मे कुछ उदाहरण दिखलाते हैं।

(१) य को जीवा की श्रेढी में ले आना है।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण ग्रहण करो और मान लो कि द = π तो यहाँ फ(य) = य इसलिये फ(श) = श

इसलिये $\int_{0}^{द}$ ज्या $\frac{न\pi श}{द}$ फ(श) ताश = $\int_{0}^{\pi}$ शज्यानश ताश

= $\frac{\pi}{न}$ यदि विषम और — $\frac{\pi}{न}$ यदि न सम इसलिये

य = २ { ज्याय — $\frac{१}{२}$ ज्या२य + $\frac{१}{३}$ ज्या३य — $\frac{१}{४}$ ज्या४य + · · }

यह य के ० और π के बीच के मानों में सत्य है और यह भी देख पड़ता है कि यदि य = ० तब भी ठीक है और ऋण मान में भी देखने से स्पष्ट है कि ठीक है इसलिये $-\pi$, π के बीच में $-\pi$, π को छोड़ और सब मानों में समीकरण ठीक हुआ।

(२) कोज्याय को ज्या की श्रेढी में ले आना है। यहाँ भी २५६ का (४) समीकरण लेने से फ(य) = कोज्याय इसलिये फ(श) = कोज्याश इसलिये यदि द = π तो

$$\int \text{ज्या}\,\frac{\text{न}\pi\text{श}}{\text{द}}\,\text{फ(श) ताश} = \int \text{कोज्याश ज्यानश ताश}$$

$$= \tfrac{1}{2}\int \{\text{ज्या(न + १) श} + \text{ज्या(न — १) श}\}\ \text{ताश}$$

$$= -\tfrac{1}{2}\left\{\frac{\text{कोज्या(न + १)श}}{\text{न + १}} + \frac{\text{कोज्या(न — १)श}}{\text{न — १}}\right\}$$

इसलिये $\int_0^{\pi}$ कोज्याश ज्यानश ताश = ० यदि न विषम हो

और = $\frac{\text{२न}}{\text{न}^2-\text{१}}$ यदि सम।

इसलिये

$$\text{कोज्याय} = \frac{2}{\pi}\left\{\frac{\text{४ज्या२य}}{\text{२}^2-\text{१}} + \frac{\text{८ज्या४य}}{\text{४}^2-\text{१}} + \cdots + \frac{\text{१} + (-\text{१})^{\text{न}}}{\text{न}^2-\text{१}}\text{नज्यानय} + \cdot\right\}$$

यह ० और π के बीच, ० और π को छोड़ और य के सब मानो मे सत्य है।

(३) (ग) स्थिराङ्क को चाहते हैं कि य की ज्या श्रेढी मे ले आवें।

यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से और फ(य) = ग, और द = π मान लेने से $\int_0^{\pi}$ ग ज्यानश ताश = ग $\int_0^{\pi}$ ज्यानश ताश = $\frac{\text{२ग}}{\text{न}}$ यदि न विषम, = ०, यदि न सम हो तो

इसलिये

$$\text{ग} = \frac{\text{४ग}}{\pi}\{\text{ज्याय} + \tfrac{1}{3}\,\text{ज्या३य} + \tfrac{1}{5}\,\text{ज्या५य} + \cdot\ \}$$

$\frac{\text{४ग}}{\pi}$ का भाग दे देने से

$$\frac{\pi}{4} = \text{ज्याय} + \tfrac{1}{3}\,\text{ज्या ३य} + \tfrac{1}{5}\,\text{ज्या५य} + \quad \cdot$$

यह ० और π के वीच ० और π को छोड़ और य के सब मानों मे ठीक होगा। इसी में यदि य के स्थान मे $\frac{\pi}{२}$—र रख लें तो

$\frac{\pi}{४}$ = कोज्यार — $\frac{१}{३}$ कोज्या३र + $\frac{१}{५}$ कोज्या५र — $\frac{१}{७}$ कोज्या७र + ...

यह र के —$\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ के वीच —$\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ को छोड़ और सब मानों में ठीक होगा।

(४) य को इसकी कोटिज्या की श्रेढी में ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण ग्रहण करो और द = π मान लो तो

$$\int \text{शकोज्यानशताश} = \frac{\text{शज्यानश}}{\text{न}} + \frac{\text{कोज्यानश}}{\text{न}^{२}}$$

इस लिये $\int_{0}^{\pi}$ शकोज्यानशताश = — $\frac{२}{\text{न}^{२}}$ यदि न, विषम हो।

और = ० यदि न, सम हो।

और $\int_{0}^{\pi}$ शताश = $\frac{\pi^{२}}{२}$ इसलिये

$$\text{य} = \frac{\pi}{२} - \frac{४}{\pi} \left\{ \text{कोज्याय} + \frac{१}{३^{२}}\text{कोज्या३य} + \frac{१}{५^{२}}\text{कोज्या५य} + \cdots \right\}$$

यह य के ० और π मान मे और इनके वीच के मान में भी सत्य होगा।

यदि यहाँ य = $\frac{\pi}{२}$ — र तो र के —$\frac{\pi}{२}$ और $\frac{\pi}{२}$ मान में और इनके बीच के मान में भी र = $\frac{४}{\pi}$(ज्यार — $\frac{१}{३^{२}}$ज्या३र + $\frac{१}{५^{२}}$ ज्या५र ...) यह ठीक रहेगा।

(५) $\text{इ}^{\text{अय}}$ इसको ज्या की श्रेढी में ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से य के ० और π को छोड़ इनके बीच के मान में

$$\text{इ}^{\text{अय}} = \frac{२}{\pi}\text{यौ}_{१}^{\infty} \frac{\text{न}}{\text{अ}^{२} + \text{न}^{२}}(१ - \text{कोज्यान}\,\pi \times \text{इ}^{\text{अ}\pi}) \text{ ज्यानय}$$

{ १० वे प्रक्रम का (५) वाँ उदाहरण देखो }

(६) $\text{इ}^{\text{अय}}$ को कोटिज्या की श्रेढीमें ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\text{इ}^{\text{अय}} = + \frac{\text{इ}^{\text{अ}\pi} - १}{\text{अ}\pi} \frac{२\text{अ}}{\pi} \text{यौ}_{१}^{\infty} \frac{\text{कोज्यान}\pi \times \text{इ}^{\text{अ}\pi} - १}{\text{अ}^{२} + \text{न}^{२}} \text{ कोज्यानय}$$

यह य के ० और π मान में और इनके वीच के मान मे भी ठीक होगा।

(७) ज्याअय को ज्या की श्रेढी मे ले आवो। जहाँ अ < १ है

यहाँ भी २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\text{ज्याअय} = \frac{२}{\pi}\,\text{ज्याअ}\pi \left\{ \frac{\text{ज्याय}}{१^2-\text{अ}^2} - \frac{\text{२ज्या२य}}{२^2-\text{अ}^2} + \frac{\text{३ज्या३य}}{३^2-\text{अ}^2} - \frac{\text{४ज्या४य}}{४^2-\text{अ}^2} + \cdots \right\}$$

यह य के ० और ० और π के वीच π को छोड़ और सव मानो मे ठीक होगा।

(८) कोज्याअय को कोटिज्या की श्रेढी मे ले आवो। जहाँ अ < १ यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\text{कोज्याअय} = \frac{२}{\pi}\,\text{ज्याअ}\pi \left\{ \frac{१}{\text{२अ}} - \frac{\text{अकोज्याय}}{\text{अ}^2-१} + \frac{\text{अकोज्या२य}}{\text{अ}^2-२^2} - \cdots \right\}$$

यह य के ० और π मान में और इनके वीच के मान मे भी ठीक होगा।

(९) $\text{इ}^{\text{अय}} - \text{इ}^{-\text{अय}}$ इस को ज्या की श्रेढी में ले आवो।

यहाँ २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} (\text{इ}^{\text{अश}} - \text{इ}^{-\text{अश}})\,\text{ज्यानश}\,\text{ताश} = -\frac{\text{न}\,(\text{इ}^{\text{अ}\pi} - \text{इ}^{-\text{अ}\pi})}{\text{अ}^2+\text{न}^2}\,\text{कोज्यान}\pi$$

इसलिये

$$\text{इ}^{\text{अय}} - \text{इ}^{-\text{अय}} = \frac{२}{\pi}(\text{इ}^{\text{अ}\pi} - \text{इ}^{-\text{अ}\pi})\left(\frac{\text{ज्याय}}{१^2+\text{अ}^2} - \frac{\text{२ज्या२य}}{२^2+\text{अ}^2} + \frac{\text{३ज्या३य}}{३^2+\text{अ}^2} - \cdots\right)$$

(१०) $\text{इ}^{\text{अ}(\pi-\text{य})} + \text{इ}^{-\text{अ}(\pi-\text{य})}$ इसको कोटिज्या की श्रेढी मे ले आवो। यहाँ २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

$$\int_0^{\pi} \left\{\text{इ}^{\text{अ}(\pi-\text{श})} + \text{इ}^{-\text{अ}(\pi-\text{श})}\right\} \text{कोज्यानश}\,\text{ताश} = \frac{\text{अ}(\text{इ}^{\text{अ}\pi} - \text{इ}^{-\text{अ}\pi})}{\text{अ}^2+\text{न}^2}$$

$$\text{और} \int_0^{\pi} \left\{\text{इ}^{\text{अ}(\pi-\text{श})} + \text{इ}^{-\text{अ}(\pi-\text{श})}\right\} \text{ताश} = \frac{\text{इ}^{\text{अ}\pi} - \text{इ}^{-\text{अ}\pi}}{\text{अ}}$$

$$\text{इसलिये } \frac{\pi}{२}\,\frac{\text{इ}^{\text{अ}(\pi-\text{य})} + \text{इ}^{-\text{अ}(\pi-\text{य})}}{\text{इ}^{\text{अ}\pi} - \text{इ}^{-\text{अ}\pi}} = \frac{१}{\text{२अ}^2} + \frac{\text{कोज्याय}}{१^2+\text{अ}^2} + \frac{\text{कोज्या२य}}{२^2+\text{अ}^2} + \cdots$$

इस प्रकार से हज़ारो उदाहरण सहज में सिद्ध हो जाते हैं।

इन के चलानयन से और भी नये नये चमत्कार उत्पन्न होते चले जाते हैं।

जैसे (२) उदाहरण में जो कोटिज्या का मान ज्या की श्रेढी में आया है उस का यदि ताय से गुण कर चलानयन करो तो।

$$\frac{\pi}{4} \text{ज्याय} = \text{स्थिर} - \frac{\text{कोज्या}२\text{य}}{१\cdot३} - \frac{\text{कोज्या}४\text{य}}{३\cdot५} - \frac{\text{कोज्या}६\text{य}}{५\cdot७} - \cdots$$

इसमें यदि य = ० तो

$$\text{स्थिर} = \frac{१}{१\cdot३} + \frac{१}{३\cdot५} + \frac{१}{५\cdot७} + \cdots = \frac{१}{२}$$

(चलनकलन के २०वें अध्याय के ४४वें "अभ्यासार्थ" प्रश्न में न = ∞ मान $\frac{१}{१\cdot३}$ जोड़ देने से।

२५८। यदि २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण में, जो कि य के ० और द और इन के बीच के सब मान में सत्य है, यदि य का मान द से पार हो तब देखना चाहिये कि दहना पक्ष किस के तुल्य होता है। मानो कि य का मान द और २द के बीच में है और धन है तो यदि य = २ द—य' ऐसा माने जहां य', द से न्यून है तो

$$\text{कोज्या} \frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}} = \text{कोज्या} \left(२\text{न}\pi - \frac{\pi\text{नय}'}{\text{द}}\right) = \text{कोज्या} \frac{\text{न}\pi\text{य}'}{\text{द}}$$

इस लिये इस स्थिति में दहने पक्ष का मान फ(य') होगा।

फिर मानो कि य, २ द से बड़ा है और २ मद + य' इस के तुल्य है जहां य', २ द से अल्प है तो

$$\text{कोज्या}\frac{\text{न}\pi\text{य}}{\text{द}} = \text{कोज्या} \frac{\text{न}\pi\text{य}'}{\text{द}}$$

अर्थात् दहने पक्ष का वही मान हुआ जो कि य के स्थान में य' के रख देने से होता है इस लिये यदि य' ∠ द तो दहने पक्ष का मान फ(य') होगा और यदि य' 7 द ∠ २द तो दहने पक्ष का फ(२द−य') यह मान होगा। इसी प्रकार सिद्ध कर सकते हो कि य के ऋण मान मे भी वही मान होगा जो कि धनमान में होता है।

इसी तरह यदि य धन और २मद+य' इस के तुल्य हो तो २५६ प्रक्रम के (४) समीकरण का मान फ(य') होगा यदि य' ∠ द और यदि य' 7 द तो दहने पक्ष का मान —फ(२द—य') यह होगा। और य के ऋण मान में वेही मान आवेंगे जो कि य के धनमान में आते हैं केवल धन ऋण चिह्न बदल जायगा।

२५९। २५६ प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण मे यह कुछ आवश्यकता नहीं कि य का मान ० और द के बीच में लगातार हो किन्तु ० और अ के बीच के य के मान में $फ(य) = फ_{१}(य)$, अ और क के बीच में य के मान मे $फ(य) = फ_{२}(य)$, और क और ग के बीच में य के मान मे $फ(य) = फ_{३}(य)$, इसी तरह अन्त मे ग और द के बीच में य के मान मे $फ(य) = फ_{४}(य)$ ऐसा मान ले तौ भी समीकरण सत्य रहेगा केवल जब य = ० वा अ, वा क, वा ग तब व्यभिचारित होगा उस समय २५६ वे प्रक्रम की युक्ति से वास्तव में दहने पक्ष का क्या रूप होगा इसका ज्ञान सहज मे हो जायगा। जैसे २५६ वे प्रक्रम के (३) समीकरण का दहना पक्ष जब य = अ तब $\frac{१}{२}\{फ_{१}(अ) + फ_{२}(अ)\}$ यह होगा।

इस लिये यदि य = अ तब $फ_{१}(य) = फ_{२}(य)$ तो (३) समीकरण जब य = अ तब भी सत्य ठहरेगा।

२६०। ज्या और कोटिज्या के रूप मे एक श्रेढी ऐसी बनानी है जिसका योग ग तुल्य हो य के ० और अ के बीच के मानो मे और वही योग शून्य के तुल्य हो य के अ और द के बीच के मानो मे।

यहां २५६ प्रक्रम का (३) समीकरण लेने से

फ(य) = ग, इस लिये फ(श) = ग, श के ० और अ के बीच के मानो मे और फिर उसके बाद श के अ और द के बीच के मानो मे फ(श) = ० = फ(य)

इस लिये

$$\int_{0}^{द} कोज्या\, \frac{नπश}{द}\, फ(श) ताश \text{ यह}$$

$$ग \int_{0}^{अ} कोज्या \frac{नπश}{द}\, ताश = \frac{गद}{नπ}\, ज्या\, \frac{नπअ}{द} \text{ ऐसा होगा।}$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढ़ी

$$\frac{गअ}{द} + \frac{२ग}{π}\left\{ ज्या \frac{πअ}{द} कोज्या \frac{πय}{द} + \frac{१}{२} ज्या \frac{२πअ}{द} कोज्या \frac{२πय}{द} + \frac{१}{३} ज्या \frac{३πअ}{द} कोज्या \frac{३πय}{द} + \cdot \right\}$$

इस मे जब य = अ तब इसका मान $\frac{ग}{२}$ होगा।

अथवा इसी जगह २५६ प्रक्रम का (४) समीकरण लेने से

$$ग \int_0^{अ} ज्या \frac{नशπ}{द} ताश = \frac{गद}{नπ} \left(१ - कोज्या \frac{नअπ}{द}\right)$$

इस लिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{२ग}{π} \left\{ उ\ ज्या \frac{πअ}{द} ज्या \frac{πय}{द} + \frac{१}{२} उ\ ज्या \frac{२πअ}{द} ज्या \frac{२πय}{द} + \frac{१}{३} उ\ ज्या \frac{३πअ}{द} ज्या \frac{३πय}{द} + \cdot \right\}$$ यह होगी

यहां जब $य = ०$ तब यह श्रेढी भी शून्य और जब $य = अ$ तब श्रेढी का मान $\frac{ग}{२}$ होगा।

२६१। एक श्रेढी कोटिज्या के रूप में ऐसी बनाओ जिसका योग ज य हो य के ० और $\frac{द}{२}$ के बीच के मान मे और जब य, $\frac{द}{२}$ और द के बीच मे हो तो वही योग ज (द—य) के तुल्य हो।

यहाँ २५६ प्रक्रम के (३) समीकरण से।

$$\int_0^{द} फ(श) कोज्या \frac{नπश}{द} ताश$$

$$= \int_0^{\frac{द}{२}} ज\ श\ कोज्या \frac{नπश}{द} ताश + \int_{\frac{द}{२}}^{द} ज(द - श) कोज्या \left(\frac{नπश}{द}\right) ताश$$

$$= \frac{जद^२}{π} \left\{ \frac{१}{२न} ज्या \frac{नπ}{२} + \frac{१}{πन^२} कोज्या \frac{नπ}{२} - \frac{१}{πन^२} \right\} + \frac{जद^२}{नπ} \left(ज्या\ नπ - ज्या \frac{नπ}{२}\right)$$

$$- \frac{जद^२}{π} \left\{ \frac{१}{न} ज्या\ नπ - \frac{१}{२न} ज्या \frac{नπ}{२} + \frac{१}{πन^२} कोज्या\ नπ - \frac{कोज्या\ नπ}{πन^२\ २} \right\}$$

$$= \frac{जद^२}{π^२ न^२} \left\{ २\ कोज्या \frac{नπ}{२} - कोज्या नπ - १ \right\}$$

यहि यदि $न = ४म + २$ ऐसा होगा तो $- \frac{४जद^२}{π^२ न^२}$ इसके तुल्य होगा और सर्वत्र शून्य के तुल्य होगा। और

$$\int_0^{द} फ(श)\ ताश = ज \int_0^{\frac{द}{२}} शताश + ज \int_{\frac{द}{२}}^{द} (द - श) ताश = \frac{जद^२}{४}$$

इसलिये अभीष्ट श्रेढी

$$\frac{जद}{४} - \frac{८जद}{π^२} \left\{ \frac{१}{२^२} कोज्या \frac{२πय}{द} + \frac{१}{६^२} कोज्या \frac{६πय}{द} + \frac{१}{१०^२} कोज्या \frac{१०πय}{द} + \cdots \right\}$$

इस श्रेढी का मान यदि र रख ले तो य के ० और $\frac{द}{२}$ मान और इनके बीच के मानो में भी र = ज य और य के $\frac{द}{२}$ और द और इनके बीच के मानों मे भी र = ज(द−य) यह होगा। यदि य का मान द से बड़ा हो तो २५८ वें प्रक्रम से र का मान फिर फिर यही आवेगा क्योंकि २५८ वे प्रक्रम से यदि य = २ द—य' जहाँ य', द से छोटा है तो दहना पक्ष फ(य') के अर्थात् जहाँ य, द से छोटा है वहाँ जो र का मान है वही यहाँ पर भी हुआ। इस तरह से २५६ वें प्रक्रम के (३) और (४) समीकरण से हजारों प्रकार के नये सिद्धान्त बना सकते हो।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। सिद्ध करो कि य के — π और π और इनके बीच के मानों मे

$$\frac{य^२}{४} = \frac{π^२}{१२} — कोज्याय + \frac{कोज्या २य}{२^२} — \frac{कोज्या ३य}{३^२} +$$

२। (१) प्रश्न से सिद्ध करो कि

$$\frac{य^३}{१२} — \frac{π^२य}{१२} = — ज्याय + \frac{ज्या२य}{२^३} — \frac{ज्या३य}{३^३} + \cdots$$

३। सिद्ध करो कि यदि एक श्रेढी ऐसी बनाई जाय जो य के ० और अ के बीच के मानो मे शून्य, य के अ और π — अ के बीच के मानो मे अ, और फिर य के π — अ और π के बीच के मानो मे π — य के तुल्य हो तो

$$\frac{४}{π} \left\{ ज्याअ \; ज्याय + \frac{१}{३^२} ज्या३अज्या३य + \frac{१}{५^२} ज्या ५अ \; ज्या ५ य + \cdots \right\}$$

२६२। जिस समीकरण मे

$$\frac{तार}{ताय}, \frac{ता^२र}{ताय^२}, \frac{ता^३र}{ताय^३}, \cdot \quad \frac{ता^नर}{ताय^न}$$ क्रम से रहते हैं।

उन्हे क्रम से एक घात, प्रथम सम्बन्ध द्वितीय सम्बन्ध, तृतीय सम्बन्ध,....न सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। एक घात को प्रत्येक सम्बन्ध के साथ मिलाना चाहिये। इसी प्रकार जिसमे $\frac{तार}{ताय}$, $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^२$, $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^३$. , $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^न$ ये हों उन्हे एक घात प्रथम सम्बन्ध, द्वितीयघात प्रथम सम्बन्ध, तृतीयघात प्रथम सम्बन्ध, न घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं। और $\left[\frac{ता^मस}{ताय^म}\right]^न$ यह जिसमे हो उसे न घात म सम्बन्ध चलनसमीकरण कहते हैं।

२६३। यदि एक घात प्रथम सम्बन्ध चलनसमीकरण का रूप

$मा + ना \frac{तार}{ताय} = ०$ ऐसा हो जहाँ मा और ना, य और र के फल हों और फलों में य और र के घात संख्याओं का योग प्रत्येक पद में एक ही हों तो कल्पना करो कि र = यल $\therefore \frac{तार}{ताय} = ल + य \frac{ताल}{ताय}$। समीकरण में ना का भाग दे दो तो

$$\frac{मा}{ना} + \frac{तार}{ताय} = ० \text{ वा } \frac{मा}{ना} + ल + य \frac{ताल}{ताय} = ०$$

परन्तु $\frac{मा}{ना}$, $\frac{र}{य}$ वा ल का कोई फल है इसलिये कल्पना करो कि

$\frac{मा}{ना} = फ(ल)$ इसलिये $य \frac{ताल}{ताय} = -\{ल + फ(ल)\}$

$$\therefore \frac{ताय}{य\, ताल} = -\frac{१}{ल + फ(ल)} \quad \therefore ला\left(\frac{य}{ग}\right) = -\int \frac{ताल}{ल + फ(ल)},$$ जहाँ

ग कोई स्थिराङ्क है।

अपने सुभीते के लिये जहाँ कहीं लाघव जान पड़े तहाँ य = रल ऐसा मान कर भी ऊपर की क्रिया कर सकते हो।

(१) उदाहरण

कल्पना करो कि $य + र = (य - र) \frac{तार}{ताय}$

यहाँ र = यल मान लो तो $\frac{तार}{ताय} = ल + य \frac{ताल}{ताय}$

$$\therefore ल + य \frac{ताल}{ताय} = \frac{य + र}{य - र} = \frac{१ + ल}{१ - ल} \quad \therefore य \frac{ताल}{ताय} = \frac{१ + ल^२}{१ - ल}$$

$$\therefore \frac{ताय}{यताल} = \frac{१ - ल}{१ + ल^२} = \frac{१}{१ + ल^२} - \frac{ल}{१ + ल^२}$$

इसलिये $ला\left(\frac{य}{ग}\right) = स्प^{-१} ल - \frac{१}{२} ला(१ + ल^२)$

$$\text{वा } ला\left\{\frac{य}{ग}(१ + ल^२)^{\frac{१}{२}}\right\} = ला \frac{\sqrt{(य^२ + र^२)}}{ग} = स्प^{-१} \frac{र}{य}$$

(२) एक ऐसा वक्र बताओ जिसके भुज कोटि का योग उसके अवान्तर स्पर्श-रेखा के समान हो।

यहाँ चलनकलन से अवान्तर स्पर्शरेखा $= र \frac{ताय}{तार} = य + र$, और $य = रल$,

मान लो $\cdot$ $\frac{\text{ताय}}{\text{तार}} = \text{ल} + \text{र}\frac{\text{ताल}}{\text{तार}} = \frac{\text{य}+\text{र}}{\text{र}} = \text{ल}+१$

$\therefore \frac{\text{तार}}{\text{रताल}} = १ \because$ ला $\left(\frac{\text{र}}{\text{ग}}\right) = \text{ल} = \frac{\text{य}}{\text{र}}$।

२६४। $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार} = \text{वा}$ $\cdot$ (१) इसमें र का मान जानना है जहाँ पा और वा य के कोई फल हैं।

देखो $\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left(\text{र इ}^{\int \text{पाताय}}\right) = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}\text{ इ}^{\int \text{पाताय}} + \text{पार इ}^{\int \text{पाताय}}$

$$= \text{इ}^{\int \text{पाताय}}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}\right)$$

इसलिये (१) को $\text{इ}^{\int \text{पाताय}}$ से गुण देने से

$$\text{इ}^{\int \text{पाताय}}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}\right) = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left(\text{र इ}^{\int \text{पाताय}}\right) = \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}}$$

इसलिये चलानयन से

$$\text{र इ}^{\int \text{पाताय}} = \text{स्थि} + \int \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}}\text{ताय}$$

और $\text{र} = \text{स्थि इ}^{-\int \text{पाताय}} + \text{इ}^{-\int \text{पाताय}} \int \text{वा इ}^{\int \text{पाताय}}\text{ताय}$

(१) उदा० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{र} = \text{अय}^३$,

यहाँ $\text{पा} = १, \int \text{पाताय} = \text{य}$ $\quad \text{इ}^{\int \text{पाताय}} = \text{इ}^{\text{य}}$ और $\text{वा} = \text{अय}^३$

$$\text{र} = \text{स्थि इ}^{-\text{य}} + \text{इ}^{-\text{य}} \int \text{अय}^३\text{इ}^{\text{य}}\text{ताय}$$

$$= \text{स्थिइ}^{-\text{य}} + \text{इ}^{-\text{य}}\text{अ}\left\{\text{य}^३\text{इ}^{\text{य}} - ३\int \text{य}^२\text{इ}^{\text{य}}\text{ताय}\right\}$$

$$= \text{स्थिइ}^{-\text{य}} + \text{अ}\left(\text{य}^३ - ३\text{य}^२ + ६\text{य} - ६\right)$$

(२) उदा० $(१+\text{य}^२)\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{रय} = \text{अ}$, वा $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \frac{\text{य}}{१+\text{य}^२}\text{र} = \frac{\text{अ}}{१+\text{य}^२}$.

यहाँ $\text{पा} = -\frac{\text{य}}{१+\text{य}^२}, \int \text{पाताय} = \text{ला}\frac{१}{\sqrt{(१+\text{य}^२)}}$ और $\text{इ}^{\int \text{पाताय}} = \frac{१}{\sqrt{(१+\text{य}^२)}}$

$$\therefore \text{र}\frac{१}{\sqrt{(१+\text{य}^२)}} = \text{अ}\int \frac{\text{ताय}}{\sqrt{(१+\text{य})}} \times \frac{१}{१+\text{य}^२} = \text{अ}\int \frac{\text{ताय}}{(१+\text{य}^२)^{\frac{३}{२}}}$$

$$= \frac{\text{अय}}{\sqrt{(१+\text{य}^२)}} + \text{स्थि}$$

इसलिये $\text{र} = \text{अय} + \text{स्थि} \sqrt{(१+\text{य}^२)}$

२६५। यदि $\text{र}^{\text{म}-१} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}^{\text{म}} = \text{वा र}^{\text{न}}$ ऐसा समीकरण हो तो दोनों पक्षों मे $\text{र}^{\text{न}}$ का भाग देकर $\text{र}^{\text{म}-\text{न}} = (\text{म}-\text{न})\text{ल}$ मान लो तो

$$\text{र}^{\text{म}-\text{न}-१} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पार}^{\text{म}-\text{न}} = \text{वा}$$

और $\text{र}^{\text{म}-\text{न}-१} \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}}$

$$\therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताय}} + (\text{म}-\text{न}) \text{पाल} = \text{वा}$$

यह अब ठीक २६४ वे प्रक्रम के समीकरण ऐसा हो गया।

(१) उदा० $\text{श} \frac{\text{ताश}}{\text{ताचा}} - \frac{\text{चश}^२}{\text{चा}} = -\frac{\text{म}}{\text{चा}^२}$

यहाँ मान लो कि $\text{श}^२ = २\text{ल} \therefore \text{श} \frac{\text{ताश}}{\text{ताचा}} = \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}$

$$\therefore \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} - \frac{२\text{चल}}{\text{चा}} = -\frac{\text{म}}{\text{चा}^२}$$

अब इस मे $\text{पा} = -\frac{२\text{च}}{\text{चा}} \therefore \int \text{पाताचा} = -२\text{चलाचा} = \text{ला} \frac{१}{\text{चा}^{२\text{च}}}$

$$\therefore \text{इ}^{\int \text{पाताचा}} = \frac{१}{\text{चा}^{२\text{च}}} \therefore \text{ल चा}^{-२\text{च}} = -\text{म} \int \text{चा}^{-(२\text{च}+२)} \text{ताचा}$$

$$= \text{स्थि} + \frac{\text{मचा}^{-(२\text{च}+१)}}{२\text{च}+१} \therefore \text{ल} = \frac{\text{श}^२}{२} = \text{स्थि चा}^{२\text{च}} + \frac{\text{म}}{(२\text{च}+१)\text{चा}}$$

(२) उदा० $\text{यर}^२ \text{तार} + \text{र}^३\text{ताय} = \frac{\text{अताय}}{\text{य}}$, यहाँ भी

ऊपर की क्रिया करने से

$$\text{र}^३ = \frac{३\text{अ}}{२\text{य}} + \frac{\text{स्थि}}{\text{य}^३}$$

२६६। मा ताय + ना तार = ० यह समीकरण $\int \text{फ}(\text{यर}) = \text{ग}$ इसका तात्कालिक चलन सर्वदा नहीं हो सकता क्योंकि सम्भव है कि $\int \text{फ}(\text{यर})$ इसके तात्कालिक चलन में जो कि शून्य के तुल्य होगा किसी गुणक का अप-

वर्त्तन दे दिया गया हो अथवा कोई स्थिराङ्क का लोप हो गया हो मूल समीकरण के वश से। परन्तु जिस स्थान में इसका पूरा रूप हो अर्थात् गुणक का अपवर्त्तन न दिया गया हो वा स्थिराङ्क का लोप मूल समीकरण के वश से न किया गया हो तो चलनकलन की युक्ति से $\frac{ता^2 स}{ताय\, तार} = \frac{ता^2 स}{तार\, ताय}$ इस नियम से र का मान जान सकते हो क्योंकि यहाँ

मा $= \frac{ताम}{ताय}$ और ना $= \frac{ताम}{तार}$। यहाँ दोनों खण्ड तात्कालिक सम्बन्ध है अर्थात् पहले में र को दूसरे मे य को स्थिर मान कर सम्बन्ध निकाला गया है।

$$\text{इसलिये } स = \int मा\, ताय + फ_1(र)$$

र के वश से तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{तास}{तार} = \frac{ता \int माताय}{तार} + \frac{ताफ_1(र)}{तार}$$

$$\text{परन्तु } \frac{तास}{तार} = ना \quad \therefore \quad \frac{ताफ_1(र)}{तार} = ना - \frac{ता \int माताय}{तार}$$

$$\text{और} \quad फ_1(र) = \int \left(ना - \frac{ता \int माताय}{तार}\right) तार$$

$$\text{इसलिये } स = \int मा\, ताय + \int \left(ना - \frac{ता \int माताय}{तार}\right) तार + स्थि$$

(१) उदा० कल्पना करो कि $तास = \frac{२\, ताय}{\sqrt{(य^2 - र^2)}} - \frac{२\, य\, तार}{र\sqrt{(य^2 - र^2)}}$

$$\text{यहाँ} \quad मा = \frac{२}{\sqrt{(य^2 - र^2)}},\ ना = \frac{-२\, य}{र\sqrt{(य^2 - र^2)}}$$

$$\text{इस लिये } \frac{तामा}{तार} = \frac{२र}{(य^2 - र^2)^{\frac{3}{2}}} \quad । \quad \frac{ताना}{ताय} = \frac{-२}{र}\left(\frac{-र^2}{(य^2 - र^2)^{\frac{3}{2}}}\right) = \frac{२र}{(य^2 - र^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore स = \int मा\, ताय + फ_1(र) = २\, ला \{ य + \sqrt{(य^2 - र^2)} \} + फ_1(र)$$

$$\frac{तास}{तार} = \frac{-२र}{\{ य + \sqrt{(य^2 - र^2)} \} \sqrt{(य^2 - र^2)}} + \frac{ताफ_1(र)}{तार} = ना = \frac{-२\, य}{र\sqrt{(य^2 - र^2)}}$$

$$\frac{ताफ_1(र)}{तार} = \frac{२}{\sqrt{(य^2 - र^2)}} \left\{ \frac{र}{य + \sqrt{(य^2 - र^2)}} - \frac{य}{र} \right\}$$

$$= \frac{-२}{\sqrt{(य^2 - र^2)}} \left\{ \frac{य^2 - र^2 + य\sqrt{(य^2 - र^2)}}{रय + र\sqrt{(य^2 - र^2)}} \right\} = -\frac{२}{र}$$

$\therefore$ फ$_1$(र) = स्थि—२ ला र

इसलिये स = ला $\left\{ \frac{\text{य} + \sqrt{(\text{य}^2 - \text{र}^2)}}{\text{र}} \right\}^2$ + स्थि ।

जहाँ गुणक से अपवर्त्तन दे दिया गया हो वहाँ पर बड़ी कठिनता पड़ेगी और कोई विधि नहीं है जिससे गुणक का पता लगे, केवल अपने बुद्धि बल से गुणक का पता लगा कर गणित करना चाहिये ।

२६७। इस प्रक्रम में चलनसमीकरण सम्बन्धि कुछ उदाहरण दिखाते हैं।

(१) एक ऐसे वक्र का पता लगावो जो दिये हुए समीकरण सम्बन्धि वक्र-परम्परा को काटने से निर्दिष्टकोण तुल्य कोण बनावे ।

कल्पना करो कि दिये हुए वक्र का भुज = य और कोटि र और साध्य वक्र का भु = य$_1$ और कोटि र$_1$ है और निर्दिष्ट कोण की स्पर्शरेखा = म है

तो $\text{स्प}^{-1}\text{म} = \text{स्प}^{-1}\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \text{स्प}^{-1}\frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}$ । $\therefore$ $\text{म} = \dfrac{\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} - \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}}{1 + \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \frac{\text{तार}_1}{\text{ताय}_1}}$

सिद्धवक्र के समीकरण पर से $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ का मान य, र के फल रूप में अर्थात् फ (य,र) ऐसा सिद्ध हो जायगा और योग विन्दु पर दोनो वक्र के भुज कोटि एक ही होगे इसलिये य$_1$ के स्थान मे य और र$_1$ के स्थान मे र को रख सकते है इन पर से फिर साध्य वक्र का समीकरण भी व्यक्त हो जायगा । ऊपर के समीकरण को ।

$\text{म} \left\{ 1 + \text{फ} (\text{य},\text{र}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} \right\} = \text{फ} (\text{य},\text{र}) - \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$ ऐसे लिख सकते हैं जो कि एकघात प्रक्रम सम्बन्धि चलनसमीकरण के ऐसा होगा ।

यदि साध्य वक्र सिद्ध वक्रों को काट कर समकोण बनावे तो म = ∞

इसलिये $1 + \text{फ} (\text{य},\text{र}) \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = 0 \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = -\frac{1}{\text{फ}(\text{य},\text{र})}$

जैसे उस वक्र को बताओ जो उन परवलयो को काटने से समकोण बनावे जिनमें शिरःस्थान और य अक्ष एक ही है ।

कल्पना करो कि परवलय का र^2 = ४अय यह समीकरण है

$\therefore \text{फ} (\text{य},\text{र}) = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \frac{2\text{अ}}{\text{र}} = \frac{\text{र}}{2\text{य}}$

$$\therefore \frac{तार}{ताय} = -\frac{२य}{र} \text{ इसलिये } \frac{र^२}{२} = (ग^२ - य^२)$$

यह एक दीर्घवृत्त का समीकरण हुआ जिसका केन्द्र परवलय का शिर स्थान और बृहद्व्यास य अक्ष पर लम्ब होगा। यहाँ ग का मान अनिश्चित है इसलिये कोई दीर्घवृत्त जिनके व्यासों में $\sqrt{२}$: १ यह सम्बन्ध हो वे सब परवलयों को समकोण पर काटेंगे।

(२) $\left(\frac{तार}{ताय}\right)^न + प\left(\frac{तार}{ताय}\right)^न + बा\left(\frac{तार}{ताय}\right)^{न-२} + \cdots + था_न = ०$ जहाँ पा, बा, इत्यादि य, र के फल हैं इसमें र का मान क्या होगा।

इस न घात प्रथमसम्बन्ध चलनसमीकरण में साधारण बीजगणित से $\frac{तार}{ताय}$ का न विध मान आवेगा इसलिये न विध र का मान चलानयन से निकलेगा और इनका घातरूप एक और मान आवेगा।

जैसे यदि $\frac{तार^२}{ताय^२} = अ^२ \therefore \frac{तार}{ताय} = \pm अ$ इसलिये $र = ग \pm अय$ वा $र = ग - अय$ ये दोनो दिये समीकरण को ठीक रखेंगे और इनका घात $(र - ग - अय)(र - ग + अय) = ०$ यह भी समीकरण को ठीक रखेगा।

इस पर से यह एक उदाहरण बनता है कि उस वक्र को बताओ जिसमें $चा = अय + कर$ हो

$$\text{यहाँ } \frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{तार}{ताय}\right)^२\right\}} = अ + क\frac{तार}{ताय}$$

इससे सिद्ध है कि $\frac{तार}{ताय}$ का मान स्थिर होगा मानो कि $\frac{तार}{ताय} = म$

तो $र = मय + ग$ यह एक सरलरेखा का समीकरण है

$$\therefore \frac{र-ग}{य} = म = \frac{तार}{ताय} \text{ इसलिये } \sqrt{\left\{१ + \left(\frac{र-ग}{य}\right)^२\right\}} = अ + क\left(\frac{र-ग}{य}\right)$$

यह समीकरण हुआ।

(३) $\frac{ता^नर}{ताय^न} = या$ इसमें र का मान क्या होगा जहाँ या, य का कोई फल है।

पहले मानो कि $\frac{ता^२र}{ताय^२} = या \therefore \frac{ता}{ताय}\left(\frac{तार}{ताय}\right) = या \therefore \frac{तार}{ताय} = \int याताय$

और $र = \int \left\{\int याताय\right\} ताय$

फिर मान लो कि $\frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3} = \text{या}$, तो, $\frac{\text{ता}}{\text{ताय}}\left(\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}\right) = \text{या} \therefore \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \int \text{याताय}$

फिर ऊपर के ऐसा दो वार चलानयन करो। यहाँ स्थिराङ्क को छोड़ दिया है।

(४) $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \text{ग}$ यहाँ (ग, र कोई फल हैं) र का मान क्या होगा।

मान लो कि $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{प} \therefore \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताप}}{\text{तार}}\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{प}\,\frac{\text{ताप}}{\text{तार}}$

$= \text{ग} \therefore \frac{\text{प}^2}{\text{२}} = \text{स्थि} + \int \text{ग तार}$

(५) $\frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} + \text{पा}\,\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{वार} = 0$ इसमें र का मान क्या होगा।

यहाँ मान लो कि

$$\text{र} = \text{इ}^{\int \text{शताय}} \therefore \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{श}\,\text{इ}^{\int \text{शताय}},\ \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2} = \left(\frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} + \text{श}^2\right)\ \text{इ}^{\int \text{शताय}}$$

$$\text{इसलिये}\ \text{इ}^{\int \text{श ताय}} \left\{\text{श}^2 + \text{पाश} + \text{वा} + \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}}\right\} = 0$$

$\therefore \text{श}^2 + \text{पाश} + \text{वा} + \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} = 0$ इसलिये यदि पा और वा स्थिराङ्क हों तो सहज में श का और श पर से र का ज्ञान हो जायगा। क्योंकि यदि पा = आ और वा = का तो

$$\text{श}^2 + \text{आश} + \text{का} + \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ताश}}{\text{ताय}} + (\text{श} - \text{अ}_1)(\text{श} - \text{क}_1) = 0$$

जहाँ $\text{श}^2 + \text{आश} + \text{का} = 0$ इसमें श का, अ_1 और क_1 मान हैं।

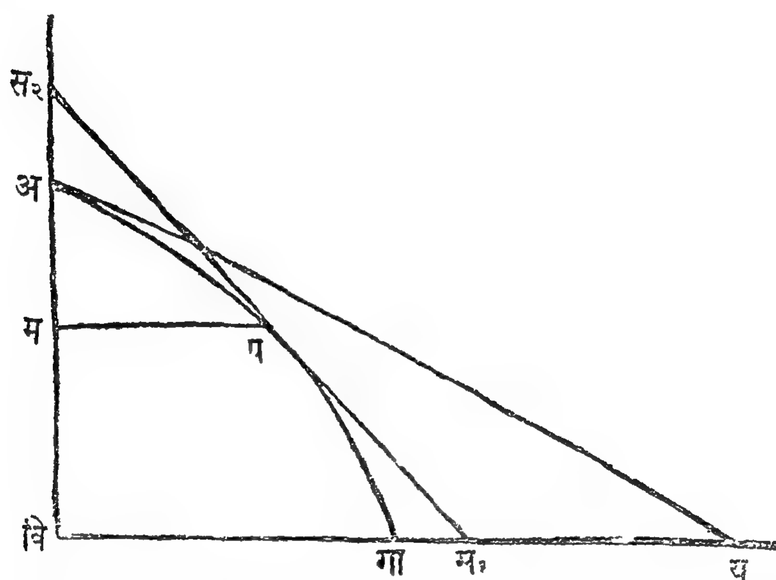
इसमें यदि $\text{श} = \text{अ}_1$ वा $\text{श} = \text{क}_1$ तो समीकरण ठीक होता है

इसलिये $\text{र} = \text{इ}^{\int \text{अ}_1 \text{ताय}} = \text{इ}^{\text{अ}_1\text{य} + \text{ग}} = \text{ग}_1\text{इ}^{\text{अ}_1\text{य}}$ वा $\text{र} = \text{ग}_2\text{इ}^{\text{क}_1\text{य}}$ दोनो के योग तुल्य र माने तो भी समीकरण ठीक होगा इसलिये

$$\text{र} = \text{ग}_1\text{इ}^{\text{अ}_1\text{य}} + \text{ग}_2\text{इ}^{\text{क}_1\text{य}}$$

अ^1 और क^1 के सम्भाव्य, असम्भाव्य, और तुल्य होने से इस में कई भेद उत्पन्न होते हैं।

(६) नव हाथ ऊँचे खंभे पर एक मोर बैठा था उसने खंभे की जड़ से २७ हाथ दूरी पर एक साँप को बिल की तरफ जो कि खंभे की जड़ में थी आते देख उसके ऊपर झपटा। बताओ खंभे की जड़ से कितनी दूरी पर मोर ने साँप को पकड़ा। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि प्रतिक्षण मे साँप की गति से दूनी मोर की गति थी।



कल्पना करो कि अबि = खंभा = ९ = अ, बिस = साँप बिल का अन्तर = २७ = क, सअ = ग, बि बिल, स, पहिले साँप का स्थान। अप गा, वह वक्र है जिस में मोर चला। इस का अय रेखा य अक्ष और अ मूल बिन्दु है। प्रतिक्षण में जब साँपही के सन्मुख मोर चलता है तब स्पष्ट है कि इष्ट स्थान मे जहाँ पर साँप होगा वहाँ से वक्र पर जो स्पर्शरेखा होगी उस के स्पर्शबिन्दु पर मोर होगा। मान लो कि इष्ट समय मे सर्प का स्थान $स_1$ और वहाँ से वक्र स्पर्शरेखा $स_1$ प। प, उस समय मे मोर का स्थान और उसका भुज = अम = य और कोटि = पम = र है। मोर गति और साँप गति का सम्बन्ध = $इ_1$ मान रखो तो चलनकलन से।

$$स्प\angle स_2 = \frac{तार}{ताय}, स_1म = \frac{र\ ताय}{तार}, स_1बि = अ - य + \frac{र\ ताय}{तार},$$

$$बिस_1 = \frac{तार}{ताय}(अ-य) + र। \text{ इस } सस_1 = क - र(-अ-य)\frac{तार}{ताय}$$

$$\text{इसलिये } अप\ चाप = च = इ \times सस_1 = इक - इ \left\{ र + (अ - य)\frac{तार}{ताय}\right.$$

इसका य के वश तात्कालिक सम्बन्ध निकालने से

$$\frac{ताचा}{ताय} = \sqrt{\left\{ १ + \left[\frac{तार}{ताय}\right]^2 \right\}} = -इ_1 (अ-य) \frac{ता^2र}{ताय^2} = इ_1(य-अ) \frac{ता}{ताय}\left[\frac{तार}{ताय}\right]$$

इसलिये

$$\frac{ताय}{य-अ} = \frac{ता\left(\frac{तार}{ताय}\right)}{\sqrt{\left\{१+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2\right\}}} = \frac{-ताय\ इ_2}{अ-य} \quad यदि\ \frac{१}{इ_1} = इ_2$$

चलानयन करने से

$$स्थि + ला\,(अ-य)^{इ_2} = ला\left[\frac{तार}{ताय} + \sqrt{\left\{१+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2\right\}}\right]$$ (८ वें प्रक्रम के (६) वें उदाहरण से)

इसमें यदि $य = 0$ तो

$$स्थि + ला(अ)^{इ_2} = ला[स्प < अ + \sqrt{\{१ + स्प^2 < अ\}}]$$

$$= ला\left(\frac{क}{अ} + \frac{ग}{अ}\right) = ला(क+ग) - ला\,(अ)$$

इसलिये $स्थि = ला\,(क+ग) - ला\,(अ)^{इ+१}$ इसका उत्थापन (१) मे देने से

$$ला\left\{\frac{(अ-य)^{इ_2}(क+ग)}{अ^{इ_2+१}}\right\} = ला\left[\frac{तार}{ताय} + \sqrt{\left\{१+\left[\frac{तार}{ताय}\right]^2\right\}}\right]$$

लघुरिक्थ को उड़ा देने से

$$\frac{(अ-य)^{इ_2}(क+ग)}{अ^{इ_2+१}} = \frac{तार}{ताय} + \sqrt{\left\{१+\left[\frac{तार}{ताय}\right]^2\right\}} \cdots\cdots (२)$$

$$\frac{अ^{इ_2+१}}{(अ-य)^{इ_2}(क+ग)} = \frac{१}{\frac{तार}{ताय} + \sqrt{\left\{१+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2\right\}}} = \sqrt{\left\{१+\left(\frac{तार}{ताय}\right)^2\right\}} - \frac{तार}{ताय} \cdots\cdots\cdots (३)$$

(२) और (३) के अन्तर से

$$\frac{२\ तार}{ताय} = \left[\frac{अ-य}{अ}\right]^{इ_2}\left[\frac{क+ग}{अ}\right] - \left[\frac{अ}{अ-य}\right]^{इ_2}\left[\frac{अ}{क+ग}\right]$$

इसलिये चलानयन से

$$२र + स्थि = -\frac{अ^{इ_2}}{१-इ_2}\left[\frac{अ}{क+ग}\right](अ-य)^{१-इ_2}$$

$$-\frac{१}{अ^{इ_१}(१+इ_२)}\left[\frac{क+ग}{अ}\right](अ-य)^{१+इ_२}$$

इसमे $य = 0$ तो

$$स्थि = \frac{अ}{१-इ_१}\,\frac{अ}{क+ग} - \frac{अ}{१+इ_२}\left(\frac{क+ग}{अ}\right) = \frac{-क+ग}{१-इ_१} - \frac{क+ग}{१+इ_१}$$

$$= \frac{-क-इ_१क+ग+गइ_२-क+इ_१क-ग+इ_१ग}{१-इ_२^२} = \frac{२इ_२ग-२क}{१-इ_१^२}$$

इसका उत्थापन देकर समशोधनादि से

$$र = \frac{अ^{इ_१}}{२(१-इ_२)}\left[\frac{अ}{क+ग}\right](अ-य)^{१-इ_१}$$

$$-\frac{अ^{-इ_१}}{२(१+इ_१)}\left[\frac{क+ग}{अ}\right](अ-य)^{+१इ_२} - \frac{-क+इ_१ग}{१-इ_१^२} \quad . \quad . \quad (४)$$

इसमे यदि $य = अ$ तो विल से सॉप और मोर का योग

$$= \frac{-क+इ_१ग}{१-इ_२^२} = -\frac{-क+\frac{ग}{इ_१}}{१-\frac{१}{इ_१^२}} = -\frac{-कइ_१^२+इ_१ग}{इ_१^२-१}$$

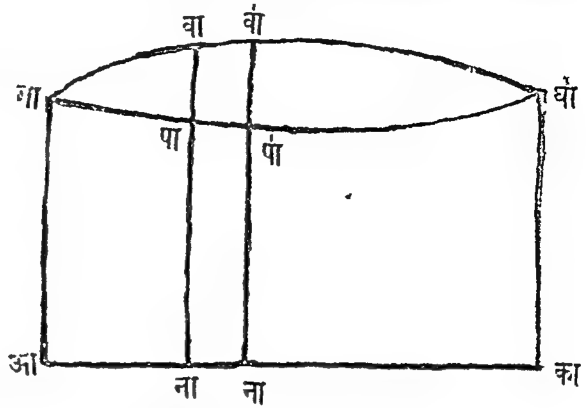
$$= \frac{इ_१^२क-इ_१क}{इ_१^२-१}$$ इतने अन्तर पर हुआ।

इस पर से यदि संख्यात्मक मान निकालो तो १७०३ इतना होगा। भास्कराचार्य ने जो अपनी लीलावती के क्षेत्र व्यवहार मे मोर और सॉप का प्रश्न लिखा है उसमे दोनो की गति तुल्य माना है इसलिये $इ_१ = १$ इस पर से ऊपर की क्रिया करो तो विल से अनन्त दूर पर भिन्न दिशा मे योग आता है इसलिये भास्कर का उदाहरण अशुद्ध है। भास्कराचार्य ने जो त्रिभुजगणित की युक्ति से अपने उदाहरण का उत्तर निकाला है वह ठीक नही क्योकि मयूर कोई देवता नही कि उसे पहले से मालूम हो जाय कि मै इस सरल मार्ग से चलकर जब तक पृथ्वी के जिस स्थान पर पहुँचूँगा तब तक सॉप भी चल कर उसी स्थान पर पहुँच जायगा।

वैशेषिक कलन।

२६८। यदि य का फल ज्ञात हो तो चलनकलन की युक्ति से उसके महत्तम और न्यूनतम मान का प्रमाण भी मालूम हो जाता है परन्तु बहुत से ऐसे प्रश्न हैं जिनमे य के फल ही का पता लगाना पड़ता है जिसमे महत्तम वा न्यूनतम का धर्म्म हो। जैसे दो दिये हुए विन्दुओ के बीच मे परमाल्प अन्तर जानना है तो

यहाँ न्यूनतम अन्तर जानने के लिये उस वक्र का पता लगाना पड़ेगा जिसका चाप दोनों विन्दुओं के अन्तर्गत परमाल्प हो। यदि गा घा दो निर्दिष्ट विन्दु हों तो यहाँ दोनों विन्दुओं पर गये गापाघा, गावाघा इत्यादि वक्रों में से एक ऐसे वक्र को चुनना चाहिये जिसका चाप औरों के चाप से छोटा हो। ऐसे



वक्र का क्या समीकरण होगा इसके लिये एक वक्र के पा विन्दु से दूसरे वक्र के वा विन्दु का पता लगाना पड़ेगा। इस पा और वा विन्दु का जो अन्तर है इसे पाना कोटि की वैशेषिक गति कहते हैं इसको "वै" से प्रकाश करेंगे। जैसा गापाघा वक्र के पा विन्दु का भुज = आना = य और कोटि = पाना = र मानो तो यदि पावा बहुत ही छोटा हो तो ता और वै मे इस प्रकार का भेद है अर्थात् र + तार इससे गापाघा वक्र में पा विन्दु के बहुत ही पास में जो पां विन्दु है उसकी कोटि पांनां समझी जाती है और र + वैर इससे दूसरा वक्र जो गावाघा है उसमे पा विन्दु के बहुत ही पास जो वा विन्दु है उसकी कोटि वाना समझी जाती है।

२६९। ऊपर के क्षेत्र मे नापा = र ∴ नांपां = र + तार और नावा = र + वैर इसलिये नांवां = नावा + ता (नावा) = र + वैर + ता (र + वैर)
और नांवां = नांपां + वै (नांपां) = र + तार + वै (र + तार) इसलिये

र + वैर + ता (र + वैर) = र + वैर + तार + तावैर

= र + तार + वै (र + तार) = र + तार + वैर + वैतार इसलिये

तावैर = वैतार

अर्थात् वैशेषिकगति की तात्कालिकी गति और तात्कालिकी गति की वैशेषिकगति दोनों परस्पर तुल्य हैं।

इसी प्रकार यदि तार को र मान लो तो

तावैतार = वै ता^{२}र, वा तावैतार = तातावैर = ता^{२}वैर

∴ ता^{२}वैर = वैता^{२}र और इसी तरह ता^{न}वैर = वैता^{न}र।

यदि र की तात्कालिकी गति = र$_{१}$—र यह हो और र की वैशेषिकगति बहुत ही अल्प हो तो ऊपर के सिद्धान्त से

वै तार = वै (र$_{१}$—र) = वैर$_{१}$-वैर = तावैर यह भी सिद्ध कर सकते हैं।

२७० । इसी तरह यदि $\int \text{स} = \text{स}_1$ तो $\text{स} = \text{तास}_1$

$\therefore$ $\text{वैस} = \text{वैतास}_1 = \text{तावैस}_1$ इसलिये $\int \text{वैस} = \int \text{वैतास}_1 = \int \text{तावैस}_1$

$= \text{वैस}_1 = \text{वै} \int \text{स}$ और $\int^2 \text{वैस} = \int \text{वै} \int \text{स} = \text{वै} \int\int \text{स} = \text{वै} \int^2 \text{स}$

इसी तरह $\int^{\text{न}} \text{वैस} = \text{वै} \int^{\text{न}} \text{स}$

$\int^{\text{न}}$ इस से समझो कि वार वार न वार चलानयन किया गया है ।

२७१। ऊपर के सिद्धान्तों के देखने से यह स्पष्ट होता है कि तात्कालिक और वैशेषिक के गणितो मे केवल ता और वै का भेद है अर्थात् ता के स्थान मे वै को रख देने से सब गणित तात्कालिकी गति के ऐसा हो जाता है । जैसे यदि $\text{स} = \text{र}^{\text{न}}$ तो चलनकलन से $\text{तास} = \text{नर}^{\text{न}-1}\text{तार}$

इस में ता के स्थान मे वै को रख देने से $\text{वैस} = \text{नर}^{\text{न}-1}\text{वैर}$

इसी तरह यदि स = फ(य,र,प,व, इ०) जहां प,व इ० $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}}, \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2}$ इ० हैं तो चलनकलन से

$$\text{तास} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}\text{ताय} + \frac{\text{तास}}{\text{तार}}\text{तार} + \frac{\text{तास}}{\text{ताप}}\text{ताप} + \frac{\text{तास}}{\text{ताव}}\text{ताव} + \text{इ०}$$

$$= \text{मा ताय} + \text{ना तार} + \text{पा ताप} + \text{वा ताव} + \text{इ०}$$

जहां $\text{मा} = \frac{\text{तास}}{\text{ताय}}, \text{ना} = \frac{\text{तास}}{\text{तार}}, \frac{\text{तास}}{\text{ताप}} = \text{पा}, \frac{\text{तास}}{\text{ताव}} = \text{वा}$, इ०

इस मे ता के स्थान मे वै को रख देने से

$$\text{वैस} = \text{मा वैय} + \text{ना वैर} + \text{पा वैप} + \text{व}\ \ \text{वैव} + \text{इ०}$$

२७२। $\text{वै} \int \text{स}$, वा $\int \text{वैस}$ इस का मान यदि जानना हो जहां स, य, र, और इनके तात्कालिकी गति का कोई फल हो और य, र, ट चलराशि का फल हो तो

$$\text{तास} = \text{मा ताय} + \text{ना ता}^2\text{य} + \text{पाता}^3\text{य} + \text{वा ता}^4\text{य} + \ldots$$
$$+ \text{मतार} + \text{न ता}^2\text{र} + \text{प ता}^3\text{र} + \text{व ता}^4\text{र} + \ldots$$

परन्तु $\text{ता}^2\text{य} = \text{ता ताय}, \text{ता}^3\text{य} = \text{ता ता}^2\text{य}$

इस लिये ता के स्थान मे वै को रख देने से

$$\text{वैस} = \text{मा वैय} + \text{ना वैताय} + \text{पा वैता}^2\text{य} + \text{वा वैता}^3\text{य} + \ldots$$
$$+ \text{म वैर} + \text{न वैतार} + \text{प वैता}^2\text{र} + \text{व वैता}^3\text{र} + \ldots$$

इस लिये ∫ वैस = ∫ (मावैय + नावैताय + पावैता^{2}य + वावैता^{3}य + ·   )

+ ∫ (म वैर + न वैतार + पवैता^{2}र + ववैता^{3}र +   ·)

परन्तु खण्डचलानयन से

∫ नावैताय = ∫ नातावैय = नावैय — ∫ तानावैय।

∫ पावैता^{2}य = ∫ पाता^{2}वैय = पातावैय — ∫ तापा तावैय

= पातावैय — तापावैय + ∫ ता^{2}पावैय।

∫ वावैता^{3}य = ∫ वाता^{3}वैय = वाता^{3}वैय — ∫ तावाता^{2}वैय

= वाता^{3}वैय — तावातावैय + ∫ ता^{2}वातावैय

= वाता^{3}वैय — तावातावैय + ता^{2}वावैय — ∫ ता^{3}वावैय

इ० इ० इ०

इसी तरह

∫ नवैतार = ∫ नतावैर = नवैर — ∫ तानवैर।

∫ पवैता^{2}र = ∫ पता^{2}वैर = पतावैर — तापवैर + ∫ ता^{2}पवैर।

∫ ववैता^{3}र = बता^{3}वैर — तावतावैर + ता^{2}ववैर — ∫ ता^{3}ववैर।

इन सबका उत्थापन ∫ वैस मे देने से

∫ वैस = (ना — तापा + ता^{2}वा — इ०) वैय + (न — ताप + ता^{2}व — इ०) वैर

+ (पा — तावा + इ०) तावैय + (प — ताव + इ) तावैर

+ (वा — ताभा + इ०) ता^{2}वैय + (व — ताम + इ०) ता^{2}वैर

+ ∫ (मा — ताना + ता^{2}पा — ता^{3}वा + इ०) वैय

+ ∫ (म — तान + ता^{2}प — ता^{3}व + इ०) वैर

इसके देखने से स्पष्ट होता है कि वैय, तावैय, इत्यादि के और वैर, तावैर इत्यादि के गुणकों मे साजात्य धर्म है। इस लिये एक चल स के मान मे ल को और माने तो इसके वश से $\int$ वैस मे उसी चाल के और खण्ड होंगे जैसा कि वैय और वैर के वश से उत्पन्न हुए हैं।

२७३। यदि स = शाताय जहां $\int$ शाताय इस के वैशेषिक का ज्ञान करना हो तो कल्पना करो कि

$$\text{ताशा} = \text{माताय} + \text{नातार} + \text{पाताप} + \text{वाताव} + \text{भाताभ} + \text{इ०}$$

$$\text{जहाँ}\quad \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},\ \text{व} = \frac{\text{ता}^2\text{र}}{\text{ताय}^2},\ \text{भ} = \frac{\text{ता}^3\text{र}}{\text{ताय}^3}\ ।\ \text{इ०}$$

$$\text{और}\quad \text{मा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}},\ \text{ना} = \frac{\text{ताशा}}{\text{तार}},\ \text{पा} = \frac{\text{ताशा}}{\text{ताय}},\ \text{इ०}$$

इसलिये

$$\text{वैशा} = \text{मावैय} + \text{नावैर} + \text{पावैप} + \text{वा वैव} + \text{भा वैभ} + \text{इ०}$$

$$\text{अब}\quad \text{वै}\int\text{शाताय} = \int\text{वै (शाताय)} = \int(\text{शा वैताय} + \text{ताय वैशा})$$

$$= \int(\text{शा तावैय} + \text{तायवैशा}) = \int\text{शा तावैय} + \int\text{तायवैशा}$$

$$= \text{शावैय} + \int(\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा})$$

$$\text{परन्तु}\quad \int(\text{तायवैशा} - \text{वैयताशा}) = \int\text{ताय}\ (\text{मावैय} + \text{नावैर} + \text{पावैप} + \cdot)$$

$$- \int\text{वैय}\ (\text{माताय} + \text{नातार} + \text{पाताप} + \cdot)$$

$$= \int\text{ना(वैर}-\text{पवैय)ताय} + \int\text{पा(वैप}-\text{ववैय)ताय} + \int\text{वा(वैव}-\text{भवैय)ताय} + \cdot\cdot$$

$$\text{अब यहां}\quad \text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}},\ \text{व} = \frac{\text{ताप}}{\text{ताय}},\ \text{भ} = \frac{\text{ताव}}{\text{ताय}}$$

इस लिये

$$\text{वैप} = \frac{\text{तायवैतार} - \text{तारवैताय}}{\text{ताय}^2} = \frac{\text{वैतार} - \text{पवैताय}}{\text{ताय}}$$

$$\because\ \text{वैप} - \text{ववैय} = \frac{\text{वैतार} - \text{पतावैय} - \text{तापवैय}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}}{\text{ताय}}(\text{वैर} - \text{पवैय})$$

और $\text{वैव} = \dfrac{\text{ताय वैताप} — \text{ताप वैताय}}{\text{ताय}^2} = \dfrac{\text{तावैप} — \text{वतावैय}}{\text{ताय}}$

$$\text{वैव} — \text{भवैय}\ \dfrac{\text{तावैप} — \text{वतावैय} — \text{ताववैय}}{\text{ताय}} = \dfrac{\text{ता}}{\text{ताय}}(\text{वैप} — \text{ववैय})$$

और कल्पना करो कि

$\text{वैर} — \text{पवैय} = \text{ह}$ $\quad \text{वैप} — \text{ववैय} = \dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$ । $\text{वैव} — \text{भ वैय} = \dfrac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2} \text{—इ०}$

इस लिये

$$\text{वै}\int \text{शाताय} = \text{शावैय} + \int \text{नाहताय} + \int \text{पा}\,\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}}\text{ताय} + \int \text{वा}\,\dfrac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2}\text{ताय} + \cdot$$

$$\text{परन्तु} \int \text{पा}\,\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}}\text{ताय} = \text{पाह} — \int \text{ह}\,\dfrac{\text{तापा}}{\text{ताय}}\text{ताय}$$

$$\int \text{वा}\,\dfrac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2}\text{ताय} = \text{वा}\,\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}} — \int \dfrac{\text{तावा}}{\text{ताय}}\,\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}}\text{ताय}$$

$$= \text{वा}\,\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}} — \text{ह}\,\dfrac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \int \text{ह}\,\dfrac{\text{ता}^2\text{वा}}{\text{ताय}^2}\text{ताय}$$

$$\text{और} \int \text{भा}\,\dfrac{\text{ता}^3\text{ह}}{\text{ताय}^3}\text{ताय} = \text{भा}\,\dfrac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2} — \dfrac{\text{ताभा}}{\text{ताय}}\,\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}} + \text{ह}\,\dfrac{\text{ता}^2\text{भा}}{\text{ताय}^2}$$

$$— \int \text{ह}\,\dfrac{\text{ता}^3\text{भा}}{\text{ताय}^3}\text{ताय}$$

$$\text{इस लिये वै} \int \text{शाताय} = \text{शावैय} + \left(\text{पा} — \dfrac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \dfrac{\text{ता}^2\text{भा}}{\text{ताय}^2} \text{—इ०}\right)\text{ह}$$

$$+ \left(\text{वा} — \dfrac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + \dfrac{\text{ता}^2\text{भा}_1}{\text{ताय}^2} \text{—इ०}\right)\dfrac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$+ \left(\text{भा} — \dfrac{\text{ताभा}_1}{\text{ताय}} + \text{इ०}\right)\dfrac{\text{ता}^2\text{ह}}{\text{ताय}^2} + \text{इ०}$$

$$+ \int \left(\text{ना} — \dfrac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \dfrac{\text{ता}^2\text{वा}}{\text{ताय}^2} — \dfrac{\text{ता}^3\text{भा}}{\text{ताय}^3} + \text{इ०}\right)\text{ह ताय}$$

इस तरह से स्पष्ट देख पड़ता है कि $\int$ शाताय इसके वैशेषिक गति में दो भाग हैं एक चल चिह्न के अन्तर्गत और दूसरा चल चिह्न रहित इसमें जब य_1 और र_1 तब शा, पा आदि का मान शा_1, पा_1 इत्यादि और जब य_2 और र_2 तब शा, पा आदि का मान शा_2, पा_2 इत्यादि मानो तो य_2, और य_1 सीमा के भीतर,

वै $\int$ शाताय, इसका मान

$$\text{शा}_2\text{वैय}_2 - \text{शा}_1\,\text{वैय}_1 + \left(\text{पा}_2 - \frac{\text{तावा}_2}{\text{ताय}_2} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}_2}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}_2$$

$$-\left(\text{पा}_1 - \frac{\text{तावा}_1}{\text{ताय}_1} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}_1}{\text{ताय}_1^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}_1 + \text{इ०}$$

$$+\int_{\text{य}_1}^{\text{य}_2}\left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{वा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह ताय}।$$

२७४। यदि स = फ (य, र, ल) जहां य का र और ल फल है तो यहां भी ऊपर के प्रक्रम की युक्ति से कल्पना कर सकते हो कि

$$\text{ताशा} = \text{भा ताय} + \text{ना तार} + \text{पा ता प} + \text{वा ता व} + \text{इ०}$$
$$+ \text{वा}'\,\text{ताल} + \text{पा}'\,\text{ताप}' + \text{न}\,\text{वा}'\,\text{ताव}' + \text{इ०}$$

इस लिये

$$\text{वैशा} = \text{भा वैय} + \text{ना वैर} + \text{पावैप} + \text{पावैव} + \text{इ०}$$
$$+ \text{ना}'\,\text{वैल} + \text{पा}'\,\text{वै}\,\text{प}' + \text{वा}'\,\text{वैव}' + \text{इ०}$$

यहां ना', पा' इत्यादि उसी चाल के हैं जैसे कि ना, पा इ० हैं अर्थात् र के स्थान मे ल को रख देने से ना' पा' इ० हो जांयगे।

यहां भी यदि वैल — प' वैय = ह' तो ऊपर ही की युक्ति से

$$\text{वै}\int\text{शाताय} = \text{शावैय} + \left(\text{पा} - \frac{\text{तावा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}$$

$$+\left(\text{पा}' - \frac{\text{तावा}'}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{भा}'}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}'$$

$$+\left(\text{वा} - \frac{\text{ताभा}}{\text{ताय}} + \text{इ०}\right)\frac{\text{ताह}}{\text{ताय}}$$

$$+\left(\text{वा}' - \frac{\text{ताभा}'}{\text{ताय}} + \text{इ०}\right)\frac{\text{ताह}'}{\text{ताय}} + \text{इ०}$$

$$+\int\left(\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{वा}}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह ताय}$$

$$+\int\left(\text{ना}' - \frac{\text{तापा}'}{\text{ताय}} + \frac{\text{ता}^2\text{वा}'}{\text{ताय}^2} - \text{इ०}\right)\text{ह}'\,\text{ताय}$$

२७५। जिस युक्ति से चलनकलन में सिद्ध है कि यदि र = फ (य) और र का महत्तम वा न्यूनतम मान हो तो तार = ० उसी युक्ति से जिस समय

$\int_{य_1}^{य_2}$ शाताय इसका मान महत्तम वा न्यूनतम होगा उस समय वै $\int_{य_1}^{य_2}$ शा ताय $=0$ ऐसा होगा। परन्तु जब वै इसका मान ऐसे समय मे सर्वदा शून्य होगा तब कह सकते हैं कि २७३ वे प्रक्रम में वैशेपिक का मान जो दो खण्ड में एक चलचिह्नान्तर्गत और दूसरा चलचिह्न रहित मे सिद्ध हुआ है वे दोनों पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे जैसे।

(१) उदाहरण, दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर जानना है यहां

$$\int शाताय = \int \sqrt{\left(१ + \frac{तार^२}{ताय^२}\right)} ताय = \int \sqrt{(१ + प^२)} ताय$$

$$इसलिये \quad गा = \sqrt{(१+प^२)} \quad \therefore \quad ताशा = \frac{प}{\sqrt{(१+प^२)}} ताप$$

यहां स्पष्ट देख पड़ता है कि यदि इसे २७३ वें प्रक्रम में ताशा का जो रूप है उसके साथ तुलना करो तो

$$मा = ०, \quad ना = ० \quad पा = \frac{प}{\sqrt{(१+प^२)}}, \quad वा = ०,$$

और चल चिह्नान्तर्गत मान को शून्य के तुल्य करने से

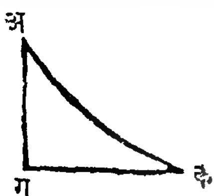
$$ना - \frac{तापा}{ताय} = ० \quad \therefore \quad \frac{तापा}{ताय} = ० \quad \therefore \quad पा = स्थिराङ्क = ग = \frac{प}{\sqrt{(१+प^२)}}$$

$$तब\ ग^२ = \frac{प^२}{१+प^२} \quad \therefore \quad १ - ग^२ = \frac{१}{१+प^२} \quad और\ प = \frac{ग}{\sqrt{(१-ग^२)}} = अ$$

इस लिये

$\frac{तार}{ताय} = अ$ तब र = अय + क अर्थात् दोनो विन्दुओं मे परमाल्प अन्तर उस वक्र का चाप होगा जिसका समीकरण अय + क = र यह अर्थात् सरलरेखा-रूप होगा।

(२) दो विन्दुओ के वीच में एक ऐसा वक्र वनावो जिसमें ऊपर के विन्दु से कोई पिण्ड पृथ्वी के आकर्षण से उसके चाप मे चल कर परमाल्प काल में नीचे की विन्दु पर पहुँचे। यहां चाप का प्रमाण चा।



अग = र, कग = य, ∠अगक = समकोण, पृथ्वी के आकर्षण का वल = वे मानो तो गतिविद्या से अ से क तक चाप की राह से पिण्ड के आने मे काल

$$\text{सेकण्ड मे} = \int \frac{\frac{\text{तांचा}}{\text{ताय}}}{\sqrt{\text{२वेर}}} \text{ताय} = \frac{१}{\sqrt{\text{२वे}}} \int \frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{\sqrt{\text{र}}} \text{ताय} = \frac{१}{\sqrt{\text{२वे}}} \int \text{शा ताय}$$

$$\therefore \text{शा} = \frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{\sqrt{\text{र}}} \text{ और ताशा} = -\frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{२\text{र}^{\frac{३}{२}}} \text{तार} + \frac{\text{प}}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}} \text{ताप}$$

इस लिये

$$\text{मा} = ०,\ \text{ना} = -\frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{२\text{र}^{\frac{३}{२}}},\ \text{पा} = \frac{\text{प}}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}},\ \text{वा} = ०$$

और $\text{ना} - \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}} = ०$ ∴ $\text{ना} = \frac{\text{तापा}}{\text{ताय}}$ इसलिये इसका उत्थापन ताशा मे देने से

$$\text{ताशा} = \text{तापा}\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} + \text{पा ताप} = \text{तापाप} + \text{पा ताप} = \text{ता}\ (\text{प} \times \text{पा})$$

इसलिये $\text{शा} = \text{पा} \times \text{प} + \text{ग}$ जहाँ ग कोई स्थिराङ्क है।

$$\text{अब}\quad \text{शा} = \text{पाप} + \text{ग} = \frac{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}{\sqrt{\text{र}}} = \frac{\text{प}^२}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}} + \text{ग}$$

$$\therefore \frac{१}{\sqrt{\text{र}}\sqrt{(१+\text{प}^२)}} = \text{ग} = \frac{१}{\sqrt{\text{२अ}}} \quad \therefore \sqrt{(१+\text{प}^२)} = \sqrt{\frac{\text{२अ}}{\text{र}}} \text{ और}$$

$\text{प} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \sqrt{\frac{\text{२अ}-\text{र}}{\text{र}}}$ यह एक चक्राभ का समीकरण है (चलनकलन देखो)

(३) उदाहरण। दो वक्रों के बीच मे परमाल्प अन्तर निकालो अर्थात् दोनो वक्रों में एक एक ऐसी विन्दु ठहरावो जिनमे परमाल्प अन्तर हो।

यहाँ (१) उदाहरण से दो विन्दुओं मे परमाल्प अन्तर का समीकरण $\text{र} = \text{अय} + \text{क}$ और $\text{शा} = \sqrt{(१+\text{प}^२)}$ जहाँ प = कोई स्थिराङ्क।

मान लो कि दोनो दिये हुए वक्रों मे $\frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{म},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताय}} = \text{न}$ और जिन विन्दुओं को परमाल्प अन्तररूप सरलरेखा दोनो वक्रों को काटती है उन विन्दुओं के क्रम से भुज कोटि $\text{र}_१, \text{य}_१$ और $\text{र}_२, \text{य}_२$ हैं तो

$$\frac{\text{वैर}_१}{\text{वैय}_१} = \frac{\text{तार}_१}{\text{ताय}_१} = \text{म और } \frac{\text{वैर}_२}{\text{वैय}_२} = \frac{\text{तार}_२}{\text{ताय}_२} = \text{न}$$

परन्तु २७३ प्रक्रम मे महत्तम और न्यूनतम मान मे

$$\text{शा}_२\ \text{वैय}_२ - \text{शा}_१\ \text{वैय}_१ + \text{पा}_२\ \text{ह}_२ - \text{पा}_१\ \text{ह}_१ = ०$$

परन्तु अन्तिम विन्दुओं का वैशेषिक गमन भी शून्य होगा।

इसलिये $शा_1 वैय_1 + पा_1 ह_1 = ०$, $शा_2 वैय_2 + पा_2 ह_2 = ०$

$ह_1$ और $ह_2$ का मान २७३ वें प्रक्रम में जो है उसका उत्थापन

देने से $शा_1 वैय_1 + पा_1 (वैर_1 — प_1 वैय_1) = ०$ .. .. (१)

$शा_2 वैय_2 + पा_2 (वैर_2 — प_2 वैय_2) = ०$ . .. (२)

(१) से $शा_1 + पा_1 म — पा_1 प_1 = ० \therefore म = प_1 — \frac{शा_1}{पा_1} = — \frac{१}{प_1} = — \frac{१}{ग}$

(२) से $शा_2 + पा_2 न — पा_2 प_2 = ० \therefore न = प_2 — \frac{शा_2}{पा_2} = — \frac{१}{प_2} = — \frac{१}{ग}$

$\therefore १ + ग म = ०$ और $१ + ग न = ०$।

यह दोनों समीकरण दिखलाते हैं कि सरलरेखा दोनों वक्रों को काटने से समकोण बनाती है। और दोनो बिन्दुओं पर गई हुई सरलरेखा का समीकरण $र—र_1 = \frac{र_2 — र_1}{य_2 — य_1} (य—य_1) \therefore ग = \frac{र_2 — र_1}{य_2 — य_1}$ इसका उत्थापन $१ + गम$ और $१ + गन$ में देने से दो समीकरण होंगे और वक्रों के समीकरण पर से $य_2$ और $य_1$ के फल के वश से $र_2$, $र_1$ के जानने के लिये दो समीकरण और होंगे इस तरह से चारो समीकरणों पर से $य_2$, $य_1$, $र_2$, $र_1$ चारो के मान व्यक्त हो जायँगे।

(४) ऐसा वक्र बताओ जिसके चाप, अवलूत के चाप, और वक्र जातीय व्यासार्द्ध से उत्पन्न क्षेत्रफल न्यूनतम हो। यहाँ १३१ वें प्रक्रम से यदि फल का मान आ मानो तो

$$\frac{ताआ}{ताय} = \frac{वि}{२} \frac{ताचा}{ताय} = \frac{(१ + प^2)^{\frac{3}{2}}}{—२व} \sqrt{(१ + प^2)} = \frac{(१ + प^2)^2}{—२ व} \text{(चलनकलन से)}$$

इसलिये $शा = \frac{(१ + प^2)^2}{व}$ यहाँ शा के मान में केवल प और व हैं

इसलिये २७२ वे प्रक्रम से ताशा = पाताप + वाताव

$$\text{और } \frac{ता^2 वा}{ताय^2} — \frac{तापा}{ताय} = ० \therefore पा = \frac{तावा}{ताय} — गा_1$$

$$\text{इसलिये } ताशा = \frac{ता वा ता प}{ताय} + ताप गा_1 + वाताव$$

$$= तावाव + वाताव + तापगा_1$$

$$\text{इसलिये } शा = वा व + प गा_1 + गा_2 = \frac{(१ + प^2)^2}{व} \quad \text{. . . (१)}$$

जहाँ $गा_1$ और $गा_2$ कोई स्थिराङ्क हैं।

परन्तु $शा = \frac{(१+प^2)^2}{व}$ ∴ $ता\, शा = \frac{४ प (१+प^2)\, ताप}{व} - \frac{(१+प^2)^2}{व^2}\, ताव$

इसलिये २७२ वें प्रक्रम से $वा = -\frac{(१+प^2)^2}{व^2}$ इसका उत्थापन (१) में देने

से $\frac{(१+प^2)^2}{व} = -\frac{(१+प^2)^2}{व^2}\, व + प\, गा_1 + गा_2$

इसलिये $\frac{व(गा_1 प + गा_2)}{(१+प^2)^2} = २$

चलनयन से

$$गा_2\, स्प^{-1} प + \frac{गा_2 प - गा_1}{(१+प^2)} = ४ य + गा_3 \qquad \ldots\ldots (२)$$

और $\frac{व(गा_1 प^2 + गा_2 प)}{(१+प^2)^2} = २ प$

चलनयन से

$$गा_1\, स्प^{-1} प - \frac{प \times गा_1 + गा_2}{१+प^2} = ४ र + स्थिराङ्क$$

इसमें $गा_2$ जोड़ देने से

$$गा_1 स्प^{-1} प + \frac{प(गा_2 प - गा_1)}{१+प^2} = ४ र + गा_4 \qquad \ldots\ldots (३)$$

(२) और (३) से $स्प^{-1} प$ को लोप कर देने से

$$\frac{(गा_2 प - गा_1)^2}{(१+प^2)} = ४ गा_2 र - ४ गा_1 य + गा_2 गा_4 - गा_1 गा_3$$

इस लिये $\sqrt{(१+प^2)} = \frac{गा_2 प - गा_1}{२\sqrt{(गा_2 र - गा_1 य + का)}}$

जहां $४ का = गा_2 गा_4 - गा_1 गा_3$

कल्पना करो कि एक स्थिर विन्दु से गणना करने से वक्र के चाप का प्रमाण चा है तो चलनयन से $चा \div गा = \sqrt{(गा_2 र - गा_1 य + का)}$ .. (४)

मूल विन्दु और अक्षों के परिवर्त्तन से (४) का रूप

$चा = \sqrt{८ अय} + स्थिराङ्क$ ऐसा हो सकता है जो कि ७१ वें प्रक्रम से चक्राभ का समीकरण है।

(२) आकाश में दो विन्दुओं का परमाल्प अन्तर क्या होगा।

दोनों विन्दुओं का अन्तर चा मानो तो

$\text{ताचा} = \sqrt{\{\text{ताय}^2 + \text{तार}^2 + \text{ताल}^2\}} = \text{स}$

इस लिये २७२ वें प्रक्रम से खण्ड तात्कालिकी गति पर से

$\frac{\text{तास}}{\text{ताय}} = \frac{\text{ता}^2\text{य ताय}}{\text{स}} = \frac{\text{ताय}}{\text{स}}\text{ ता ताय},\ \frac{\text{तास}}{\text{तार}} = \frac{\text{तार}}{\text{स}}\text{ ता तार और } \frac{\text{तास}}{\text{ताल}} = \frac{\text{ताल}}{\text{स}}\text{ ता ताल}$

$\text{इस लिये वै} \int \text{स} = \int \text{वैस} = \int \text{वैताचा} = \int \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\text{ वैताय} + \int \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}}\text{ वैतार} + \int \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\text{ वै ताल}$

$= \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\text{ वैय} + \frac{\text{र}}{\text{ताचा}}\text{ वैर} + \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\text{ वैल} - \int \left\{ \text{ता}\left(\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}}\right)\text{ वैय} - \text{ता}\left(\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}}\right)\text{ वैर} + \text{ता}\left(\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right)\text{ वैल} \right.$

इस लिये $\text{मा} = 0,\ \text{म} = 0\ \text{मा}' = 0$, (क्योंकि न्यूनतम मान में सब पृथक् पृथक् शून्य के तुल्य होंगे)

$\text{ना} = \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}},\ \text{न} = \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}},\ \text{ना}' = \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}},\ \text{ताना} = 0 = \text{तान} = \text{ताना}'$

$\therefore \frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} = \text{अ},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} = \text{क},\ \frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}} = \text{ग},$

$\text{और } \frac{\text{ताय}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{तार}^2}{\text{ताचा}^2} + \frac{\text{ताल}^2}{\text{ताचा}^2} = 1 = \text{अ}^2 + \text{क}^2 + \text{ग}^2$

$\text{और } \frac{\text{ताय}}{\text{ताल}} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}},\ \frac{\text{तार}}{\text{ताल}} = \frac{\text{क}}{\text{ग}}\ \cdot\ \text{य} = \frac{\text{अ}}{\text{ग}}\text{ल} + \text{ग}',\ \text{र} = \frac{\text{क}}{\text{ग}}\text{ल} + \text{ग}''$

यह इष्ट धरातल में एक सरल रेखा को पतित करने से जो सरलरेखा होती है उसका समीकरण है ।

(६) जिस घनक्षेत्र के पृष्ठ का समीकरण दिया है उसके पृष्ठ पर दिये हुए दो विन्दुओं के वीच में परमाल्प रेखा का प्रमाण क्या होगा ।

कल्पना करो कि दिये हुए पृष्ठ के समीकरण पर से

$\text{ताल} = \text{प ताय} + \text{वा तार}$ ऐसा समीकरण वनता है जहां प, और व, य, र के फल है । तो $\text{वैल} = \text{प वै य} + \text{व वैर}$ ऐसा होगा इसका उत्थापन (५) वे उदाहरण में देने से

$\text{वै} \int \text{ताचा} = \left[\frac{\text{ताय}}{\text{ताचा}} + \text{प}\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right]\text{वैय} + \left[\frac{\text{तार}}{\text{ताचा}} + \text{व}\frac{\text{ताल}}{\text{ताचा}}\right]\text{ वैर}$

$$- \int \left\{ \left[ता \frac{ताय}{ताचा} + प\, ता \frac{ताल}{ताचा} \right] वैय + \left[ता \frac{तार}{ताचा} + व\, ता \frac{ताल}{ताचा} \right] वैर \right\}$$

इसलिये परमाल्प अन्तर में

$$ता \left[\frac{ताय}{ताचा} \right] + प\, ता \left[\frac{ताल}{ताचा} \right] = ०, \text{ और } ता \frac{तार}{ताचा} + व\, ता \left[\frac{ताल}{ताचा} \right] = ० \quad (१)$$

पृष्ठ के समीकरण पर से प और व का मान निकाल फिर जो रेखा परमाल्प अन्तर रूप होगी उसका समीकरण (१) के बल से निकाल सकते हो। जैसे

यदि पृष्ठ का समीकरण $ल = फ\,(य^२ + र^२)$ ऐसा हो तो

यहाँ $प = २\,य\, फ'\,(य^२ + र^२)$, $व = २र\, फ'(य^२ + र^२)$ और मान लो कि चा स्वतन्त्र राशि है तो (१) से

$$\frac{ता^२य}{ताचा^२} + प \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = \frac{ता^२य}{ताचा^२} + २\, यफ'(य^२ + र^२) \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = ०, \cdot \quad (२)$$

$$\frac{ता^२र}{ताचा^२} + व \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = \frac{ता^२य}{ताचा^२} + २र\, फ'(य^२ + र^२) \frac{ता^२ल}{ताचा^२} = ०, \cdots\cdots (३)$$

(२) को र से और (३) को य से गुण कर अन्तर करने से

$$र \frac{ता^२य}{ताचा^२} = य \frac{ता^२र}{ताचा^२}$$ यहाँ यदि $श्रु^२ = य^२ + र^२$ और $ष = कोज्या^{-१} \frac{य}{श्रु}$

तो $र\, ता^२य - य\, ता^२र = ता(श्रु^२\, ताष) = ०$

$$\cdot\; श्रु^२ \frac{ताष}{ताचा} = स्थिराङ्क = ग \text{ और } श्रु \frac{ताष}{ताचा} = \frac{ग}{श्रु}$$

परन्तु $श्रु \frac{ताष}{ताचा}$ यह उस कोण की ज्या है जो कि परमाल्प रेखा उस वक्र को काटकर उत्पन्न करती है जो वक्र कि स्वयं घूम कर घन का पृष्ठ बनाया है। इसलिये इस कोण को यदि भ कहो तो

$$ज्याभ = \frac{ग}{श्रु} = \frac{ग}{\sqrt{(य^२ + र^२)}} ।$$

अथवा जब $श्रु^२ \frac{ताप}{ताचा} = ग$ इसलिये

$$श्रु^४ \frac{ताष^२}{ताश्रु^२} = ग^२ \frac{ताचा^२}{ताश्रु^२} = ग^२ \left(१ + श्रु^२ \frac{ताष^२}{ताश्रु^२} + \frac{ताल^२}{ताश्रु^२}\right)$$

(७५ वाँ और ९८ वाँ प्रक्रम देखो)

$$\text{समशोधन से } श्रु^२ (श्रु^२ - ग^२) \frac{ताप^२}{ताश्रु^२} = ग^२ [\, १ + फ' \{\, र^२ \,\}$$

इसलिये $\frac{ताय}{ताश्रु} = \frac{ग}{श्रु} \sqrt{\left\{\frac{१+फ(र')}{श्रु - ग}\right\}}$ . . (४)

कल्पना करो कि घनक्षेत्र गोल है और यह याम्योत्तर वृत्त के घूमने से बना है प्राक् कपाल में क्षितिज के ऊपर कहीं रविकेन्द्र और चन्द्रकेन्द्र दो दत्त बिन्दु हैं इन दोनों के भीतर गोलपृष्ठ पर परमाल्प रेखा खींचना है। कल्पना करो कि परमाल्प रेखा याम्योत्तर वृत्त के साथ भ कोण बनाती है।

ल अक्ष गोल में जहाँ लगा है वहाँ से परमाल्प रेखा और याम्योत्तर वृत्त के सम्पात तक एक महद्वृत्त अ अंश, और गोल का व्यासार्द्ध त्रि तो यहाँ यदि त्रिकोणमिति से १ व्यासार्द्ध में जैसा कि सर्वत्र इस ग्रन्थ भर में है ज्यासाधन करो तो श्रु = त्रिज्याअ.

और ऊपर की युक्ति से ज्याभ = $\frac{ग}{श्रु} = \frac{ग}{त्रिज्याअ}$ · ज्याभ × ज्याअ = $\frac{ग}{त्रि}$

अर्थात् दोनों जीवाओं का घात सर्वदा स्थिर है जो कि महद्वृत्त से धर्म पाया जाता है इसलिये दोनों बिन्दुओं में होकर जो महद्वृत्त जायगा उसमें दोनों बिन्दुओं के भीतर जो चाप होगा वही परमाल्प अन्तर होगा।

२७४। बहुत से प्रश्न ऐसे हैं जिन्हे कि साम्बन्धिक महत्तम और न्यूनतम कहते हैं। समझो कि दो सीमाओं के भीतर किसी फल का चलनयन करने से ऐसा मान $\int$स जानना है जो महत्तम वा न्यूनतम हो इस नियम से कि उन्हीं चलराशिओं के दूसरे फल का उन्हीं सीमाओं के भीतर चलमान $\int$स₁ एक दिये हुए स्थिर संख्या के तुल्य हो। जैसे वक्र के परिधि का मान स्थिर ग के तुल्य हो और फल महत्तम हो इस नियम से पता लगावो कि कौन सा वक्र है।

ऐसे प्रश्नों के उत्तर करने में $\int$स₁ को एक स्थिर संख्या अ से गुण कर $\int$ स में जोड़ देते हैं फिर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करते हैं क्योंकि महत्तम वा न्यूनतम मान में

$$वै\left(\int स + अ\int स_१\right) ताय = वै\int सताय + अ\, वै\int स_१\, ताय = ० + ०$$

क्योंकि प्रश्न के अनुसार $\int$ सताय यह महत्तम वा न्यूनतम है इसलिये

वै $\int$ सताय = ० और $\int$ स₁ ताय = ग = स्थिराङ्क इसलिये वै $\int$ स₁ ताय = ० । इसी तरह प्रश्न मे यदि यह नियम हो कि $\int$ सताय महत्तम वा न्यूनतम और $\int$ स₁ताय और $\int$ स₂ताय स्थिराङ्क तो $\int$ स₂ताय को दूसरे स्थिराङ्क क से गुण कर ऊपर के योग में जोड़ कर इसके वैशेषिक को शून्य के समान करो अर्थात् वै $\{ \int$ सताय + अ $\int$ स₁ताय + क $\int$ स₂ताय $\}$ = ० फिर प्रश्न के वश से अ, क स्थिराङ्क का ज्ञान भी हो जायगा ।

(१) उदाहरण । बहुत से वक्र है जिन सभों का परिधि मान स्थिर ग के तुल्य है तो बतावो कि किस का क्षेत्रफल सवसे बड़ा होगा ।

यहां प्रश्न की बोली से $\int$ स₁ताय = $\int \sqrt{(१ + \text{य}^२)}$ताय = ग,

$\int$ स ताय = $\int$ र ताय

इस लिये $\int$ शा ताय = $\int \{ \text{र} + \text{अ}\sqrt{(१ + \text{प}^२)} \}$ ताय और

शा = र + अ$\sqrt{(१ + \text{प}^२)}$ फिर २७३ वे प्रक्रम और २७५ वे प्रक्रम से

$$\text{ताशा} = \text{तार} + \frac{\text{अप}}{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}\ \text{ताय और, ना} = १\ \text{पा} = \frac{\text{अप}}{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}\ \text{वा} = ०$$

$$\text{इस लिये शा} = \text{पाप} + \text{स्थि और र} + \text{अ}\sqrt{(१+\text{प}^२)} = \frac{\text{अप}^२}{\sqrt{(१+\text{प}^२)}} + \text{ग}_१$$

$$\text{समशोधन से र} - \text{ग}_१ = -\frac{\text{अ}}{\sqrt{(१+\text{प}^२)}}\ \text{इस लिये प} = \frac{\sqrt{\{\text{अ}^२ - (\text{र}-\text{ग}_१)^२\}}}{\text{र} - \text{ग}_१} = \frac{\text{तार}}{\text{ताय}}$$

$$\text{और ताय} = \frac{(\text{र} - \text{ग}_१)\ \text{तार}}{\sqrt{\{\text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_१)^२\}}}\ \text{चलानयन से}$$

$$\text{य} - \text{ग}_२ = -\sqrt{\{\text{अ}^२ - (\text{र} - \text{ग}_१)^२\}}$$

इस लिये $(\text{य} - \text{ग}_२)^२ + (\text{र} - \text{ग}_१)^२ = \text{अ}^२$ परन्तु यह वृत्त का समीकरण है इस लिये सब से बड़ा वृत्त फल का होगा ।

यह प्रश्न और २७५ प्रक्रम का (२) प्रश्न दोनो सन् १६९६ ई० मे जान वर्नली (John Bernoulli) के निकाले हुए हैं और जान वर्नली ने इन के उत्तर को भी वैशेषिक कलन की रीति से निकाला । वैशेषिककलन के प्रचार के जड़ भी यही दोनों प्रश्न है ।

२७५ प्रक्रम का (२) जो प्रश्न है उसे ऐसे भी कह सकते हो कि एक ऐसी पतली कांच की टेढ़ी पोली नली जिसके दोनों शिरे खुले हों बनाओ जिसके ऊपर के शिरे पर यदि एक गुरु परमाणु पदार्थ छोड़ दे तो वह परमाल्प काल मे नीचे के शिरे पर पहुँच जाय ।

इस प्रश्न को अङ्गरेज़ी मे ब्याचिस्टोक्रोन प्रश्न का (Problem of the brachistochrone) कहते हैं ।

(२) उदाहरण । य अक्ष के चारो ओर एक वक्र को घुमाकर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाया चाहते हैं जो य अक्षगत नियत दो विन्दुओं पर जाय और जिस का पृष्ठफल स्थिर ग के तुल्य और घनफल महत्तम हो तो उस वक्र का समीकरण बनाओ ।

यहां पृष्ठफल $= २\pi \int \text{र}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}\,\text{ताय} = \text{ग}$ और घनफल $= \pi \int \text{र}^{२}\text{ताय}$

इस लिये ऊपर की युक्ति से

$$\pi \int \text{र}^{२}\text{ताय} + २\pi\text{अ} \int \text{र}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}\,\text{ताय यह}$$

$$\text{वा} \quad \int \text{र}^{२}\text{ताय} + २\text{अ} \int \text{र}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}\,\text{ताय} = \int \text{शाताय}$$

यह महत्तम होगा

इस लिये $\text{शा} = \text{र}^{२} + २\text{अ र}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}$ और

$$\text{ताशा} = २\,\text{र तार} + २\,\text{अतार}\sqrt{(१+\text{प})^{२}} + \frac{२\,\text{अ र प}}{\sqrt{(१+\text{प}^{२})}}\,\text{ताय}$$

इस लिये $\text{मा} = ०,\ \text{ना} = २\text{र} + २\,\text{अ}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}$ और $\text{पा} = \dfrac{२\,\text{अ र प}}{\sqrt{(१+\text{प}^{२})}}$

इस लिये $\text{मा} = ०,\ \text{ना} = २\text{र} + २\text{अ}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}$ और $\text{पा} = \dfrac{२\text{अरप}}{\sqrt{(१+\text{प}^{२})}}$

$$\text{इस लिये}\quad \text{शा} = \text{पा} \times \text{प} + \text{स्थि} = \frac{२\text{अरप}^{२}}{\sqrt{(१+\text{प}^{२})}} + \text{ग}_{१}$$

$$= \text{र}^{२} + २\text{अर}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}$$

$$\text{ग}_{१} - \text{र}^{२} = २\text{अर}\left\{\sqrt{(१+\text{प}^{२})} - \frac{\text{प}^{२}}{\sqrt{(१+\text{प}^{२})}}\right\} = \frac{२\text{अर}}{\sqrt{(१+\text{प}^{२})}} \quad \cdot \quad (१)$$

यहां प्रश्न के अनुसार वक्र य अक्ष को दो विन्दुओं पर काटता है इस लिये उन स्थानों मे $\text{र} = ०$ इस का उत्थापन (१) मे देने से $\text{ग}_{१} = ०$ इस लिये

$$\frac{२अर}{\sqrt{(१+प^2)}}+र^2=र\left\{र+\frac{२अ}{\sqrt{(१+प^2)}}\right\}=०$$

इस मे यदि $र+\frac{२अ}{\sqrt{(१+प^2)}}=०$ तो $\frac{४अ^2}{१+प^2}=र^2$

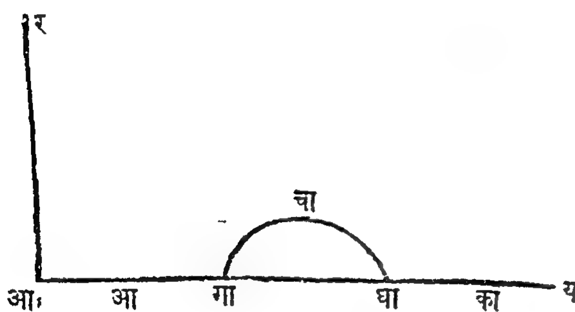
$\therefore प^2+१=\frac{४अ^2}{र^2}$ इसलिये $प=\frac{\sqrt{४अ^2-र^2}}{र}=\frac{तार}{ताय}$

इसलिये $\frac{र}{\sqrt{(४अ^2-र^2)}}=\frac{ताय}{तार}$. $\frac{र\, तार}{\sqrt{(४अ^2-र^2)}}=ताय$

$-\sqrt{(४अ^2-र^2)}=य-ग_२ \therefore र^2+(य-ग_२)^2=४अ^2$

यह एक वृत्त का समीकरण है जिस का केन्द्र य अक्ष पर और व्यासार्द्ध $=-२अ$ है।

कल्पना करो कि य अक्ष मे आ, और का विन्दु नियत है जिनके ऊपर हो कर प्रश्न के अनुसार वक्र को जाना चाहिये। तो यदि आ, का के व्यास मान कर एक गोल वनाया जाय और प्रश्न मे दिया हुआ स्थिर पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के वरावर हो तो इस गोल मे प्रश्नोक्त सव आलाप घट जायँगे परन्तु यदि दिया हुआ पृष्ठफल इस गोल के पृष्ठफल के वरावर न हो किन्तु य अक्ष में गा, और घा विन्दु जो हैं उन के अन्तर को व्यास मान कर जो गोल होगा उसके पृष्ठफल के वरावर हो तो ऐसी स्थिति में ऐसा समझना चाहिये कि आग, य अक्ष का भाग, गाघा व्यास पर वना गाचाघा वृत्तार्द्ध और य अक्ष का घाका भाग इन तीनो को एक मे मिला देने से आगाचाघा का यह जो आ और का दो नियत विन्दुआ पर गया हुआ यर धरातल मे एक वक्र है य अक्ष के चारो ओर उस के घूमने से अभीष्ट घनक्षेत्र होगा जिसका पृष्ठफल दिये हुए पृष्ठफल के समान और घनफल महत्तम होगा।



इसी तरह यदि आका से गाघा वड़ा हो तो भी समझ लेना चाहिये।

ऊपर का समीकरण भी दिखलाता है कि जब $र\left\{र+\frac{२अ}{\sqrt{(१+प^2)}}\right\}=०$ तो $र=०$ यह भी एक वक्र का समीकरण होगा जो कि यहा पर आगा और घाका सरल रेखा के समान होगा।

इस प्रकार से बुद्धिमान को चाहिये कि इस ग्रन्थ में दिखलाये गये जो सिद्धान्त है उनके अभ्यास से नाना प्रकार की कल्पना अपने बुद्धिबल से करे।

अभ्यास के लिये प्रश्न।

१। $\int_0^{\frac{\pi}{२}}\int_0^{२अकोज्याप}$ फ(श्रु,प) श्रु ताश्रुताप   इसमे क्रम को बदलो

उत्तर $\int_0^{२अ}\int_0^{कोज्या^{-१}\frac{श्रु}{२अ}}$ फ (श्रु,प) श्रुतापतार

२। $\int_0^{१}\int_{य}^{य(२-य)}$ फ(य,र) तार ताय इसमे क्रम को बदल देना है।

उ० $\int_0^{१}\int_{१-\sqrt{(१-र)}}^{र}$ फ (य,र) ताय तार

३। $\int_0^{२अ}\int_{\frac{य^२}{४अ}}^{३अ-य}$ फ(य,र) तार ताय इसमें क्रम को बदलना है।

उ० $\int_0^{अ}\int_0^{२\sqrt{(अर)}}$ फ(य,र) ताय तार + $\int_{अ}^{३अ}\int_0^{३अ-र}$ फ(य,र) ताय तार

४। $\int_0^{अ}\int_{\sqrt{(अ^२-य^२)}}^{य+२अ}$ फ(य,र) तार ताय इसका क्रम बदलने से कैसा रूप होगा।

उ० $\int_0^{अ}\int_{\sqrt{(अ^२-र^२)}}^{अ}$ फ(य,र) ताय तार + $\int_{अ}^{२अ}\int_0^{अ}$ फ(य,र) तायतार

+ $\int_{२अ}^{३अ}\int_{र-२अ}^{अ}$ फ(य,र) ताय तार

५। यदि य = अज्यापज्याप$_१$, और र = क कोज्यापज्याप$_१$

तो सिद्ध करो कि बदलने से $\int\int$ तार ताय इस द्विगुण चल का

$\pm\int\int$ अक ज्याप$_१$ कोज्याप$_१$ ताप ताप$_१$ ऐसा रूप होगा।

६। यदि य = वज्याअ$_१$ + श कोज्याअ$_१$

और र = वकोज्याअ$_१$ — शज्याअ$_१$ तो सिद्ध करो कि

$$\iint \text{फ}(\text{य},\text{र})\frac{\text{तार ताय}}{\sqrt{(१-\text{य}^२-\text{र}^२)}}=\iint \text{फ}_१(\text{व},\text{श})\frac{\text{ताश ताव}}{\sqrt{(१-\text{व}^२-\text{श}^२)}}$$

७। सिद्ध करो कि

$$\int_०^\infty\int_०^\infty \text{फ}(\text{अ}^२\text{य}^२+\text{क}^२\text{र}^२)\text{ तार ताय }\frac{\pi}{४\text{अक}}\int_०^\infty \text{फ}(\text{य})\text{ताय}$$

८। $\iint \text{इ}^{-(\text{य}^२+२\text{यरकोज्याअ}_१+\text{र}^२)}$ नार ताय इसको अक्षीय भुजयुग्म के रूप में वदलो और तव दिखलावो कि यदि य और र की सीमा ० और ∞ हों तो द्विगुण चल का मान $\frac{\text{अ}_१}{२\text{ज्याअ}_१}$ होगा।

९। सिद्ध करो कि

$$\int_०^\text{अ}\int_०^\text{क}\frac{\text{तार ताय}}{(\text{ग}^२+\text{य}^२+\text{र}^२)^{\frac{३}{२}}}=\frac{१}{\text{ग}}\text{ स्प}^{-१}\frac{\text{अक}}{\text{ग}\sqrt{(\text{अ}^२+\text{क}^२+\text{ग}^२)}}$$

१०। अक्षीय भुजयुग्म के रूप मे वदल कर सिद्ध करो कि

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\text{अ तार ताय}}{(\text{य}^२+\text{र}^२+\text{अ}^२)^{\frac{३}{२}}(\text{य}^२+\text{र}^२+\text{अ}'^२)^{\frac{१}{२}}}=\frac{२\pi}{\text{अ}+\text{अ}'}$$

११। यदि य = श्रुकोज्याप + अज्याप और र = श्रुज्याप + अकोज्याप तो $\iint$ फ(य,र) तार ताय इसको वदलने से कैसा रूप होगा।

उ० $\iint$ फ(श्रुकोज्याप + अज्याप, श्रुज्याप + अकोज्याप) (अज्या२प−श्रु)तार्ताप

१२। सिद्ध करो कि $\iint\frac{\sqrt{(१-\text{य}^२-\text{र}^२)}}{\sqrt{(१+\text{य}^२+\text{र}^२)}}\text{ तार ताय}=\frac{\pi}{४}\left(\frac{\pi}{२}-१\right)$

यहां चलानयन य, और र के सव धनमानो के भीतर किया गया है और $\text{य}^२+\text{र}^२\angle १$।

१३। सिद्ध करो कि

$$\iiint\frac{\text{ताय तार ताल}}{\sqrt{(१-\text{य}^२-\text{र}^२-\text{ल}^२-\quad)}}=\frac{\pi^{\frac{\text{न}+१}{२}}}{२^\text{न}\text{गा}\left(\frac{\text{न}+१}{२}\right)}$$

जहा चलराशियों की संख्या न है और चलानयन सव धन मान के भीतर किया गया है जो कि $\text{य}^२+\text{र}^२+\text{ल}^२+\quad\angle १$ इस नियम से सिद्ध होते हैं।

१४ । सिद्ध करो कि

$$\text{ज्या}\ \tfrac{१}{२}\ \text{य} = \frac{८}{\pi}\left(\frac{\text{ज्याय}}{२^२-१} - \frac{२\text{ज्या}२\text{य}}{२^२ २^२-१} + \frac{३\text{ज्या}३\text{य}}{२^२ \cdot ३^२-१} - \frac{४\text{ज्या}४\text{य}}{२^२ ४^२-१} + \cdot\cdot\right)$$

१५ । सिद्ध करो कि

$$\text{कोज्या}\ \tfrac{१}{२}\text{य} = \frac{८}{\pi}\left\{१ + \tfrac{१}{२}\frac{\text{कोज्याय}}{२^२-१} - \tfrac{१}{२}\frac{\text{कोज्या}२\text{य}}{२^२ २^२-१} + \cdot\cdot\right\}$$

१६ । एक मनुष्य से ३० हाथ के अन्तर पर दक्षिण ओर उस का पोसा तीतर था जैसे ही मनुष्य पूर्व की ओर चलने लगा वैसे ही तीतर भी मनुष्य के पास पहुंचने के लिये चला तो वतावो कि प्रथम स्थान से पूर्व की ओर कितनी दूरी पर मनुष्य और तीतर से भेंट हुई । इस प्रश्न मे इतना जानते हैं कि प्रतिक्षण मे मनुष्य से दूना तीतर चलता था ।

उ० २० हाथ ।

१७। सौ हाथ ऊँचे एक तालवृक्ष के ऊपर एक कौआ वैठा था उसने पेड़ की जड़ से दक्षिण ओर २५ हाथ के अन्तर पर दक्षिण ही की ओर जाता एक मूसे को देख कर उसकी दूनी गति से पकड़ने के लिये झपटा तो वतावो कि पेड़ की जड़ से कितने हाथ पर कौअे ने मूसे को पकड़ा ।

उ० १८३ $\frac{१}{३}$ हाथ ।

१८। पृथ्वी से १०,००० हाथ ऊँचे पर जा कर एक कवूतर ने पृथ्वी पर ठीक अपने पैर के नीचे चावलों को देख कर एक पल मे २०० हाथ की गति से उतरने लगा परन्तु उस समय पूर्व की वायु एक चाल से वहती थी जिसके कारण एक पल की गति कवूतर की पूर्व की ओर भी १०० हाथ हो गई तो वतावो कि कितने पल मे वह कवूतर पृथ्वी पर पहुँचा ।

उ० ६६ $\frac{२}{३}$ पल

१९। २६७ प्रक्रम के (६) वें प्रश्न मे मोर और सांप के योग से वक्र त्रिवाहु होगा उसका क्षेत्रफल क्या होगा । उ०, फल = $\frac{(२\ \text{इ}_१^२\ \text{क} - \text{इ}_१\text{ग})\ \text{अ}}{४\text{गु}^२ - १}$

२०। १६ वें प्रश्न में मनुष्य और तीतर के योग से जो वक्र त्रिवाहु होगा उसका फल क्या होगा । उ० फल = १२०

२१। १७ वें प्रश्न में काक और मूस के योग से जो वक्र त्रिवाहु होगा उसका फल वतावो । उ० फल = $\frac{\text{कोटि}\ (२\ \text{गु}^२ \times \text{भुज} + \text{गु} \times \text{कर्ण})}{४\ \text{गु}^२ - २}$

$$\text{यहां } \text{गु} = \frac{\text{काक गति}}{\text{मूस की गति}}$$

२२। १८ वें प्रश्न में कपोत जिस वक्र में पृथ्वी पर उतरेगा उससे और कपोत की उँचाई १०,००० से जो चापक्षेत्र होगा उसका क्या फल होगा।

$$\text{उ० फल} = \frac{२(१०,०००)^{२}}{३}$$

२३। एक वक्र ऐसा बतावो जिसमे $\int \frac{\text{प}^{२}\text{र}}{१+\text{प}^{२}}$ ताय इसका मान न्यूनतम हो।

$$\text{उ० र} = \frac{\text{ग}(१+\text{प}^{२})^{२}}{\text{प}^{२}}, \text{य} = \text{ग}_{१} + \text{ग}\left(\frac{३}{४\text{प}^{२}} + \frac{१+\text{प}^{२}}{\text{प}^{२}} + \text{ला प}\right)$$

२४। जिस सूच्याकार शङ्कु के पृष्ठ का $\text{ल} = \text{इ}\sqrt{(\text{य}^{२}+\text{र}^{२})} = \text{इ श्रु}$ यह समीकरण है उसके पृष्ठ पर दो दिये हुए विन्दुओं के बीच मे जो परमाल्प रेखा होगी उसका समीकरण बतावो। उ० $\text{श्रु} = \text{गछे}\left\{\frac{\text{प}+\text{ग}_{१}}{\sqrt{(१+\text{इ}^{२})}}\right\}$

२५। वक्र का चाप और फल स्थिर है और यह वक्र य अक्ष के चारो ओर घूम कर ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका घनफल महत्तम है तो वक्र का पता लगावो। उ० यहां $\text{शा} = \pi\,\text{र}^{२} + \text{कर} + \text{अ}\sqrt{(१+\text{प}^{२})}$ ऐसा होगा फिर इस पर से २७६ प्रक्रम की क्रिया कर वक्र का समीकरण जानो।

२६। सब वक्रो में क्षेत्रफल स्थिर है तो बतावो किसकी परिधि सब से छोटी होगी। उ० वृत्त की।

२७। वक्र का चाप स्थिर है और यह य अक्ष के चारो ओर घूम कर एक ऐसा घनक्षेत्र बनाता है जिसका न्यूनतम पृष्ठफल है तो बतावो वह कौन सा वक्र है। उ० कातन्वली (Catenary)

२८। एक नीव मे जड़ से दो शाखा फूटी थीं जिन का झुकाव ३०° था। पहली शाखा पर जड़ से ८ हाथ के अन्तर पर एक मैना बैठी थी और दूसरी शाखा पर जड़ से $३ + ४\sqrt{३}$ हाथ के अन्तर पर एक कीड़ा बैठा था। यह जैसे ही शाखा के ऊपर की ओर चलने लगा वैसे ही इस पर मैना झपटी तो बतावो कि पहले स्थान से कितनी दूर जाने पर मैना ने उस कीड़े को पकड़ लिया। इस प्रश्न में इतना हम जानते हैं कि कीड़े से मैना दूनी चलती थी।

उ० $४\frac{१}{३}$ हाथ

२९। एक महाजन ने एक ज्यौतिषी से प्रसन्न होकर कहा कि कल आप एक पीतर का डब्बा किसी से बनवा कर लेते आइयेगा जो कि ठीक मेरी रूमाल से चारो ओर बंध जाय तो मै उस डब्बे को अशर्फ़ियों से भर कर आपको सङ्कल्प करूँगा। बतावो ज्यौतिषी कैसा डब्बा बनावे जिसमें उसे बहुत अशर्फ़ियां मिलें। इतना यहां पर हम जानते हैं कि उस धनी के रूमाल की लम्बाई साढ़ेपांच हाथ और चौड़ाई पौने दो हाथ थी।

उ० यदि व्यास परिधि का सम्बन्ध $\frac{२२}{७}$ हो तो पौने दो हाथ के व्यास का जो एक गोलाकार डब्बा बनेगा उस मे सबसे अधिक अशर्फ़ियां भरेगी।

हरिगीत

रचि हैं कृपालुद्विवेदिसुतकृत सुकृतिजन मन लाय के।
चलराशिकलन वरासि कल नवराशि चरम मिलाय के॥
धरि शान जौं बुद्धिबल गरवदलि सकल खलहि हिलाय के।
धन धान मान महान लहि है होय प्रिय नृप राय के॥

इतिश्रीकृपालुदत्तसुतश्रीसुधाकरद्विवेदिकृतं चलराशिकलनं सम्पूर्णम्॥

सित सावन शनि तेरस बरस विरोधि।
पूरन कियेउ सुधाकर सब विधि शोधि॥

